Übungen zur Theoretischen Physik III (Quantenmechanik) — Blatt 4
Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS 2020

Aufgabe 4.1 *Orts-Impuls-Unschärfe beim harmonischen Oszillator* (2 Punkte)

Berechnen Sie die mittleren Schwankungsquadrate

$$\Delta x = \sqrt{\langle(\hat{x} - \langle\hat{x}\rangle)^2\rangle}, \qquad \Delta p = \sqrt{\langle(\hat{p} - \langle\hat{p}\rangle)^2\rangle}$$

für Ort und Impuls für die Energieeigenzustände des eindimensionalen harmonischen Oszillators und verifizieren Sie die Heisenbergsche Unschärferelation.

Hinweis: Die allgemeinen Eigenschaften der Hermite-Polynome aus Aufgabe 3.1 sind hilfreich.

Aufgabe 4.2 *Erwartungswerte* (1 Punkt)

Für welche Potentiale $V(\vec{x})$ gilt $\langle\nabla V(\hat{\vec{x}})\rangle_\psi = \nabla V(\langle\hat{\vec{x}}\rangle_\psi)$ für beliebige Zustände ψ?

Hinweis: Untersuchen Sie die Taylorentwicklung von $V(\vec{x})$ um den Punkt $\vec{x} = \langle\vec{x}\rangle$.

Aufgabe 4.3 *Unitärer Operator* (2 Punkte)

Ein Operator U, der auf Elemente f, g eines komplexen Vektorraumes V mit Skalarprodukt (f,g) wirkt, heißt *unitär*, falls $(Uf, Uf) = (f, f)$ für alle $f \in V$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass $(Uf, Ug) = (f, g)$ für alle $f, g \in V$, d. h. $U^\dagger = U^{-1}$.

b) Welche Eigenschaft haben die Eigenwerte von U?

c) Sei $U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha A}$ für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ unitär. Welche Eigenschaft hat dann der Operator A? (Die Exponentialfunktion ist hier über ihre Potenzreihe definiert.)

d) Sind die Summe und das Produkt zweier unitärer Operatoren unitär?

Bitte wenden!

Aufgabe 4.4 *Allgemeine Potentialstufe* (2 Punkte)

Eine eindimensionale Potentialstufe $V(x)$ sei durch folgende Form gegeben:

$$V(x) = \begin{cases} V_- & \text{für} \quad x < -a, \\ V_+ & \text{für} \quad x > a, \\ \text{beliebig stetig} & \text{für} \quad |x| \leq a, \end{cases} \qquad \text{mit} \quad a > 0,$$

d. h. $V(x)$ ist für $|x| < a$ eine allgemeine, reelle, stetige Funktion und für $|x| > a$ konstant, wobei $|V_\pm| < \infty$. Sei ferner $V_- < V_+$.

a) Welche Form hat die Lösung $\psi(x)$ der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für $|x| > a$ für Energien E mit $V_- < E < V_+$? Zeigen Sie, dass die Lösung in diesen Außenbereichen abgesehen von der Energie E und der willkürlichen globalen Normierung insgesamt nur von zwei weiteren, reellen Parametern abhängt, die von der Form von V bestimmt werden. Zeigen Sie ferner, dass die Wahrscheinlichkeitsstromdichte verschwindet. Was bedeutet dies physikalisch?

b) Zur Vereinfachung setzen Sie nun $V_\pm = 0$. Für $E > 0$ lassen sich zwei Lösungen $\psi_\pm(x)$ gewinnen, die für $x \to \pm\infty$ die Form $\psi_\pm(x) = C_\pm e^{\pm ikx}$ haben. Welche Bedeutung haben diese Lösungen? Analog zu Aufgabe 2.2 werden für diese Lösungen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten $R_\pm$ und $T_\pm$ definiert, für die auf Grund der Erhaltung des Wahrscheinlichkeitsstromes $R_\pm + T_\pm = 1$ gelten muss. Zeigen Sie damit, dass $R_+ = R_-$ und $T_+ = T_-$.

   Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass wenn $\psi(x)$ eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung ist, dies auch für $\operatorname{Re}\psi(x)$ und $\operatorname{Im}\psi(x)$ gilt.