

# Höhere Mathematik für Physiker

(Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen)

Prof. Dr. Stefan Dittmaier

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Physikalisches Institut  
D-79104 Freiburg, Germany

Sommersemester 2017

**Draft:** 26. Juli 2017

„Im großen Buch der Natur kann nur der lesen, der die Sprache kennt, in welcher dieses Buch geschrieben ist, und diese Sprache ist die Mathematik.“

*Galileo Galilei*

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Funktionentheorie</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>7</b>
1.1	Algebraische Definition und Eigenschaften . . . . .	7
1.2	Topologische Eigenschaften . . . . .	11
1.3	Unendliche Reihen . . . . .	15
1.4	Elementare Funktionen . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Holomorphe Funktionen</b>	<b>21</b>
2.1	Stetigkeit und Grenzwert . . . . .	21
2.2	Komplexe Differenzierbarkeit . . . . .	23
2.3	Eigenschaften holomorpher Funktionen . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Komplexe Integration</b>	<b>39</b>
3.1	Komplexe Kurvenintegrale . . . . .	39
3.2	Cauchyscher Integralsatz . . . . .	42
3.3	Cauchysche Integralformeln . . . . .	48
3.4	Ganze Funktionen und Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Potenzreihen und analytische Funktionen</b>	<b>53</b>
4.1	Funktionenreihen . . . . .	53
4.2	Potenzreihen . . . . .	56
4.3	Taylor-Reihen . . . . .	59
4.4	Identitätssatz und analytische Fortsetzung . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Laurent-Reihen und Residuensatz</b>	<b>65</b>
5.1	Laurent-Reihen . . . . .	65
5.2	Isolierte Singularitäten . . . . .	69
5.3	Residuensatz . . . . .	72
5.4	Cauchyscher Hauptwert . . . . .	76

<b>II</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>79</b>
<b>6</b>	<b>Grundbegriffe und elementare Methoden</b>	<b>81</b>
6.1	Grundbegriffe . . . . .	81
6.2	Elementare Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	83
<b>7</b>	<b>Anfangswertprobleme</b>	<b>89</b>
7.1	Banach-Raum und Fixpunktsatz . . . . .	89
7.2	Existenz- und Eindeigkeitssätze für Dglen. 1. Ordnung . . . . .	94
7.3	Systeme von Differentialgleichungen . . . . .	101
7.4	Differentialgleichungen n. Ordnung . . . . .	103
<b>8</b>	<b>Lineare Differentialgleichungen</b>	<b>105</b>
8.1	Lineare Dgl.-Systeme . . . . .	105
8.2	Lineare Dgl.-Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	112
8.3	Lineare Dglen. n. Ordnung . . . . .	117
8.4	Lineare Dglen. n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	121
<b>9</b>	<b>Lineare Differentialgleichungen im Komplexen</b>	<b>123</b>
9.1	Dgl.-Systeme 1. Ordnung . . . . .	123
9.2	Differentialgleichung 2. Ordnung . . . . .	129
<b>10</b>	<b>Randwertaufgaben für lineare Dglen.</b>	<b>133</b>
10.1	Sturm-Liouville-Problem . . . . .	133
10.2	Vollständige Orthogonalsysteme . . . . .	141
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>145</b>

**Teil I**

**Funktionentheorie**



# Kapitel 1

## Komplexe Zahlen

### 1.1 Algebraische Definition und Eigenschaften

#### Erinnerung an Zahlenmengen:

Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ :	+ und $\times$ Operationen, aber keine inverse Operationen dazu
$\downarrow$	Hinzunahme negativer Zahlen sowie 0
Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ :	+ Operation mit Inversion, $\times$ Operation ohne Inversion
$\downarrow$	Hinzunahme multiplikativer inverser Elemente ( $\neq 0$ )
Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}   a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ :	+ und $\times$ Operationen mit Inversion, d.h. $\mathbb{Q}$ ist ein „Körper“, aber „unvollständig“ (Cauchy-Folgen ohne Grenzwerte)
$\downarrow$	Hinzunahme aller Grenzwerte (Klassen äquivalente Cauchy-Folgen)
Reelle Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irrationale Zahlen}\}$	Vollständiger Körper, aber keine „algebraische Abgeschlossenheit“ (nicht alle Polynome in Linearfaktoren zerlegbar)
$\downarrow$	Algebraische Erweiterung von $\mathbb{R}$ um Lösung von $x^2 = -1$
Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$	Algebraisch abgeschlossener, vollständiger Körper

**Definition 1.1** („Komplexe Zahlen“)

- a) Eine „komplexe Zahl“  $z$  ist ein geordnetes Zahlenpaar  $z = (x, y)$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ , wobei  $x = \operatorname{Re}(z) =$  „Realteil“ von  $z$  und  $y = \operatorname{Im}(z) =$  „Imaginärteil“ von  $z$ .

Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen  $z_1 = (x_1, y_1)$  und  $z_2 = (x_2, y_2)$ :

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.1)$$

- b)  $\mathbb{C} :=$  Menge aller komplexen Zahlen.

- c) Einbettung der reellen Zahlen  $r \in \mathbb{R}$ :

$$r = (r, 0) \quad \Rightarrow \quad rz = (rx, ry). \quad (1.2)$$

- d) Kurzschreibweise:

$$i := (0, 1) \quad \Rightarrow \quad z = (x, y) = x + iy. \quad (1.3)$$

- e) „Komplex konjugiertes Element“  $\bar{z}$  zu  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ :

$$\bar{z} := (x, -y) = x - iy. \quad (1.4)$$

- f) „Betrag“ einer komplexen Zahl:

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.5)$$

- g) „Polardarstellung“ einer komplexen Zahl:

