Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker — Blatt 4
— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS17 —

Aufgabe 4.1 *Joukowski-Funktion* (4 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Im Folgenden untersuchen wir die Joukowski-Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, wobei

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \qquad (1)$$

und verwenden diese, um ein interessantes Strömungsproblem zu lösen.

a) Auf welche Bereiche bildet f den Einheitskreis sowie dessen Inneres und dessen Äußeres ab? Welche Fixpunkte hat f?

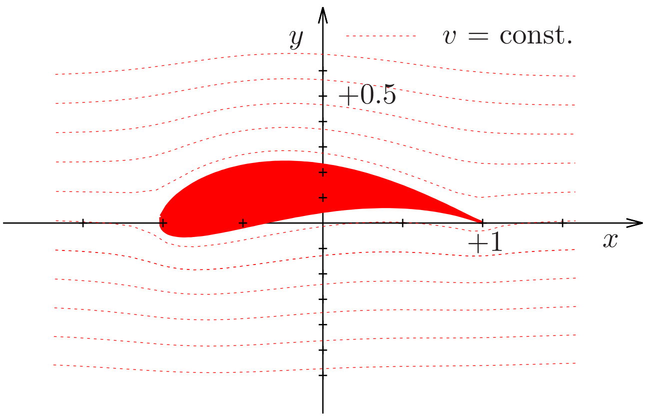
b) Formulieren Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(w)$ von $w = f(z)$ auf allen möglichen Riemannschen Blättern und beschreiben Sie die Bildmengen $f^{-1}(\mathbb{C})$. Betrachtet Sie dazu die Strecken $w = x \pm \mathrm{i}\epsilon$ mit $|x| \leq 1$ und kleinem $\epsilon > 0$. Die Riemannschen Blätter sollen so gewählt werden, dass die auftretende Wurzel als $\pm\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\,w)\sqrt{1-w^2}$ ausgewertet wird mit dem üblichen Hauptzweig der Wurzelfunktion.

c) Auf welche Kurve α wird ein Kreis $K_r(z_0)$ um z_0 abgebildet, der durch den Punkt $z = 1$ läuft, den Punkt $z = -1$ in seinem Innern enthält und dessen Mittelpunkt in der Nähe von $z = 0$ liegt (d. h. $|z_0|$ „hinreichend klein“)? Wie wurde z_0 in der Figur unten gewählt?

Hinweis: Der Einsatz eines Plot-Programmes ist legitim und ratsam.

d) Sei g die Funktion $g(z) = (z - z_0)/|1 - z_0|$, die den Kreis $K_r(z_0)$ aus c) auf den Einheitskreis abbildet. Wie kann man aus den Funktionen f, f^{-1}, g und g^{-1} eine harmonische Funktion $v(x, y)$ konstruieren, die auf der Kontur α konstant ist, d. h. $v\big|_\alpha = \text{const.}$?

e) Verdienen Sie sich 2 Bonuspunkte, indem Sie Figuren für verschiedene Strömungsprofile (d. h. für verschiedene z_0) inklusive Stromlinien $v(x, y) = \text{const.}$ mit $v(x, y)$ aus d) wie unten mit einem geeigneten Plot-Programm zeichnen.



(Tipp: Besuchen Sie einmal folgende Web-Seite der NASA:
`http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/map.html`) *Bitte wenden!*

Aufgabe 4.2 *Komplexe Integrale* (2 Punkte)

Berechnen Sie folgende komplexen Kurvenintegrale direkt (d. h. ohne den Cauchyschen Integralsatz). Hier bezeichnet $\sigma(a,b)$ die gerichtete Strecke von a nach b.

a) $\displaystyle\int_\alpha \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^z$, wobei $\alpha = \sigma(0,1) \cup \sigma(1, 1+\mathrm{i})$,

b) $\displaystyle\int_\alpha \mathrm{d}z\, |z|$ und $\displaystyle\int_\beta \mathrm{d}z\, |z|$, wobei $\beta = \sigma(0, 1+\mathrm{i})$ und α aus a),

c) $\displaystyle\int_{K_r(0)} \mathrm{d}z\, \log(z)$.

Aufgabe 4.3 *Dilogarithmus* (4 Punkte)

Der Dilogarithmus Li_2 ist definiert durch

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\mathrm{d}t}{t} \log(1-t), \qquad z \in \mathbb{C}\backslash[1,\infty). \tag{2}$$

a) Beweisen Sie folgende Identitäten (für alle z, in denen die Funktionen definiert sind):

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2(-z) = \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(z^2), \tag{3}$$

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2(1-z) = \mathrm{Li}_2(1) - \log(z)\log(1-z). \tag{4}$$

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) = 2\mathrm{Li}_2(-1) - \frac{1}{2}\log^2(-z), \tag{5}$$

b) Berechnen Sie $\mathrm{Li}_2(1)$, $\mathrm{Li}_2(-1)$ und $\mathrm{Li}_2(\frac{1}{2})$ aus obigen Relationen durch Einsetzen geeigneter z-Werte.

c) Berechnen Sie die Diskontinuität von $\mathrm{Li}_2(z)$ entlang der reellen Achse, d. h.

$$\mathrm{Disc}(\mathrm{Li}_2)(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\mathrm{Li}_2(x + \mathrm{i}\epsilon) - \mathrm{Li}_2(x - \mathrm{i}\epsilon)\right], \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

wobei $\epsilon > 0$ und reell.