Übungen zur Theoretischen Physik III (Quantenmechanik) — Blatt 11
Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS 2020

Aufgabe 11.1 *Spin-$\frac{1}{2}$-System* (3 Bonuspunkte)

Für ein Spin-$\frac{1}{2}$-System seien $|\pm\rangle$ die Eigenzustände zu S_3: $S_3|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$.

a) Bestimmen Sie den Eigenzustand $|\vec{n},+\rangle$ des Operators $\vec{S}\cdot\vec{n}$,

$$\vec{S}\cdot\vec{n}\,|\vec{n},+\rangle = +\frac{\hbar}{2}\,|\vec{n},+\rangle,$$

wobei $\vec{n} = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)^T$.

Ergebnis: $|\vec{n},+\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})|+\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin(\frac{\theta}{2})|-\rangle$.

b) S_1 werde im Zustand $|\vec{n},+\rangle$ gemessen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, $+\frac{\hbar}{2}$ zu erhalten? Berechnen Sie auch das Schwankungsquadrat $(\Delta S_1)^2 = \langle (S_1 - \langle S_1\rangle)^2\rangle$ für den Zustand $|\vec{n},+\rangle$.

c) Verifizieren Sie die Unschärferelation zwischen S_1 und S_2 im Zustand $|\vec{n},+\rangle$.

Aufgabe 11.2 *Rekursionsformel für Clebsch-Gordan-Koeffizienten* (2 Bonuspunkte)

Wir betrachten ein quantenmechanisches System, das aus zwei Teilen besteht, die jeweils durch Eigenzustände $|j_k, m_k\rangle$ $(k = 1,2)$ von $\vec{J}_k^2$ und $J_{k,3}$ der Drehimpulsoperatoren $\vec{J}_k$ beschrieben werden,

$$\begin{aligned}
\vec{J}_k^2|j_k,m_k\rangle &= \hbar^2 j_k(j_k+1)|j_k,m_k\rangle, &\qquad j_k &= 0,\tfrac{1}{2},1,\dots,\\
J_{k,3}|j_k,m_k\rangle &= \hbar m_k|j_k,m_k\rangle, &\qquad m_k &= -j_k,-j_k+1,\dots,j_k.
\end{aligned}$$

Der Übergang von der Basis der Produktzustände $|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle \equiv |j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle$ zur Basis $|j,m\rangle$ aus Eigenzuständen von $\vec{J}^2$ und J_3 des Gesamtdrehimpulses $\vec{J}$ wird durch die Clebsch-Gordan-Koeffizienten $\langle j_1,m_1;j_2,m_2|j,m\rangle$ vermittelt,

$$|j,m\rangle = \sum_{\substack{m_1,m_2\\ m=m_1+m_2}} |j_1,m_1;j_2,m_2\rangle\langle j_1,m_1;j_2,m_2|j,m\rangle.$$

Leiten Sie mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren $J_\pm = J_{1\pm} + J_{2\pm}$ folgende Rekursionsformel für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten her:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\langle j_1,m_1;j_2,m_2|j,m-1\rangle\\
&\qquad = \sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1+1)}\,\langle j_1,m_1+1;j_2,m_2|j,m\rangle\\
&\qquad\quad + \sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2+1)}\,\langle j_1,m_1;j_2,m_2+1|j,m\rangle.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 11.3 *Parität* (2 Bonuspunkte)

Im Folgenden bezeichnat $\mathcal{P}$ den Paritätsoperator.

a) Wir betrachten ein Teilchen der Masse m im Potential $V(\vec{x})$, d.h. ein System mit dem Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \hat{\vec{p}}^2/(2m) + V(\hat{\vec{x}}).$$

Für welche Potenziale $V(\vec{x})$ ist die Parität eine Erhaltungsgröße ist, so dass für einen beliebigen Zustand $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\mathcal{P}\rangle = 0$?

b) Zeigen Sie, dass die Eigenzustände $|l, m\rangle$ des Bahndrehimpulses auch Eigenzustände von $\mathcal{P}$ mit Eigenwerten $(-1)^l$ sind.