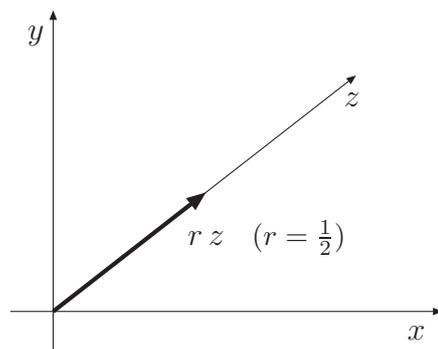
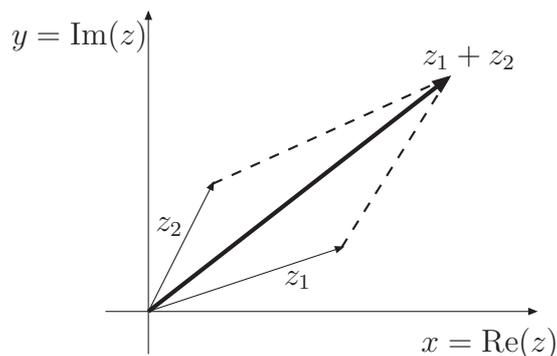
$$z = (r \cos \phi, r \sin \phi), \quad \phi \in (-\pi, +\pi], \quad (1.6)$$

wobei  $r = |z|$ ,  $\phi =: \arg(z) =$  „Argument“ von  $z$ .

Für  $r \neq 0$  und  $|\phi| < \pi/2$  gilt  $\phi = \arctan(y/x)$ .

**Geometrische Veranschaulichung:**

- $\mathbb{C}$  bildet einen 2-dim. reellen Vektorraum  $V$  (isomorph zu  $\mathbb{R}^2$ ):  
 Vektoraddition in  $V =$  Addition in  $\mathbb{C}$ ,  
 Multiplikation mit Skalaren in  $V =$  Multiplikation mit reellen Zahlen,  
 $|z_1 - z_2| =$  Euklidischer Abstand von  $z_1$  und  $z_2$ .  
 $\leftrightarrow$  Veranschaulichung in  $(x, y)$ -Ebene (= „Gaußsche Zahlenebene“):



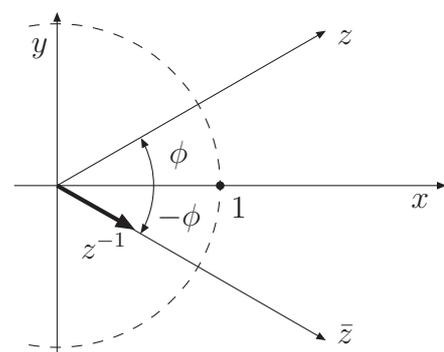
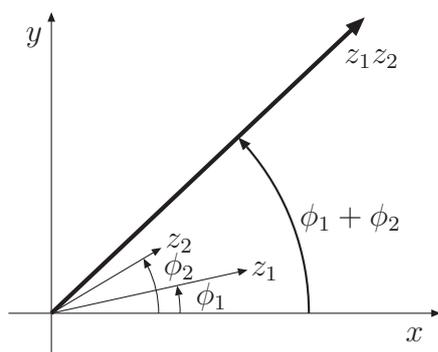
- Multiplikation komplexer Zahlen (geht über Vektorraumstruktur hinaus!):

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1 \cos \phi_1, r_1 \sin \phi_1)(r_2 \cos \phi_2, r_2 \sin \phi_2) \\ &= (r_1 r_2 \cos(\phi_1 + \phi_2), r_1 r_2 \sin(\phi_1 + \phi_2)), \end{aligned} \quad (1.7)$$

d.h. Beträge von  $z_1, z_2$  multiplizieren sich, Argumente von  $z_1, z_2$  addieren sich.

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \left( \frac{1}{r} \cos(-\phi), \frac{1}{r} \sin(-\phi) \right) = \left( \frac{1}{r} \cos \phi, -\frac{1}{r} \sin \phi \right) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \quad (1.8)$$

$\leftrightarrow$  Veranschaulichung in  $(x, y)$ -Ebene:



**Satz 1.1** (Rechenregeln in  $\mathbb{C}$ )Für komplexe Zahlen  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\bar{z}} = z, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad (1.10)$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad (1.11)$$

$$|z| \geq 0 \quad \text{sowie} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, \quad (1.12)$$

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|. \quad (1.13)$$

**Beweis:**

(1.9)–(1.12) durch einfaches Nachrechnen;

(1.13) = Dreiecksungleichung im Vektorraum. q.e.d.**Anmerkung: „Anordnung“ versus „Bewertung“**

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  sind „angeordnet“, d.h. für  $a, b$  gilt  $a = b, a < b$  oder  $a > b$ ; außerdem folgt aus  $a < b$  und  $b < c$  die Relation  $a < c$ .  
Für die Körper  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  gilt ferner:  
 $a < b \Rightarrow a + c < b + c$  sowie  $a, b > 0 \Rightarrow ab > 0$ .
- $\mathbb{C}$  ist nicht angeordnet;  $|z|$  liefert aber immerhin eine „Bewertung“ einer komplexen Zahl  $z$ . (Details siehe z.B. [2].)

**Anwendung: n-te komplexe Wurzeln**

- Ausgangspunkt: Formel von Moivre

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.14)$$

Beweis: Anwendung von (1.7) auf  $z = \cos \phi + i \sin \phi$  sowie Induktion in  $n$ .

- Folgerung: Die  $n$ -ten Einheitswurzeln  $\zeta_n^0 = 1, \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-1}$  mit

$$\zeta_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.15)$$

lösen die Gleichung  $z^n = 1$ . Es gibt keine weiteren Lösungen (Beweis als Übung).Die Zahlen  $\zeta_n^k$  ( $k \in \mathbb{N}_0$ ) liegen auf dem Einheitskreis der  $(x, y)$ -Ebene und spannen ein gleichseitiges  $n$ -Eck auf.

- Verallgemeinerung: Es gibt genau  $n$  verschiedene Lösungen  $z_k$  der Gleichung  $z^n = a$ ,

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) \right] \zeta_n^k, \quad \alpha = \arg(a), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (1.16)$$

Beachte:  $\sqrt[n]{|a|} \in \mathbb{R}_0^+$  per Definition.

