Aufgabe 7.1 *Trigonometrisches Integral mittels Residuenkalkül* (3 Punkte)

Berechnen Sie folgendes Integral mit Hilfe des Residuensatzes,

$$f(a) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - a\cos t}, \qquad a \in \mathbb{R},\ |a| < 1. \tag{1}$$

Setzen Sie die Funktion $f(a)$ analytisch in die komplexe a-Ebene maximal fort. Wo besitzt die Funktion $f(a)$ in der komplexen a-Ebene isolierte Singularitäten bzw. Verzweigungspunkte?

Aufgabe 7.2 *Wesentliche Singularität* (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ in jeder Kreisscheibe $D_\epsilon(0)$, $\epsilon > 0$, jeden Wert $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ unendlich oft annimmt.

Aufgabe 7.3 *Abschätzung für Laurent-Koeffizienten* (2 Punkte)

Die Funktion f sei holomorph auf dem Kreisring $K_{R_1,R_2}(z_0)$ und stetig auf $\overline{K_{R_1,R_2}(z_0)}$. Für $z \in \overline{K_{R_1,R_2}(z_0)}$ gelte ferner $|f(z)| < M$. Beweisen Sie folgende Abschätzungen für die Koeffizienten a_k der Laurent-Reihe $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$,

$$\text{a)} \quad |a_k| \leq \frac{M}{R_2^k}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$
$$\text{b)} \quad |a_{-k}| \leq M\, R_1^k, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Aufgabe 7.4 *Dispersionsintegral* (3 Punkte)

Gesucht wird die für $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ holomorphe Funktion $f(z)$, deren Realteil auf der reellen Achse gegeben ist durch

$$\mathrm{Re}\{f(x)\} = \frac{1}{x^2 + a^2}, \qquad x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a > 0. \tag{2}$$

Berechnen Sie dazu zunächst $\mathrm{Im}(x)$ für reelle x mittels Kramers-Kronig-Relationen und setzen Sie anschließend f zu komplexen Argumenten z fort. Wie ist der maximale Definitionsbereich von f, und welche Singularitäten besitzt f?