Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker — Blatt 2
— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS17 —

Aufgabe 2.1 *Holomorphe Funktionen* (3 Punkte)

Ergänzen Sie die Teilinformation über die Funktionen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ der komplexen Variablen $z = x + iy$ derart, dass f für alle $z \in \mathbb{C}$ holomorph ist $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$. Sind die Fortsetzungen der Funktionen eindeutig?

a) $u(x,y) = x^2 - 2xy - y^2$,

b) $u(x,0) = e^{-x}\sin(ax+b), \qquad a, b \in \mathbb{R}$,

c) $u(x,y) = \phi(x)$. Welche Funktionen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind hier möglich?

Aufgabe 2.2 *Möbius-Transformation* (5 Punkte)

Eine Möbius-Transformation $T : \overline{\mathbb{C}} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$ ist definiert durch

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die Gesamtheit der Möbius-Transformationen eine Gruppe bildet.

b) Bestimmen Sie die Fixpunkte von T in Abhängigkeit von a, b, c, d, d. h. alle $z \in \mathbb{C}$, für die $T(z) = z$ gilt.

c) Geben Sie explizit eine Form von T an, die die Punkte $\{z_1, z_2, z_3\}$ auf $\{0, 1, \infty\}$ abbildet.

d) Zeigen Sie, dass jede Möbius-Transformation eindeutig durch die Abbildung dreier Punkte festgelegt werden kann, d. h. durch Vorgabe von $\{z_1, z_2, z_3\}$ und $\{w_1, w_2, w_3\}$, so dass $w_k = T(z_k)$. Welchen Einschränkungen unterliegen die z_k bzw. w_k?

e) Beweisen Sie, dass alle T Kreise und Geraden wieder auf Kreise oder Geraden abbilden.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.3 *Einfache Abbildungen* (2 Punkte)

Betrachten Sie folgende Punktmengen

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\}, \qquad M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}. \tag{2}$$

a) Wie sehen die Bildmengen $f(M_1)$ und $f(M_2)$ in $\mathbb{C}$ aus für die Abbildung $f(z) = \frac{1}{z} + 1$?

b) Finden Sie eine Funktion f, für die „im Wesentlichen" $M_2 = f(M_1)$ gilt, d. h. die Relation zwischen den Mengen M_2 und $f(M_1)$ soll mit der möglichen Ausnahme endlich vieler Punkte gelten.