Beweis als Übung.

## 1.2 Topologische Eigenschaften

Topologisch gesehen sind die Punktfolgen  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{R}^2$  äquivalent.

⇒ Vollständige Übertragung von Definitionen und Aussagen aus der reellen Analysis!

(Details und Beweise siehe reelle Analysis oder beispielsweise [6].)

### Wiederholung wichtiger Begriffe und Aussagen:

- „Offene“, „abgeschlossene“ und „kompakte“ Mengen:

Eine Menge  $U \subset \mathbb{C}$  heißt „offen“, falls es zu jedem  $z \in U$  ein reelles  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $D_\epsilon(z) \subset U$ , wobei

$$D_\epsilon(z) = \{z' \in \mathbb{C} \mid |z' - z| < \epsilon\} \quad (1.17)$$

die offene Kreisscheibe um  $z$  mit Radius  $\epsilon$  bezeichnet.

Eine Menge  $U \subset \mathbb{C}$  heißt „Umgebung“ von  $z \in \mathbb{C}$ , falls es ein  $D_\epsilon(z) \subset U$  gibt.

Eine Menge  $U \subset \mathbb{C}$  heißt „abgeschlossen“, falls ihr Komplement  $\mathbb{C} \setminus U$  offen ist.

Eigenschaften:

- Die leere Menge  $\emptyset$  und  $\mathbb{C}$  sind zugleich offen und abgeschlossen.
- Endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.
- Endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Eine Menge  $U \subset \mathbb{C}$  heißt „kompakt“, falls jede offene Überdeckung von  $U$  eine endliche Teilüberdeckung enthält.

- $\mathbb{C}$  als „metrischer Raum“:

Der Abstand  $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$  für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  definiert eine „Metrik“, da

- $d(z_1, z_2) \geq 0 \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , sowie  $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ ;
- $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1) \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ;
- $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2) \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ .

Als „metrischer Raum“ ist  $\mathbb{C}$  automatisch ein „topologischer Raum“ (d.h. besitzt ein System offener Mengen), der „Hausdorffsch“ ist (d.h. zu zwei Punkten  $z_1, z_2$  existieren Umgebungen  $U_1, U_2$  mit  $z_1 \in U_1, z_2 \in U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ).

- „Häufungspunkt“, „isolierte Punkte“ und „diskrete Mengen“:

Ein Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  heißt „Häufungspunkt“ von  $M$ , falls  $D_\epsilon(z_0)$  für beliebiges  $\epsilon > 0$  einen Punkt  $z \in M$  mit  $z \neq z_0$  enthält.

Ein Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  heißt „isolierter Punkt“ von  $M$ , falls es ein  $D_\epsilon(z_0)$  gibt mit  $M \cap D_\epsilon(z_0) = \{z_0\}$ .

Eine Menge  $U \subset \mathbb{C}$  heißt „diskret“, wenn sie abgeschlossen ist und nur aus isolierten Punkten besteht.

- „Grenzwert“ und „Konvergenz“:

Eine Folge  $(z_n) = (z_1, z_2, \dots)$  von Punkten  $z_n \in \mathbb{C}$  konvergiert genau dann gegen einen „Grenzwert“  $z_0 \in \mathbb{C}$ , d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ , falls es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $z_n \in D_\epsilon(z_0) \forall n > n_0$ .

Die Folge  $(z_n)$  konvergiert genau dann gegen  $z_0$ , falls die Folgen  $(\operatorname{Re}(z_n))$  und  $(\operatorname{Im}(z_n))$  gegen  $\operatorname{Re}(z_0)$  bzw.  $\operatorname{Im}(z_0)$  konvergieren.

- „Zusammenhängende Mengen“ und „Gebiete“:

Die Menge  $\alpha \subset \mathbb{C}$

$$\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid z(t) = x(t) + iy(t), 0 \leq t \leq 1, z(0) = a, z(1) = b, \\ x(t) \text{ und } y(t) \text{ stetig}\} \quad (1.18)$$

definiert einen stetigen Weg von  $a \in \mathbb{C}$  nach  $b \in \mathbb{C}$ .

Topologisch gesehen sind zwei Punkte äquivalent, falls sie in einer Menge  $U \subset \mathbb{C}$  durch einen stetigen Weg miteinander verbunden werden können.

Eine Menge  $U \subset \mathbb{C}$  heißt „zusammenhängend“, falls alle Punkte  $z \in U$  äquivalent sind.

Die Äquivalenzklasse eines Punkte  $z \in U$  definiert die „Zusammenhangskomponente“  $C_U(z)$  von  $z$  in  $U$  und stellt die größte zusammenhängende Teilmenge in  $U$  dar, die  $z$  enthält.

Eine zusammenhängende, offene Menge  $G \subset \mathbb{C}$  nennt man ein „Gebiet“.

Ist  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet, so können zwei Punkte von  $G$  sogar durch einen Streckenzug in  $G$  verbunden werden.

Ein Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  heißt „einfach zusammenhängend“, wenn jeder geschlossene Weg in  $G$  nur Punkte aus  $G$  umschließt.

**Wichtige Sätze:** (analog zur Analysis im  $\mathbb{R}^2$ )

**Satz 1.2** (Heine-Borel)

Eine Menge  $K \subset \mathbb{C}$  ist genau dann kompakt, wenn  $K$  abgeschlossen und beschränkt ist.

**Satz 1.3** (Existenz von Häufungspunkten)

Jede unendliche Teilmenge einer kompakten Menge  $K \subset \mathbb{C}$  besitzt einen Häufungspunkt  $z \in K$ .

**Satz 1.4** (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Punktfolge in  $\mathbb{C}$  besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

**Satz 1.5** (Schachtelung kompakter Mengen)

Seien  $K_1 \supset K_2 \supset \dots$  eine Folge kompakter nicht-leerer Teilmengen von  $\mathbb{C}$ . Dann ist auch  $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$  kompakt und nicht leer.

