Übungen zur Theoretischen Physik III (Quantenmechanik) — Blatt 6
Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS 2020

Aufgabe 6.1 *Simultane Eigenzustände* (2 Punkte)

Im Folgenden seien die Operatoren A and B Hermitesch.

a) Angenommen A und B antikommutieren, d. h. $\{A, B\} \equiv AB + BA = 0$. Unter welchen Voraussetzungen kann es prinzipiell simultane Eigenzustände zu A und B geben?

b) Angenommen A und B kommutieren nicht miteinander, d. h. $[A, B] \neq 0$, aber beide Operatoren kommutieren mit dem Hamilton-Operator H, d. h. $[A, H] = 0$ und $[B, H] = 0$. Welche Aussagen können Sie über mögliche Entartung der Eigenzustände von H treffen?

Aufgabe 6.2 *Baker-Campbell-Hausdorff-Formel* (3 Punkte)

Gegeben seien die Operatoren A und B auf einem Hilbert-Raum, die im Allgemeinen nicht miteinander kommutieren. Die Exponentialfunktion e^A eines Operators A ist über ihre Potenzreihe definiert, wobei Sie im Folgenden die Konvergenz solcher Reihen voraussetzen können.

a) Beweisen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathrm{e}^{\alpha^k A} = k\alpha^{k-1} A\,\mathrm{e}^{\alpha^k A}$ (mit $\alpha \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$) und $\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}$, falls $[A, B] = 0$. Folgern Sie daraus, dass $(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$.

b) Beweisen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$\mathrm{e}^A B \mathrm{e}^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,[A, B]_n,$$

wobei der multiple Kommutator $[.,.]_n$ rekursiv definiert ist durch

$$[A, B]_n = [A, [A, B]_{n-1}] \quad \text{mit} \quad [A, B]_0 = B.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Taylor-Reihe der operatorwertigen Funktion $F(x) = \mathrm{e}^{xA} B \mathrm{e}^{-xA}$ der Hilfsvariablen x um den Punkt $x = 0$.

c) Beweisen Sie die speziellen BCH-Formeln

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B \mathrm{e}^{-[A,B]/2}, \qquad \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A \mathrm{e}^{[A,B]},$$

die unter der Voraussetzung $[A, [A, B]] = [B, [B, A]] = 0$ gelten und in der Quantenmechanik häufig Anwendung finden.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathrm{e}^{xA}\mathrm{e}^{xB} = \mathrm{e}^{x(A+B)+\frac{1}{2}x^2[A,B]}$ für beliebige x.

Bitte wenden!

Aufgabe 6.3 *Zustände mit minimaler Unschärfe* (2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass in der allgemeinen Unschärferelation für Hermitesche Operatoren A, B

$$\langle(\delta A)^2\rangle\langle(\delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$$

mit $\delta A = A - \langle A\rangle_\psi$, $\delta B = B - \langle B\rangle_\psi$ das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn für den Zustand $|\psi\rangle$, für den die Unschärfen zu berechnen sind, gilt, dass

$$\delta A|\psi\rangle = \lambda\,\delta B|\psi\rangle$$

mit rein imaginärem λ, d. h. $\lambda = -\lambda^*$.

Hinweis: Betrachten Sie die Schwarzsche Ungleichung für $\delta A|\psi\rangle$ und $\delta B|\psi\rangle$.

b) Leiten Sie mit Hilfe von a) die allgemeine Form der Ortsraum-Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$ für einen Zustand $|\psi\rangle$ her, der minimale Orts-Impuls-Unschärfe in allen drei Raumdimensionen besitzt.