Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker — Blatt 5

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS17 —

Aufgabe 5.1 *Geschlossene Kurvenintegrale* (3 Punkte)

a) Berechnen Sie $\oint\limits_{K_1(0)} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$.

b) Berechnen Sie $\oint\limits_{K_1(0)} \mathrm{d}z\, z^n \bar{z}^m, \qquad n, m \in \mathbb{Z}$.

c) Zeigen Sie

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{K_r(0)} \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} \;=\; \frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}, \tag{1}$$

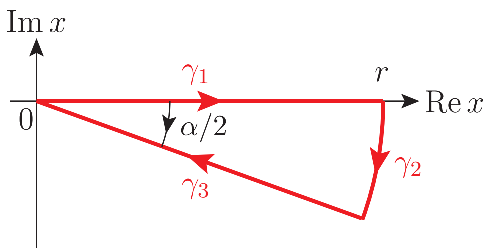
für $z_1 \neq z_2$, wobei f im Gebiet G holomorph ist und $\overline{K_r(0)} \subset G$ mit $r > |z_1|, |z_2|$.

Aufgabe 5.2 *Komplexes Gaußsches Integral* (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f(a) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ax^2}, \qquad a \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(a) > 0, \quad \text{d. h. } a = |a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},\ |\alpha| < \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Betrachten Sie folgenden Integrationsweg $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, um das Integral auszuwerten:



a) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\gamma_2} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ax^2} \;=\; 0. \tag{3}$$

b) Führen Sie $f(a)$ mittels Cauchyschem Integralsatz, d. h.

$$\int\limits_{\gamma} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ax^2} \;=\; 0, \tag{4}$$

auf das bekannte reelle Ergebnis für $f(|a|)$ zurück.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.3 *Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip* (3 Punkte)

Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine auf dem Gebiet G holomorphe Funktion, $z_0 \in G$ und d der Abstand von z_0 zu ∂G.

a) Beweisen Sie folgende Identität

$$f(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}), \qquad \text{mit} \qquad 0 < r < d. \tag{5}$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass das Maximum von $|f(z)|$ mit $z \in \overline{K_r(z_0)}$ mit $r < d$ stets auf dem Rand der Kreisscheibe angenommen wird, d. h. für ein $z \in K_r(z_0)$.

c) Wie übertragen sich die Aussagen von a) und b) auf reelle harmonische Funktionen $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\triangle\Phi = 0$?