**Satz 1.6** (Cauchy-Kriterium)

Eine Folge  $(z_n)$  konvergiert genau dann in  $\mathbb{C}$ , wenn  $(z_n)$  eine „Cauchy-Folge“ ist, d.h. wenn zu jedem reellen  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $|z_m - z_n| < \epsilon \forall m, n > n_0$ .

**Satz 1.7** (einige Rechenregeln)

Wenn die Folgen  $(z_n)$  und  $(w_n)$  in  $\mathbb{C}$  konvergieren, dann konvergieren auch die Folgen  $(z_n + w_n)$ ,  $(z_n w_n)$  und  $(z_n/w_n)$ , wobei im letzten Fall  $w_n, \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \neq 0$  angenommen wird, und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \lim_{n \rightarrow \infty} w_n, \quad (1.19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n w_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \right), \quad (1.20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n}. \quad (1.21)$$

**Ränder komplexer Gebiete:**

- Analog zur reellen Analysis:

„Rand“ und „abgeschlossene Hülle“ einer Menge:

Ein Punkt  $z$  heißt „Randpunkt“ einer Menge  $U \subset \mathbb{C}$ , falls jede Umgebung von  $z$  mindestens je einen Punkt aus  $U$  und  $\mathbb{C} \setminus U$  enthält. Die Menge aller Randpunkte von  $U$  wird mit  $\partial U$  bezeichnet.

Jeder Weg, der zwei Punkte  $z_1 \in U$  und  $z_2 \in \mathbb{C} \setminus U$  stetig verbindet, enthält mindestens ein  $z_0 \in \partial U$ .

Die Vereinigung einer Menge  $U \subset \mathbb{C}$  mit der Menge ihrer Häufungspunkte definiert deren „abgeschlossene Hülle“  $\bar{U}$ . Der „offene Kern“  $U_0$  von  $U$  ist definiert durch Ausschluss aller Randpunkte, d.h.  $U_0 = \bar{U} \setminus \partial U$ ; Punkte in  $U_0$  heißen „innere Punkte“.

- Erweiterung im Komplexen:

Die komplexe Ebene besitzt zwar keinen Rand, aber für viele Betrachtungen ist es sinnvoll, einen unendlich fernen Punkt „ $\infty$ “ zu definieren:

**Definition 1.2** (Riemannsches Zahlenkugel)

Die „Riemannsches Zahlenkugel“  $\bar{\mathbb{C}}$  ist die Erweiterung der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  um den Punkt „ $\infty$ “, d.h.  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , wobei eine Umgebung von  $\infty$  definiert ist durch

$$D_\epsilon(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1/\epsilon\} \cup \{\infty\}. \quad (1.22)$$

Dies impliziert

**Satz 1.8** (Kompaktheit von  $\bar{\mathbb{C}}$ )

$\bar{\mathbb{C}}$  ist ein kompakter, Hausdorffscher, topologischer Raum.

(Beweis siehe [6].)

## 1.3 Unendliche Reihen

Unendliche Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  mit  $a_k \in \mathbb{C}$  können als Grenzwerte der Folge  $(s_n)$  der Partialsummen  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  aufgefasst werden.

**Definitionen und Sätze zur Konvergenz analog zum  $\mathbb{R}^2$ :**

**Definition 1.3** („Absolute Konvergenz“)

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt „absolut konvergent“, falls  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

**Satz 1.9**

Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

**Beweis:**

Anwendung des Cauchy-Kriteriums:

Zeige:  $\exists n_0$  zu vorgegebenem  $\epsilon > 0$ , so dass  $|s_m - s_n| < \epsilon$  für  $m, n > n_0$ .

Es gilt:  $|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k|$ .

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.  $\Rightarrow \exists n_0$ , so dass  $\sum_{k=n+1}^m |a_k| < \epsilon \forall m, n > n_0$   
 $\Rightarrow |s_m - s_n| < \epsilon$ .

q.e.d.

**Anmerkung:**

Nicht jede konvergente Reihe konvergiert auch absolut.

Beispiel:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  konvergiert,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  aber nicht.

**Satz 1.10**

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiert genau dann (absolut), wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k)$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k)$  (absolut) konvergieren, und dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k) + i \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k). \quad (1.23)$$

**Beweis:**

Konvergenz: bekannte Aussage für die Folgen  $(s_n)$ ,  $(\operatorname{Re}(s_n))$ ,  $(\operatorname{Im}(s_n))$  im  $\mathbb{R}^2$ .

Absolute Konvergenz:

- Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergent.  $\Rightarrow$  Zu  $\epsilon > 0 \exists n_0$ , so dass  $\forall m > n > n_0$ :

$$\epsilon > \left| \sum_{k=n+1}^m \underbrace{|a_k|}_{\geq |\operatorname{Re}(a_k)|} \right| \geq \left| \sum_{k=n+1}^m |\operatorname{Re}(a_k)| \right| \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |\operatorname{Re}(a_k)| \text{ konvergent.}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\operatorname{Im}(a_k)| \text{ analog.}$$

- Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} |\operatorname{Re}(a_k)|$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} |\operatorname{Im}(a_k)|$  konvergent.

$\Rightarrow$  Zu  $\epsilon > 0 \exists n_0$ , so dass  $\forall m > n > n_0$ :

$$\epsilon > \left| \sum_{k=n+1}^m |\operatorname{Re}(a_k)| \right| + \left| \sum_{k=n+1}^m |\operatorname{Im}(a_k)| \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m \underbrace{|\operatorname{Re}(a_k)| + |\operatorname{Im}(a_k)|}_{\geq |a_k|} \right| \geq \left| \sum_{k=n+1}^m |a_k| \right|.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent.}$$

q.e.d.

**Folgerung:**

Die Konvergenz der komplexen Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  lässt sich an Hand der reellen Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ ,

$\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k)$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} |\operatorname{Re}(a_k)|$ , etc. untersuchen.

$\Rightarrow$  Anwendung der bekannten Kriterien der reellen Analysis:

Majoranten-/Minorantenkriterien, Quotientenkriterium, Wurzelkriterium, Kriterien von Gauß, Raabe, Kummer, etc.

