Übungen zur Theoretischen Physik III (Quantenmechanik) — Blatt 2
Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS 2020

Aufgabe 2.1 *Kastenpotential* (2 Punkte)

Ein Teilchen befinde sich in dem Potentialkasten

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 < x < L, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Vorlesung wurden die Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ und die zugehörigen Energieeigenwerte E_n,

$$\phi_n(x) = A \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right), \qquad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

bestimmt.

a) Konstruieren Sie aus den Wellenfunktionen des Grundzustandes $\phi_1(x)$ und des ersten angeregten Zustandes $\phi_2(x)$ eine Anfangsverteilung $\psi(x, t = 0)$, bei welcher die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in der rechten Hälfte zu finden, maximal ist.

b) Wie ändern sich das in Teil b) bestimmte $\psi(x, t)$ und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in der rechten Hälfte im Zeitverlauf?

Aufgabe 2.2 *Potentialbarriere* (3 Punkte)

Eine eindimensionale Potentialbarriere habe die Form

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0 & \text{für} \quad 0 < x < a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie diejenigen (nicht normierbaren) Lösungen $\psi(x)$ der zugehörigen zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung, die für $x \to \infty$ die Form $C\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ haben

a) für den Fall $E > V_0$,

b) für den Fall $E < V_0$.

c) Die gesuchte Eigenfunktion hat für $x \to -\infty$ die Form

$$\psi(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}.$$

$R = |\frac{B}{A}|^2$ ist der Reflexions-, $T = |\frac{C}{A}|^2$ der Transmissionskoeffizient der Potentialbarriere. Berechnen Sie R und T für die Fälle a) und b) und zeigen Sie, dass $R + T = 1$.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.3 *Gaußsches Wellenpaket* (2 Punkte)

Ein eindimensionales Gaußsches Wellenpaket ist charakterisiert durch die Anfangsbedingung

$$\psi(x,0) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\sigma^2} + \mathrm{i}k_0 x\right\}.$$

a) Berechnen Sie die zugehörige Wellenfunktion $\psi(x,t)$ zu beliebigen Zeiten t mit Hilfe der Greensche Funktion

$$G_0(x,t;x',0) = -\sqrt{\frac{\mathrm{i}m}{2\pi\hbar t}} \exp\left\{\frac{\mathrm{i}m(x-x')^2}{2\hbar t}\right\}$$

der freien, zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung aus Aufgabe 1.2.

b) Geben Sie sowohl den Mittelwert $\langle x\rangle$ als auch das mittlere Schwankungsquadrat $\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle}$ an, das sich mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ aus a) für beliebige Zeiten t ergibt.