Übungen zur Theoretischen Physik III (Quantenmechanik) — Blatt 5
Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS 2020

Aufgabe 5.1 *Operator des Radialimpulses* (2 Punkte)

Klassisch ist der Radialimpuls p_r eines Teilchens mit kartesischem Impuls $\vec{p}$ definiert durch $p_r = \vec{e}_r \cdot \vec{p}$, wobei $\vec{e}_r$ der Einheitsvektor in Richtung des Ortsvektors $\vec{x}$ ist. Machen Sie für den entsprechenden Operator $\hat{p}_r$ den Ansatz $\hat{p}_r = \alpha \hat{\vec{e}}_r \cdot \hat{\vec{p}} + (1-\alpha)\hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{e}}_r$ mit einer reellen Zahl α.

a) Fordern Sie Hermitizität $\hat{p}_r^\dagger = \hat{p}_r$ und legen Sie damit α fest.

b) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{r}, \hat{p}_r]$ für allgemeines α, wobei $\hat{r} = |\hat{\vec{x}}|$. Für welche α gilt die Heisenbergsche Vertauschungsrelation $[\hat{r}, \hat{p}_r] = \mathrm{i}\hbar$?

Aufgabe 5.2 *Vertauschungsrelationen mit dem Drehimpuls* (3 Punkte)

Ein Operator s heißt *skalarer Operator*, falls

$$[L_m, s] = 0, \qquad m = 1,2,3, \tag{1}$$

ein Operator $\vec{v}$ heißt *Vektoroperator*, falls

$$[L_m, v_n] = \mathrm{i}\hbar \sum_l \epsilon_{mnl} v_l, \qquad m,n = 1,2,3, \tag{2}$$

wobei $L_m = \sum\limits_{n,l} \epsilon_{mnl} \hat{x}_n \hat{p}_l$ die m-te Komponente des Drehimpulsoperators $\vec{L} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}$ darstellt. ϵ_{mnl} bezeichnet den total antisymmetrischen Tensor

$$\epsilon_{mnl} = \begin{cases} +1, & \text{falls} \quad (m,n,l) = (1,2,3) \quad \text{bzw. zyklisch}, \\ -1, & \text{falls} \quad (m,n,l) = (3,2,1) \quad \text{bzw. zyklisch}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Benutzen Sie im Folgenden obige Komponentenschreibweise.

a) Zeigen Sie, dass das Quadrat $\vec{v}^2$ eines Vektoroperators $\vec{v}$ ein skalarer Operator ist.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Heisenbergschen Vertauschungsrelationen die Kommutatoren (1) bzw. (2) für die Operatoren $\hat{\vec{x}}$, $\hat{\vec{p}}$, $\hat{\vec{x}}^2$ und $\hat{\vec{p}}^2$.

c) Zeigen Sie, dass $\vec{L}$ ein Vektoroperator ist.

   Hinweis:
   Berechnen Sie zuerst die Kontraktion $\sum\limits_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}$ für allgemeine Indizes i,j,l,m.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.3 *Ungleichungen im Hilbert-Raum* (1 Punkt)

Beweisen Sie folgende Ungleichungen für beliebige Elemente ψ, ϕ eines Hilbert-Raumes:

a) Schwarzsche Ungleichung: $|\langle\psi|\phi\rangle| \leq \|\psi\| \cdot \|\phi\|$,

b) Dreiecksungleichung: $\|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|$.

Aufgabe 5.4 *Simultane Diagonalisierung* (2 Punkte)

Gegeben sind die Operatoren A und B,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i}b \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

im 3-dimensionalen Hilbert-Raum, der von der Basis $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ aufgespannt wird.

a) Geben Sie Eigenzustände und Eigenwerte von A und B an.

b) Verifizieren Sie, dass A und B kommutieren, und geben Sie eine simultane Basis von Eigenzuständen zu A und B an. Charakterisiert die Angabe der Eigenwerte von A und B die Eigenzustände vollständig?