Die meisten Kriterien sind aber auch direkt für komplexe Zahlen formulierbar.

2 Beispiele:

**Satz 1.11** (Majoranten-/Minorantenkriterium)

Sei  $(b_n)$  eine reelle Folge.

- a) Gilt  $|a_k| \leq b_k \quad \forall k > n_0 \in \mathbb{N}$  und ist  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent, dann konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut.
- b) Gilt  $|a_k| \geq b_k \geq 0 \quad \forall k > n_0 \in \mathbb{N}$  und ist  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  divergent, dann divergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ .

**Beweis:**

- a)  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent.  $\Rightarrow$  Zu  $\epsilon > 0 \exists n_0$ , so dass  $\forall m > n > n_0$ :

$$\epsilon > \sum_{k=n+1}^m b_k \geq \sum_{k=n+1}^m |a_k|. \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent.}$$

- b) Aus der Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ , würde nach a) die Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  folgen.

q.e.d.

**Satz 1.12** (Quotientenkriterium)

In der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  seien nur endlich viele  $a_k = 0$ .

- a) Gibt es ein reelles  $q < 1$  und ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \quad \forall k > n$ , dann konvergiert die Reihe absolut.
- b) Gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 \quad \forall k > n$ , dann divergiert die Reihe.

**Beweis:**

- a) Für  $k > n$  gilt:  $|a_k| = \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \right| \cdots \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |a_n| \leq q^{k-n} |a_n| = \frac{|a_n|}{q^n} q^k$ .

Da die Reihe  $\frac{|a_n|}{q^n} \sum_{k=0}^{\infty} q^k$  konvergiert, folgt die Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  aus Satz 1.11.

- b) Für  $k > n$  gilt:  $|a_{k+1}| \geq |a_k| \geq \cdots \geq |a_n| > 0$ .

Da  $(a_k)$  also keine Nullfolge ist, muss  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergieren.

q.e.d.

**Satz 1.13** (Rechnen mit unendlichen Reihen)

Seien  $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergente, komplexe Reihen.

a) Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  konvergiert auch  $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ , und es gilt:

$$\alpha A + \beta B = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k). \quad (1.24)$$

b) Falls  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  sogar absolut konvergiert, d.h.  $A' = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$ , so ist das Produkt der Reihen durch das „Cauchy-Produkt“ gegeben:

$$AB = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (1.25)$$

**Beweis:**

a) folgt unmittelbar aus der reellen Analysis nach Zerlegung der Zahlen in Re und Im.

b) Definiere die Partialsummen  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $A'_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$ ,  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m c_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_m + \cdots + a_m b_0) \\ &= \sum_{n=0}^m a_{m-n} B_n = \sum_{n=0}^m a_{m-n} (B_n - B) + B \sum_{n=0}^m a_n. \end{aligned}$$

Da  $\sum_{n=0}^m a_n \xrightarrow{m \rightarrow \infty} A$ , bleibt zu zeigen, dass  $\sum_{n=0}^m a_{m-n} (B_n - B) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ . (\*)

Da  $(B_n - B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $\exists n_0$  für jedes  $\epsilon > 0$ , so dass  $|B_n - B| < \epsilon \forall n > n_0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^m a_{m-n} (B_n - B) \right| &\leq \sum_{n=0}^{n_0} |a_{m-n}| |B_n - B| + \sum_{n=n_0+1}^m |a_{m-n}| \underbrace{|B_n - B|}_{< \epsilon} \\ &\leq \underbrace{\max_{n \leq n_0} |B_n - B|}_{\leq 2 \max_n |B_n| < \infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0} |a_{m-n}|}_{= A'_m - A'_{m-n_0-1}} + \epsilon \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^m |a_{m-n}|}_{\leq A'} \end{aligned}$$

Da  $(A'_m)$  konvergiert (Cauchy-Folge!),  $\exists m_0$ , so dass  $|A'_m - A'_{m-n_0-1}| < \epsilon \forall m > m_0$ .

$$\Rightarrow \left| \sum_{n=0}^m a_{m-n} (B_n - B) \right| < \left( 2 \max_{n \geq 0} |B_n| + A' \right) \epsilon =: \epsilon', \quad m > m_0.$$

Da  $\epsilon' > 0$  beliebig klein vorgegeben werden kann, folgt (\*).

q.e.d.

## 1.4 Elementare Funktionen

**Definition 1.4** (exp, cos und sin)

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad (1.26)$$

$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \quad (1.27)$$

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (1.28)$$

**Satz 1.14**

Die Reihen  $\exp(z)$ ,  $\cos(z)$  und  $\sin(z)$  konvergieren  $\forall z \in \mathbb{C}$  und erfüllen die Relationen:

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (1.29)$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (1.30)$$

**Beweis:**

- Konvergenz:

$z = 0$ : trivial.

Für  $z \neq 0$  folgt Konvergenz unmittelbar aus dem Quotientenkriterium (Satz 1.12),

da z.B. für  $\exp(z)$  gilt:  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{|z|}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

Für  $\cos(z)$  und  $\sin(z)$  gilt Analoges.

- Gleichung (1.29) folgt durch Umformen der Summen:

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} i^n \frac{z^n}{n!},$$

$$i \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} i^n \frac{z^n}{n!},$$

$$\Rightarrow \cos(z) + i \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{z^k}{k!} = \exp(iz).$$

- Gleichung (1.30) folgt aus dem Cauchy-Produkt (1.25):

$$\begin{aligned} \exp(z_1) \exp(z_2) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) \stackrel{(1.25)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \exp(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

q.e.d.

**Korollar 1.1**

Weitere Relationen für  $z = x + iy$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\exp(z)^{-1} = \exp(-z), \quad (1.31)$$

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y), \quad (1.32)$$

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z, \quad (1.33)$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad (1.34)$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \quad (1.35)$$

$$1 = \sin^2 z + \cos^2 z. \quad (1.36)$$

**Beweis:**

durch einfache Umformungen mit Satz 1.14 (Übung!).

