Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker — Blatt 8

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS17 —

Aufgabe 8.1 *Kettenlinie* (3 Punkte)

Der Verlauf $y(x)$ einer „Kettenlinie“, die aus Massenpunkten der linearen Massendichte ρ besteht und der Erdbeschleunigung in $-y$-Richtung ausgesetzt ist, sei zwischen den Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) aufgehängt. Die Funktion y genügt dann der Differentialgleichung

$$y'' = k\sqrt{1+y'^2}, \tag{1}$$

wobei $k = \rho g/F_x > 0 =$ konstant ist und F_x die Zugkraft in x-Richtung bezeichnet.

a) Geben Sie die allgemeine Lösung für y' an.

b) Geben Sie die allgemeine Lösungen für y an. Welche Lösungen $y(x)$ genügen der Bedingung, dass der erste Aufhängepunkt im Ursprung liegt ($x_0 = y_0 = 0$)?

c) Der zweite Aufhängepunkt werde nun zu $(x_1, y_1) = (\ell, 0)$ gewählt. Welche Beziehung besteht zwischen k, ℓ und der Länge L der Kettenlinie? Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen den Parametern k, ℓ, L, insbesondere für $L \to \ell$.

Aufgabe 8.2 *Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung* (3 Punkte)

Wir betrachten Differentialgleichungen 1. Ordnung der Form

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right), \qquad a\beta - \alpha b \neq 0, \tag{2}$$

wobei f eine reelle, stetige Funktion ist.

a) Führen Sie eine Verschiebung des Koordinatensystems (x, y) durch, so dass die Dgl. in den neuen Koordinaten (ξ, η) wieder die Form (2) hat, aber mit entsprechenden Parametern $c = \gamma = 0$.

b) Lösen Sie die in a) für $\eta(\xi)$ erhaltene Dgl. durch eine geeignete Tansformation auf eine Dgl., die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann.

c) Lösen Sie die Dgl.

$$y' = \frac{y+2}{x+1} + \sqrt{\frac{y+2}{x+1}}. \tag{3}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 8.3 *Exakte Differentialgleichung und integrierender Faktor* (4 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$g(x,y) + h(x,y)\,y' \;=\; 0 \tag{4}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen g, h, die nicht „exakt“ sei, d. h. $h_x \neq g_y$.

a) Zeigen Sie, dass ein integrierender Faktor $\phi = \phi(x)$, d. h. wenn er nur von x abhängt, genau dann zielführend ist, wenn er folgende Gleichung erfüllt:

$$(\log\phi)' \;=\; \frac{g_y - h_x}{h}. \tag{5}$$

b) Formulieren Sie analog zu a) eine Bedingung dafür, dass ein integrierender Faktor $\phi = \phi(y)$ zielführend ist.

c) Lösen Sie die Dgl.

$$(2x^2 - 2xy^2 + 1)y \;+\; (x - 3y^2)y' \;=\; 0. \tag{6}$$

Dafür reicht es, eine Funktion $F(x,y)$ zu finden, so dass (6) äquivalent zu der impliziten Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ für $y(x)$ ist.