Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker — Blatt 3

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS17 —

Aufgabe 3.1 *Regel von de l'Hôspital* (4 Punkte)

a) Die Funktionen f und g seien im Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph, wobei $f(z_0) = g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$. Beweisen Sie, dass

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}. \tag{1}$$

b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte: $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{z^2}-1}{\sin z}$, $\lim\limits_{z\to \pi} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}+1}$.

c) Formulieren und beweisen Sie einen zu a) analogen Satz für den Fall $z_0 = \infty$.

d) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{z\to\infty} z \log\left(\frac{z+1}{z}\right), \qquad \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z. \tag{2}$$

Aufgabe 3.2 *Mittelwertsatz* (2 Punkte)

Betrachten Sie die Ableitung f' der Funktion $f(z) = z^3$ und untersuchen Sie, ob für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1} = f'(z) \tag{3}$$

stets für ein z erfüllt werden kann, das auf der Verbindungslinie zwischen z_1 und z_2 liegt. Vergleichen Sie die Fälle reeller und komplexer z_1 und z_2 und stellen Sie den Bezug zum Mittelwertsatz der reellen Analysis her.

Aufgabe 3.3 *Logarithmus* (2 Punkte)

Wir betrachten den Hauptzweig der komplexen Logarithmusfunktion $\log(z)$ mit $-\pi < \arg(z) \leq \pi$.

a) Zeigen Sie, dass für zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \neq 0$ im Allgemeinen $\log(z_1 z_2)$ und $\log z_1 + \log z_2$ nicht gleich sind. Welche Werte kann die folgende η-Funktion annehmen?

$$\eta(z_1, z_2) = \log(z_1 z_2) - \log z_1 - \log z_2. \tag{4}$$

b) Zeigen Sie folgende Identitäten:

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2, \quad \text{falls} \quad \mathrm{Im}(z_1)\cdot\mathrm{Im}(z_2) < 0, \tag{5}$$

$$\log(1/z) = -\log(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash[0, -\infty]. \tag{6}$$

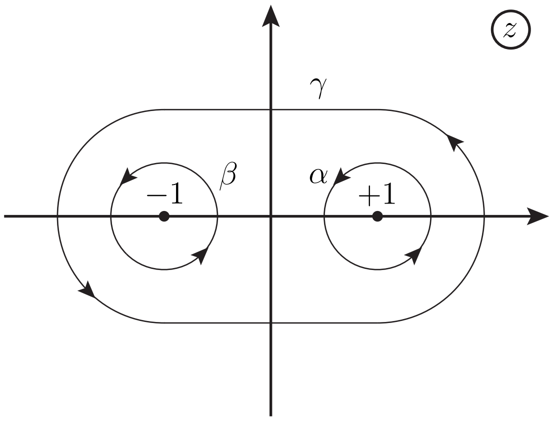
Bitte wenden!

Aufgabe 3.4 *Wurzelfunktion* (2 Punkte)

Gegeben sei die Wurzelfunktion $f(z) = \sqrt{z}$, die als Funktion von $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \in \mathbb{C}$ mit $r > 0$ und $-\pi < \phi \leq \pi$ auf den beiden Riemannschen Blättern wie folgt ausgewertet wird:

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad f(z) &= +\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}, \\ \text{II:} \quad f(z) &= -\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}. \end{aligned} \tag{7}$$

a) Konstruieren Sie die Riemannschen Blätter sowie die Riemannsche Fläche für die Funktion $f_1(z) = f(1-z) + f(1+z)$. Wieviele Bätter gibt es? Geben Sie an, wie f_1 auf den Blättern ausgewertet wird. Welche der in den Graphen unten dargestellten Riemannschen Flächen gehört zur Funktion f_1? Ordnen Sie die Auswertungsvorschriften auf eine mögliche Weise den Blättern im Graphen zu. Beschreiben Sie den Übergang zwischen den Blättern beim Durchlaufen der Wege α, β, γ. Welche dieser Wege sind auf der Riemannschen Fäche geschlossen?



b) Diskutieren Sie analog zu a) die Funktion $f_2(z) = f(1-z) \cdot f(1+z) = \sqrt{1-z^2}$.