**Anmerkung:**

Die Übereinstimmung der Rechenregeln für  $\exp(z)$  mit denen für  $e^x$  im Reellen suggerieren die Identifikation  $e^z = \exp(z)$  im Komplexen. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung von  $e^x$  zu  $e^z$  wird später gezeigt.

# Kapitel 2

## Holomorphe Funktionen

### 2.1 Stetigkeit und Grenzwert

Im Folgenden zerlegen wir eine komplexe Funktion  $f : D \rightarrow W$  mit Definitionsbereich  $D \subset \overline{\mathbb{C}}$  und Wertebereich  $W \subset \overline{\mathbb{C}}$  oft in ihren Real- und Imaginärteil  $u$  bzw.  $v$  wie folgt:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Abgesehen vom Punkt  $\infty$  werden „Stetigkeit“ und „Grenzwert“ wie für Abbildungen im  $\mathbb{R}^2$  definiert:

**Definition 2.1** („Stetigkeit“)

Eine Funktion  $f : D \rightarrow W$  heißt „stetig“ im Punkt  $z_0 \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$ , wenn zu jeder Umgebung  $D_\epsilon(w_0)$  von  $w_0 = f(z_0)$  mit beliebig vorgegebenem  $\epsilon > 0$  eine Umgebung  $D_\delta(z_0)$  existiert, so dass  $f(z) \in D_\epsilon(w_0) \forall z \in D_\delta(z_0)$ .

$f$  heißt „stetig“ auf einem Gebiet  $G \subset D$ , wenn  $f$  in allen Punkten  $z_0 \in G$  stetig ist.

$f$  heißt „gleichmäßig stetig“ auf einem Gebiet  $G \subset D$ , wenn das zu  $\epsilon > 0$  gehörige  $\delta > 0$  für alle  $z_0 \in G$  gleich gewählt werden kann.

**Beispiele:**

Typische auf  $D \subset \mathbb{C}$  stetige Funktionen  $f : D \rightarrow W$  :

- Polynome (Grad  $n \in \mathbb{N}_0$ ):  $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad D = \mathbb{C},$
- Rationale Funktionen:  $f(z) = \frac{\sum_{k=0}^n a_k z^k}{\sum_{l=0}^m b_l z^l}, \quad D = \mathbb{C} \setminus \{\text{maximal } m \text{ Punkte}\},$
- Exponential-Fkt. etc.:  $f(z) = \exp(z), \cos(z), \sin(z), \quad D = \mathbb{C},$
- Potenzreihen:  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad D \text{ später im Detail diskutiert.}$

**Satz 2.1** (Satz von Heine)

Jede Funktion, die auf einer kompakten Menge stetig ist, ist dort auch gleichmäßig stetig.

**Beweis:**

wie im  $\mathbb{R}^2$ .

**Definition 2.2** („Grenzwert“)

Es sei  $f : D \rightarrow W$  mit  $D, W \subset \overline{\mathbb{C}}$  und  $z_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Wir definieren

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c \in \overline{\mathbb{C}}, \quad (2.2)$$

falls für jede Folge  $(z_n) \subset D \setminus \{z_0\}$  mit  $z_n \rightarrow z_0$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = c. \quad (2.3)$$

⇒ Übertragung wichtiger Aussagen über Stetigkeit aus  $\mathbb{R}^2$  (mit Sonderfall  $z_0 = \infty$ ):

**Satz 2.2**

Gegeben sei  $f : D \rightarrow W$  mit  $D, W \subset \overline{\mathbb{C}}$  und  $z_0 \in D$ .

- a)  $f$  ist genau dann stetig in  $z_0$ , wenn  $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$  für jede konvergente Folge  $(z_n)$  mit  $z_n \rightarrow z_0$ , d.h. wenn gilt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (2.4)$$

- b)  $f = u + iv$  ist genau dann stetig in  $z_0 = x_0 + iy_0 \neq \infty$ , wenn die reellen Funktionen  $u$  and  $v$  stetig in  $(x_0, y_0)$  sind.

**Beweis:**

Für  $z_0 \neq \infty$  wie im  $\mathbb{R}^2$ .

Beweis für  $z_0 = \infty$  als Übung?

**Beispiel:**

Die Funktion  $f(z) = \begin{cases} 1/z, & z \neq 0, \infty, \\ \infty, & z = 0, \\ 0, & z = \infty, \end{cases}$  ist stetig auf ganz  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Betrachte Folgen  $(z_n)$  mit  $z_0 \neq z_n \rightarrow z_0$ :

- $z_0 \neq 0, \infty$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z} = \frac{1}{z_0} = f(z_0)$ ,
- $z_0 = 0$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty = f(0)$ ,
- $z_0 = \infty$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0 = f(\infty)$ .

## 2.2 Komplexe Differenzierbarkeit

**Definition 2.3** („Differenzierbarkeit“ und „Holomorphie“)

Gegeben sei  $f : D \rightarrow W$ , wobei  $D, W \subset \mathbb{C}$  und  $D$  offen.

a)  $f$  heißt „differenzierbar“ in  $z_0 \in D$ , wenn der folgende Grenzwert in  $\mathbb{C}$  existiert:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: \frac{df}{dz}(z_0). \quad (2.5)$$

b) Die Funktion  $f' : D' \rightarrow W'$  mit  $D' = \left\{ z_0 \mid \frac{df}{dz}(z_0) \text{ existiert} \right\}$  und  $f'(z_0) := \frac{df}{dz}(z_0)$  heißt „Ableitung“ von  $f$ .

c)  $f$  heißt „holomorph“ (bzw. „regulär“) in  $z_0$ , wenn sie in einer Umgebung von  $z_0$  definiert und differenzierbar ist.

d) Höhere Ableitungen sind rekursiv definiert:

$$f^{(0)} := f, \quad f^{(1)} := f', \quad f^{(n)} := (f^{(n-1)})', \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Wie im Reellen impliziert Differenzierbarkeit Stetigkeit:

**Satz 2.3** Ist  $f$  in  $z_0$  differenzierbar, dann ist  $f$  in  $z_0$  auch stetig.

**Beweis:**

durch einfaches Rechnen mit Grenzwerten:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= f'(z_0), & \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) &= 0. \\ \Rightarrow 0 &= \left( \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) \left( \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \right) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

$\Rightarrow$  Stetigkeit:  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ . q.e.d.

