# Übungsblatt Nr. 2

## Abgabe bis Donnerstag, 8.11.2012, 11:15 Uhr

### Aufgabe 2.1: Differentialoperatoren (Präsenzaufgabe)

**a)** Berechnen Sie für $r > 0$ die Ausdrücke $\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\right)$ und $\mathrm{rot}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$.

**b)** Drücken Sie $\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\left(\vec{A}\right)\right)$ durch den Laplace-Operator $(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$ (hier angewandt auf ein Vektorfeld) aus.

**c)** Wie in der Vorlesung gezeigt, ist der Laplace-Operator (angewandt auf ein Skalarfeld) in krummlinigen Orthogonalkoordinaten $(q_1, q_2, q_3)$ durch

$$\Delta F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial F}{\partial q_i} \right)$$

gegeben. Wie in Aufgabe 1.3 treten hier die Koeffizienten $h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|$ auf.

Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten folgende Form hat:

$$\Delta F(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

$$\Delta F(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial F}{\partial \theta}\right).$$

---

### Aufgabe 2.2: Flächenintegrale am Beispiel des Torus (Präsenzaufgabe)

Die Oberfläche eines Torus lässt sich durch zwei Parameter $u, v \in [0, 2\pi)$ darstellen durch

$$\vec{x} = a \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \cos v \sin u \\ \sin v \sin u \\ \cos u \end{pmatrix},$$

wobei $a > b$ sei.

Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\oint_{\text{Torus}} \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{F}$ für das Feld $\vec{F} = \frac{k}{x_1^2 + x_2^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch direkte Integration (d.h. ohne Verwendung des GAUSSschen Integralsatzes) und erklären Sie das Ergebnis.

**Aufgabe 2.3: Kurvenintegrale und Wegabhängigkeit**

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = (axy - z^3)\vec{e}_x + (a-2)x^2\vec{e}_y + (1-a)xz^2\vec{e}_z$.

**a)** **(Präsenzaufgabe)** Berechnen Sie das Kurvenintegral über $\vec{A}$ auf einer Geraden von $\vec{0}$ nach $(1,1,1)$.

**b)** **(Hausaufgabe)** Berechnen Sie folgende weiteren Kurvenintegrale über $\vec{A}$: (3 Punkte)

- Weg II: $\vec{0} \to (1,0,0) \to (1,1,0) \to (1,1,1)$
- Weg III: Von $\vec{0}$ nach $(1,1,1)$ auf einer Kurve mit Parametrisierung $\vec{r}(s) = (s, s^2, s^4)$.

**c)** **(Hausaufgabe)** Bestimmen Sie die Konstante $a$ so, dass Kurvenintegrale über $\vec{A}$ wegunabhängig werden. (2 Punkte)

---

**Aufgabe 2.4: GAUSSscher Integralsatz (Hausaufgabe)** (5 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = z\,[y\vec{e}_x - x\vec{e}_y + (x-y)\vec{e}_z]$. Zeigen Sie durch explizite Berechnung der Integrale, dass der GAUSSsche Integralsatz für das Tetraeder mit den Ecken $\mathcal{O}(0,0,0)$, $\mathcal{A}(1,0,0)$, $\mathcal{B}(0,1,0)$, $\mathcal{C}(0,0,1)$ gilt.