Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker — Blatt 9

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS17 —

Aufgabe 9.1 *p-Norm* (3 Punkte + 1 Bonuspunkt)

Die p-Norm eines Vektors $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$ ist definiert durch:

$$\|\mathbf{a}\|_p \ = \ \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p}, \qquad 1 \le p \le \infty. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie folgende Monotonie-Eigenschaft für beliebige feste $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$,

$$\|\mathbf{a}\|_p \ \le \ \|\mathbf{a}\|_q \quad \text{für } p > q. \tag{2}$$

b) Veranschaulichen Sie für $n = 2$ die Hierarchie (2) durch Skizze der Punktmengen $\|\mathbf{a}\|_p = 1$ für verschiedene p, insbesondere für $p = 1, 2, \infty$.

c) Beweisen Sie die Hölder-Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \ \le \ \|\mathbf{a}\|_p \cdot \|\mathbf{b}\|_q, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{3}$$

wobei $\mathbf{b} = (b_k) \in \mathbb{C}^n$. Hierzu können Sie die Youngsche Ungleichung $AB \le \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$ für $A, B \ge 0$ heranziehen mit geeigneter Wahl von A, B.

d) Verdienen Sie sich einen Bonuspunkt für den Beweis der Youngschen Ungleichung.

Anmerkung: Mit der Hölder-Ungleichung lässt sich die Dreiecksungleichung beweisen, die als Axiom für jede Norm $\|.\|$ gefordert wird.

Aufgabe 9.2 *Dgl. 1. Ordnung und Lipschitz-Bedingung* (4 Punkte)

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' \ = \ f(x,y) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{für } x = y = 0, \\ \dfrac{4x^3 y}{y^2 + x^4} & \text{sonst,} \end{cases} \qquad x_0 = y(0) = 0, \tag{4}$$

mit dem Definitionsbereich $D = \{(x,y) \mid |x| \le a,\ |y| \le b\}$, $y, x \in \mathbb{R}$.

a) Ist f auf D stetig?

b) Erfüllt f auf D eine Lipschitz-Bedingung bezüglich y?

c) Geben Sie mindestens zwei Lösungen des Anfangswertproblems an.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.3 *Näherungslösung einer Dgl. 1. Ordnung* (3 Punkte)

Berechnen Sie für $x \in I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ eine explizit durch elementare Funktionen angebbare Näherungslösung für das Anfangswertproblem

$$y' = \sinh(yx^2), \qquad y(0) = 1, \tag{5}$$

so dass im ganzen Intervall I der relative Fehler der Lösung kleiner als 1% wird.

Hinweis: Satz über „Abstandskontrolle" verwenden!