Übungen zur Theoretischen Physik III (Quantenmechanik) — Blatt 1
Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS 2020

Aufgabe 1.1 *Harmonischer Oszillator nach Bohr/Sommerfeld* (2 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Quantisierungsbedingung

$$\oint \mathrm{d}q\, p = nh, \qquad n \in \mathbb{N},$$

von Bohr und Sommerfeld die möglichen Energiewerte E_n eines Teilchens mit der Koordinate q (eindimensionale Bewegung) im Potential

a) eines harmonischen Oszillators

$$V(q) = \frac{1}{2}\, m\omega^2 q^2,$$

b) eines unendlich hohen „Kastens“

$$V(q) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 < q < L, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Bahnkurven in der q-p-Ebene (Phasenraum) bei gegebener Energie E. Das Integral $\oint \mathrm{d}q\, p$ ist per Definition die Fläche innerhalb dieser Bahnkurve.

Aufgabe 1.2 *Freier Propagator* (2 Punkte)

Zur Zeit $t = 0$ sei der Zustand eines eindimensionalen quantenmechanischen Systems durch die Wellenfunktion $\psi(x, t = 0)$ beschrieben. Zu einer beliebigen Zeit t entwickelt sich aus $\psi(x, 0)$ dann die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ gemäß

$$\psi(x,t) = \mathrm{i} \int \mathrm{d}x'\, G(x,t;x',0)\, \psi(x',0),$$

wobei $G(x, t; x', t')$ die sogenannte Greensche Funktion (= „Propagator“) der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung bezeichnet.

Die Spektraldarstellung des freien Wellenpaketes $\psi(x, t)$ (Teilchen mit Masse m) ist gegeben durch

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \tilde{\psi}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}, \qquad E(k) = \hbar\omega(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Bestimmen Sie Greensche Funktion $G_0(x, t; x', 0)$ für dessen Ausbreitung.

Hinweis: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-a(x+b)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(a) \geq 0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 1.3 *Fourier-Transformation* (3 Punkte)

Sei $f(x)$ eine quadratintegrable (komplexe) Funktion von $x \in \mathbb{R}$. Diese hängt mit ihrer Fourier-Transformierten $\tilde{f}(k)$ wie folgt zusammen:

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x), \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tilde{f}(k).$$

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{für} \quad |x| < a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Leiten Sie aus dem Ergebnis durch einen geeigneten Grenzübergang die Fourier-Transformierte der Delta-Funktion $\delta(x)$ her.

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax} & \text{für} \quad x > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $a > 0$. Durch einen geeigneten Grenzübergang lässt sich daraus die Fourier-Transformierte $\tilde{\theta}(k)$ der Theta-Funktion $\theta(x)$ bestimmen. Zeigen Sie, dass der naive Grenzübergang nicht zum korrekten Ergebnis für $\tilde{\theta}(k)$ führt.

c) Zeigen Sie allgemein für zwei quadratintegrable Funktionen $f(x)$ und $g(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, f(x)^* g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \, \tilde{f}(k)^* \tilde{g}(k).$$