Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker — Blatt 6

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS17 —

Aufgabe 6.1 *Polylogarithmen* (4 Punkte)

Die klassischen Polylogarithmen Li_n sind rekursiv wie folgt definiert:

$$\mathrm{Li}_0(z) \;=\; \frac{z}{1-z}, \qquad \mathrm{Li}_{n+1}(z) \;=\; \int_0^z \frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{Li}_n(t), \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1}$$

Die Integrale seien jeweils auf geraden Linien von 0 nach z auszuführen.

a) Leiten Sie explizit Potenzreihendarstellungen für $\mathrm{Li}_n(z)$ um $z_0 = 0$ her und geben Sie die entsprechenden Konvergenzradien R_n an.

b) Berechnen Sie $\mathrm{Li}_1(z)$. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von Li_1 sowie eine Definition Riemannscher Blätter an, die Verzweigungsschnitte höchstens für Intervalle in $\mathbb{R}_0^+$ haben.

c) Der Verzweigungsschnitt aus b) werde nun für den Dilogarithmus übernommen, der auf dem Hauptblatt mit Li_2 bezeichnet wird. Wie stehen die Funktionen Li_2 und $\mathrm{Li}_2^{(1)}$ miteinander in Beziehung, wenn $\mathrm{Li}_2^{(1)}$ den Dilogarithmus auf dem 1. Riemannschen Nebenblatt darstellt, auf das man gelangt, wenn man vom Hauptblatt aus den Punkt $z_0 = 1$ entgegen dem Uhrzeigersinn umrundet?

d) Gibt es weitere Verzweigungsschnitte auf $\mathrm{Li}_2^{(1)}$? Geben Sie Auswertungsvorschriften auf allen Riemannschen Bättern an.

Aufgabe 6.2 *Laurent-Entwicklung* (3 Punkte)

Geben Sie Laurent-Reihen für die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ an, die in folgenden Kreisringen konvergieren:

a) $|z| < 1$,

b) $1 < |z| < 2$,

c) $2 < |z|$.

Bitte wenden!

Aufgabe 6.3 *Komplexes Gaußsches Integral und Fresnel-Integrale* (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(a) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ax^2}, \qquad a \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(a) > 0. \tag{2}$$

a) Setzen Sie $f(a)$ aus Aufgabe 5.2b) maximal in die komplexe a-Ebene fort. Welche isolierte Singularitäten bzw. Verzweigungspunkte ergeben sich?

b) Verallgemeinern Sie den Beweis von Aufgabe 5.2a) für den Fall $\mathrm{Re}\, a = 0$, $a \neq 0$, d. h. zeigen Sie, dass

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_2} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ax^2} = 0 \qquad \text{für} \qquad a = |a|\mathrm{e}^{i\alpha},\ \alpha = \pm\frac{\pi}{2},\ |a| \neq 0, \tag{3}$$

mit dem Integrationsweg γ_2 aus Aufgabe 5.2.

c) Berechnen Sie die (z. B. in der Quantenmechanik und Optik auftretenden) „Fresnel-Integrale“

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \cos x^2, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \sin x^2 \tag{4}$$

durch eine geeignete Wahl von a.