Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker — Blatt 10

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS17 —

Aufgabe 10.1 *Fadenpendel* (4 Punkte)

Die Winkelauslenkung $\phi(t)$ eines Fadenpendels der Länge l, das der Erdbeschleunigung g ausgesetzt ist, genügt der Differentialgleichung

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \sin\phi = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{1}$$

Die Anfangsbedingung von $\phi(t)$ ist bei $t = 0$ gegeben durch $\phi(0) = \alpha$, $\dot{\phi}(0) = 0$, d. h. α ist der Winkel größten Ausschlages.

a) Integrieren Sie die Differentialgleichung für $\ddot{\phi}$ und leiten Sie aus der für $\dot{\phi}$ erhaltenen Differentialgleichung eine Integralformel für die Schwingungsdauer $T(\alpha)$ ab (ohne die Näherung kleiner Auslenkungen zu verwenden). Berechnen Sie die erste nicht triviale Korrektur zum Limes $T(0) = 2\pi/\omega$ kleiner Auslenkungen $|\alpha| \ll 1$.

   Hinweis: Finden Sie eine Darstellung, in der der Integrand nur über $\sin\frac{\phi}{2}$ von ϕ abhängt, und führen Sie dann die Substitution $\sin\frac{\phi}{2} = z\sin\gamma$ mit $z = \sin\frac{\alpha}{2}$ durch.

b) Stellen Sie zur Differentialgleichung 2. Ordnung für $\ddot{\phi}$ das äquivalente Dgl.-System 1. Ordnung auf und berechnen Sie daraus die erste nicht triviale Näherung für $\phi(t)$, die über die für kleine α gültige Näherung $\phi_0(t) = \alpha\cos(\omega t)$ hinausgeht. Setzen Sie dazu $\phi_0(t)$ als Startfunktion in die Picard-Iteration ein.

Aufgabe 10.2 *Matrixnorm* (3 Punkte)

Die durch die p-Norm im $\mathbb{C}^n$ als Operatornorm abgeleitete Matrixnorm einer komplexen $n \times n$-Matrix A ist definiert durch

$$\|A\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|A\mathbf{x}\|_p. \tag{2}$$

Zeigen Sie

a) $\|A\|_1 = \max\limits_{l=1,\dots,n} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{kl}|,$ (Spaltensummennorm)

b) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\dagger A)},$ (Spektralnorm)

c) $\|A\|_\infty = \max\limits_{k=1,\dots,n} \sum\limits_{l=1}^{n} |a_{kl}|,$ (Zeilensummennorm)

wobei $\lambda_{\max}(A^\dagger A)$ der größte Eigenwert der Matrix $A^\dagger A$ ist ($A^\dagger$ ist die zu A adjungierte Matrix).

Bitte wenden!

Aufgabe 10.3 *Lineares Differentialgleichungssystem* (3 Punkte)

Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= (3x-1)y_1 + (x-1)y_2 + x\mathrm{e}^{x^2}, \\ y_2' &= -(x+2)y_1 + (x-2)y_2 - \mathrm{e}^{x^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems mit Hilfe des Ansatzes $\mathbf{y}(x) = (u(x), -u(x))^{\mathrm{T}}$.

b) Bestimmen Sie eine zweite Lösung des homogenen Systems, die von derjenigen aus a) linear unabhängig ist.

c) Finden Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, und geben Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems an.