# Übungsblatt Nr. 6

## Abgabe bis Freitag, 07.12.2012, 11:15 Uhr

### Aufgabe 6.1: Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten (Präsenzaufgabe)

In Aufgabe 2.1.c) haben Sie den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten kennengelernt:

$$\Delta\Phi(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}.$$

Auf diesem Übungsblatt soll es nun um die Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugehörigen Laplace-Gleichung $\Delta\Phi(r,\varphi,\theta) = 0$ gehen.

**a)** Man zeige: Mit $x = \cos\theta$ und dem Separationsansatz $\Phi(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{r}U(r)P(x)Q(\varphi)$ ergeben sich folgende drei Gleichungen (mit zunächst offenen Konstanten $c_1$ und $c_2$):

$$r^2\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}U(r)\right) = c_1 U(r) \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(x)\right) - \left(\frac{c_2}{1-x^2}\right)P(x) = -c_1 P(x) \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}Q(\varphi) = -c_2 Q(\varphi) \tag{3}$$

**b)** Man zeige: Damit $Q(\varphi)$ auf der Kugeloberfläche eine eindeutige Funktion definiert, muss $c_2 = m^2$ sein, mit $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

---

### Aufgabe 6.2: Azimuthalsymmetrie und LEGENDRE-Polynome

Im Folgenden nehmen wir an, dass die Randbedingungen unseres Laplace-Problems azimuthalsymmetrisch seien, und somit das Potential keine Abhängigkeit von $\varphi$ habe. Wir betrachten also den Spezialfall $m = 0$ von Aufgabe 6.1.

**a)** **(Präsenzaufgabe)** Zeigen Sie, dass ein Potenzreihenansatz $P(x) = \sum_n a_n x^n$ zu folgender Bedingung an die Koeffizienten führt:

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - c_1}{(n+2)(n+1)}a_n\,.$$

Es gibt also zwei unabhängige Serien mit $n$ gerade und $n$ ungerade.

Man überlege sich, dass i.A. in beiden Fällen für $n \to \infty$ folgt $a_n \to \text{const}$, und dass $P(x)$ für $x \to 1$ somit divergieren würde, es sei denn, die Reihe bricht ab (d.h., ab einem Wert $n = \ell$ wird $a_{n+2} = 0$). Man zeige, dass damit $c_1 = \ell(\ell+1)$ mit $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ sein muss. Die entsprechenden Polynome bezeichnen wir mit $P_\ell(x)$ (LEGENDRE-Polynome).

**b)** **(Hausaufgabe)** Konstruieren Sie $P_\ell(x)$ für $\ell = 0, 1, 2, 3$ explizit unter der Normierungsbedingung $P_\ell(1) = 1$. (2 Punkte)

Zeigen Sie für diese die RODRIGUES-Formel (die übrigens für beliebige $\ell$ gilt):

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell$$

**c) (Hausaufgabe)** Sie haben in der Vorlesung bereits gesehen, dass die Legendre-Polynome orthogonal sind. Leiten Sie nun ihre Normierung $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x P_\ell(x)^2 = 2/(2\ell+1)$ her. Dafür kann der Zusammenhang mit ihrer erzeugenden Funktion genutzt werden: (3 Punkte)

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x) t^\ell, \quad |t| < 1$$

*Anleitung: Integrieren Sie das Quadrat beider Seiten über* $\mathrm{d}x$ *in den Grenzen von* $[-1,1]$, *und entwickeln Sie das Resultat der Integration auf der linken Seite in eine Potenzreihe. Aus dem Koeffizientenvergleich finden Sie dann die Normierungsbedingung.*

**d) (Präsenzaufgabe)** Man zeige, dass die allgemeinste Lösung für $U(r)$ (aus Aufgabe 6.1 a)) durch $U_\ell(r) = a_\ell r^{\ell+1} + \frac{b_\ell}{r^\ell}$ gegeben ist.

*Somit folgt als allgemeinste azimuthalsymmetrische Lösung der Laplace-Gleichung*

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( a_\ell r^\ell + \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta), \quad \textit{mit beliebigen Koeffizienten } a_\ell, b_\ell.$$

---

## Aufgabe 6.3: Leitende Halbkugelschalen (Hausaufgabe) (5 Punkte)

Zwei leitende hohle Halbkugeln vom Radius $R$ sind längs des Äquators durch einen infinitesimalen isolierenden Ring getrennt. Die untere Halbkugel sei geerdet, die obere befinde sich auf dem Potential $V_0$.

Berechnen Sie das Potential für kleine Abstände $r$ vom Kugelmittelpunkt bis zur Ordnung $(r/R)^3$.

*Hinweis: Legen Sie die Äquatorebene in die* $x$-$y$*-Ebene. Begründen Sie, warum sich das Potential innerhalb der Kugel in der Form*

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^\ell A_\ell P_\ell(\cos\theta)$$

*mit Konstanten* $A_\ell$ *schreiben lässt, wobei* $\theta$ *der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der* $z$*-Achse ist, und verwenden Sie die Orthogonalitätsrelationen der Legendre-Polynome.*