Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker — Blatt 1

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS17 —

Aufgabe 1.1 *Punktmengen in $\mathbb{C}$* (3 Punkte)

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die folgende Ungleichungen erfüllen:

a) $|z-1| \leq |z+1|$,

b) $|z-1| \leq 2|z-2|$,

c) $\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{z-b}\right) > 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.2 *Kreise und Geraden in der Gaußschen Zahlenebene* (4 Punkte)

Wir betrachten Punktmengen der Form

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z\bar{z} + \bar{\beta} z + \beta \bar{z} + \gamma = 0,\ \alpha, \gamma \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{C}\}. \tag{1}$$

a) Beweisen Sie, dass die Punkte von $M \subset \mathbb{C}$ auf einem Kreis oder auf einer Geraden (=Kreis durch den Punkt ∞) liegen. Für welche Werte von α, β, γ liegt eine Gerade vor, für welche ein Kreis?

b) Zeigen Sie umgekehrt, dass sich jede Gerade sowie jeder Kreis in der komplexen Ebene durch eine derartige Menge M darstellen lässt.

c) Geben Sie Mittelpunkt und Radius der beschriebenen Kreise in Abhängigkeit von α, β, γ an.

d) Geben Sie die Schnittpunkte der beschriebenen Geraden mit der reellen bzw. imaginären Achse der komplexen Ebene an, sowie den Abstand der Gerade vom Nullpunkt.

Bitte wenden!

Aufgabe 1.3 *Chordale Metrik auf* $\overline{\mathbb{C}}$ (3 Punkte)

Gegeben ist die Abbildung $\vec{P} : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{P}(a) = \frac{1}{1+|a|^2} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a \\ \operatorname{Im} a \\ |a|^2 \end{pmatrix}, \qquad a \in \overline{\mathbb{C}}. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass die Punkte $\vec{P}(a)$ auf der Oberfläche einer Kugel in $\mathbb{R}^3$ liegen. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieser Kugel.

b) Zeigen Sie, dass der euklidische Abstand zweier Punkte $\vec{P}(a)$ und $\vec{P}(b)$ gegeben ist durch

$$\chi(a,b) = \frac{|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}}. \tag{3}$$

Berechnen Sie $\chi(a,\infty)$ und $\chi(\infty,\infty)$ als Grenzwerte der Funktion χ.

c) Zeigen Sie, dass χ eine Metrik auf $\overline{\mathbb{C}}$ definiert, d. h. $\forall a,b,c \in \overline{\mathbb{C}}$ gilt:

$$\chi(a,b) \geq 0 \quad \text{und} \quad \chi(a,b) = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b, \tag{4}$$

$$\chi(a,b) = \chi(b,a), \tag{5}$$

$$\chi(a,b) \leq \chi(a,c) + \chi(c,b). \tag{6}$$

d) Zeigen Sie $\chi(a,b) \leq 1$. Für welche Punkte b gilt $\chi(a,b) = 1$ bei fest vorgegebenem a?

Anmerkung: $\chi(a,b)$ wird durch die stereographische Projektion der Riemannschen Zahlenkugel auf die Gaußsche Zahlenebene motiviert. Der Berührpunkt im Nullpunkt der komplexen Ebene definiert den Südpol S auf der Kugel, der Nordpol N liegt diametral auf der Kugel gegenüber. Die stereographische Projektion ordnet jedem Punkt $A \neq N$ auf der Kugel einen Punkt $a \in \mathbb{C}$ zu, der sich aus dem Schnittpunkt der Geraden ergibt, die durch A und N läuft; der Nordpol der Kugel wird dem Punkt ∞ zugeordnet.