**Beachte:**

- Stetigkeit, Grenzwert: identisch in  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{R}^2$ .
- Differenzierbarkeit: Unterschiede, da  $\mathbb{C} = \text{Körper}$ , aber  $\mathbb{R}^2$  nur Vektorraum.

Im  $\mathbb{R}^2$ : Für  $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$  ist die Ableitung eine Matrix:

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Im Reellen sind die Koeffizienten von  $Df$  im Allgemeinen unabhängig, bei komplexen Funktionen  $f$  nicht!

**Satz 2.4** („Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen“)

Ist die komplexe Funktion  $f = u + iv$  in  $z_0 = x_0 + iy_0$  differenzierbar, so existieren dort die partiellen Ableitungen  $u_x, u_y, v_x, v_y$  und erfüllen die „Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen“:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \quad (2.9)$$

Ferner gilt:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \quad (2.10)$$

**Beweis:**

Setze  $z = z_0 + \Delta x = x_0 + \Delta x + iy_0$  mit  $\Delta x \in \mathbb{R}$  und berechne:

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\Delta x} \\ &= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Per Voraussetzung konvergiert die linke Seite gegen  $f'(z_0)$ , d.h. auf der rechten Seite müssen Real- und Imaginärteil ebenfalls konvergieren. Mit der Definition der partiellen Ableitungen ergibt sich also:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = 1. \text{ Gleichung von (2.10).}$$

Analog folgt mit  $z = z_0 + i\Delta y = x_0 + iy_0 + i\Delta y$  mit  $\Delta y \in \mathbb{R}$ :

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) = 2. \text{ Gleichung von (2.10).}$$

$\Rightarrow$  (2.9) folgt aus Vergleich von Re und Im der beiden Formen für  $f'(z_0)$ . q.e.d.

**Beispiele:**

- Die Funktion  $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$  ist nur bei  $z = 0$  differenzierbar, da:

$$u_x(x, y) = 2x, \quad u_y(x, y) = 2y, \quad v_x(x, y) = v_y(x, y) = 0. \quad (2.11)$$

- Die Funktion  $f(z) = \bar{z} = x - iy$  ist nirgends in  $\mathbb{C}$  differenzierbar:

$$u_x(x, y) = 1, \quad v_y(x, y) = -1, \quad u_y(x, y) = v_x(x, y) = 0. \quad (2.12)$$

**Beachte:**

Allgemein haben alle Funktionen, die neben  $z$  auch  $\bar{z}$  involvieren, Probleme mit Differenzierbarkeit!

Differenziere  $f(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y)$  reell nach  $x$  und  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = u_y(x, y) + iv_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}. \quad (2.14)$$

Die Cauchy-Riemannschen Dglen. implizieren aber:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y) = 0. \quad (2.15)$$

$\Rightarrow$  Keine nicht-triviale  $\bar{z}$ -Abhängigkeit in komplex differenzierbaren Funktionen!

**Satz 2.5** (Rechenregeln)

Seien  $f, g$  komplex differenzierbar in  $z_0$ . Dies impliziert:

- a)  $f(z) = c = \text{const.} \in \mathbb{C}$  ist in ganz  $\mathbb{C}$  differenzierbar, und es gilt:

$$f'(z) = 0. \quad (2.16)$$

- b)  $f(z) = z^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  ist in ganz  $\mathbb{C}$  differenzierbar, und es gilt:

$$f'(z) = nz^{n-1}. \quad (2.17)$$

- c)  $f + g$  ist differenzierbar in  $z_0$ , und es gilt:

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0). \quad (2.18)$$

- d)  $f \cdot g$  ist differenzierbar in  $z_0$ , und es gilt:

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0). \quad (\text{Produktregel}) \quad (2.19)$$

- e) Falls  $g(z_0) \neq 0$ , ist  $f/g$  differenzierbar in  $z_0$ , und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g(z_0)^2}. \quad (\text{Quotientenregel}) \quad (2.20)$$

- f) Seien  $f : D_f \rightarrow W_f$  und  $g : D_g \rightarrow W_g$  komplexe Funktionen und  $z_0 \in D_f$  sowie  $f(z_0) \in D_g$ . Dann ist die zusammengesetzte Funktion  $h = g \circ f$  ebenfalls in  $z_0$  differenzierbar, und es gilt:

$$h'(z_0) = (g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0). \quad (\text{Kettenregel}) \quad (2.21)$$

**Beweis:**

Elementar wie im Reellen bzw. durch Zerlegung komplexer Größen in Re und Im und Verwendung der Cauchy-Riemannschen Dglen.

Wichtige Beispiele für Ableitungen:

**Satz 2.6**

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k z^k \right)' = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad (2.22)$$

$$\exp'(z) = \exp(z), \quad (2.23)$$

$$\cos'(z) = -\sin(z), \quad (2.24)$$

$$\sin'(z) = \cos(z), \quad (2.25)$$

**Beweis:**

- (2.22) folgt durch Anwendung der Rechenregeln für Ableitung.
- Beweis von (2.23) mit Hilfe der Funktionalgleichung (1.30) für  $\exp(z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0} &= \exp(z_0) \frac{\exp(z - z_0) - 1}{z - z_0} = \exp(z_0) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{k-1}}{k!}}_{\text{konvergent } \forall z \in \mathbb{C}} \\ &\xrightarrow{z \rightarrow z_0} \exp(z_0). \end{aligned}$$

- (2.24) und (2.25) folgen aus (2.23) und Anwendung der Rechenregeln auf

$$\cos(z) = \frac{1}{2} [\exp(iz) + \exp(-iz)], \quad \sin(z) = \frac{1}{2i} [\exp(iz) - \exp(-iz)].$$

q.e.d.

**Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit:**

Erinnerung an reelle Analysis:

**Definition 2.4** („Reelle Differenzierbarkeit im  $\mathbb{R}^2$ “)

Eine Funktion  $\phi : D \rightarrow W$  mit  $D \subset \mathbb{R}^2$  und  $W \subset \mathbb{R}$  heißt in Punkt  $\vec{x}_0 \in D$  differenzierbar, wenn ein Vektor  $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$  sowie eine in einer Umgebung von  $\vec{x}_0$  definierte Funktion  $\phi_0$  existieren mit:

$$\phi_0(\vec{x}_0) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \phi_0(\vec{x}) = 0, \quad (2.26)$$

$$\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}_0) + \vec{c} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + |\vec{x} - \vec{x}_0| \phi_0(\vec{x}). \quad (2.27)$$

**Satz 2.7**

Wenn  $\phi(\vec{x}) = \phi(x, y)$  wie in Definition 2.4 in  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)^T$  diff'bar ist, dann existieren in  $\vec{x}_0$  die partiellen Ableitungen  $\phi_x = \partial\phi/\partial x$  und  $\phi_y = \partial\phi/\partial y$  und  $\vec{c} = (c_x, c_y)^T$  ist gegeben durch den „Gradienten“  $\vec{\nabla}\phi$ :

$$\vec{c} = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \phi_x(\vec{x}_0) \\ \phi_y(\vec{x}_0) \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

**Beweis:**Einsetzen von  $\vec{x} = (x_0 + \Delta x, y_0)$  in (2.27) ergibt:

$$\phi(x_0 + \Delta x, y_0) = \phi(x_0, y_0) + c_x \Delta x + |\Delta x| \phi_0(\vec{x}).$$

Für  $\Delta x \rightarrow 0$  gilt dann:  $\left| \frac{\phi(x_0 + \Delta x, y_0) - \phi(x_0, y_0)}{\Delta x} - c_x \right| = |\phi_0(\vec{x})| \xrightarrow{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} 0.$

$\Rightarrow c_x = \phi_x(\vec{x}_0)$ . Der Beweis für  $c_y$  läuft analog. q.e.d.

Den Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Diff'barkeit liefert der folgende Satz:

**Satz 2.8** (Zerlegungssatz)

Eine komplexe Funktion  $f : D \rightarrow W$  mit  $D, W \subset \mathbb{C}$  ist genau dann differenzierbar in  $z_0$ , wenn es eine Zahl  $c \in \mathbb{C}$  und eine auf einer Umgebung  $U \subset D$  von  $z_0$  definierte Funktion  $f_0$  gibt, so dass für alle  $z \in U$  gilt:

$$f_0(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f_0(z) = 0, \quad (2.29)$$

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + |z - z_0| f_0(z). \quad (2.30)$$

Dann gilt:

$$c = f'(z_0). \quad (2.31)$$

**Beweis:**

- Seien (2.29) und (2.30) erfüllt. Dann gilt:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - c \right| = |f_0(z)| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0. \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c = f'(z_0). \quad (2.32)$$

- Sei  $f$  diff'bar in  $z_0$ , d.h.  $c := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  existiert.

Definiere  $f_0(z) := \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - c \right) e^{i\alpha_z}$  mit  $\alpha_z = \arg(z - z_0)$ .

$\Rightarrow f_0(z)$  hat die Eigenschaften (2.29) und (2.30). q.e.d.

**Satz 2.9** (Korrespondenz zwischen reeller und komplexer Diff'barkeit)

Folgende Aussagen über reelle Funktionen  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  sind äquivalent:

- $u$  und  $v$  sind im Punkt  $(x_0, y_0)$  reell diff'bar und erfüllen dort die Cauchy-Riemannschen Dglen.
- $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  mit  $z = x + iy$  ist in  $z_0 = x_0 + iy_0$  komplex diff'bar.

**Beweis:**

- Sei a) erfüllt. Dann ergibt sich mit  $\phi = u, v$  aus (2.27) und (2.28):

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(\vec{x}) + iv(\vec{x}) - u(\vec{x}_0) - iv(\vec{x}_0)}{z - z_0} \\ &= \frac{u_x(\vec{x}_0)(x - x_0) + u_y(\vec{x}_0)(y - y_0) + iv_x(\vec{x}_0)(x - x_0) + iv_y(\vec{x}_0)(y - y_0)}{z - z_0} \\ &\quad + \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0| [u_0(\vec{x}) + iv_0(\vec{x})]}{z - z_0} \end{aligned}$$

Verwende die Cauchy-Riemannschen Dglen.  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$  und  $z - z_0 = e^{i\alpha z} |z - z_0| = e^{i\alpha z} |\vec{x} - \vec{x}_0|$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{[u_x(\vec{x}_0) + iv_x(\vec{x}_0)] [x - x_0 + iy - iy_0]}{z - z_0} + e^{-i\alpha z} [u_0(\vec{x}) + iv_0(\vec{x})] \\ &= u_x(\vec{x}_0) + iv_x(\vec{x}_0) + e^{-i\alpha z} [u_0(\vec{x}) + iv_0(\vec{x})]. \\ &\xrightarrow{z \rightarrow z_0} u_x(\vec{x}_0) + iv_x(\vec{x}_0), \text{ d.h. } f \text{ ist komplex diff'bar.} \end{aligned}$$

- Sei b) erfüllt. Nach Satz 2.4 gelten die Cauchy-Riemannschen Dglen. Ferner ergibt sich nach (2.30) für  $f = u + iv$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= u(\vec{x}) + iv(\vec{x}) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + |z - z_0| f_0(z) \\ &= u(\vec{x}_0) + iv(\vec{x}_0) + [u_x(\vec{x}_0) + iv_x(\vec{x}_0)] [x - x_0 + iy - iy_0] \\ &\quad + |\vec{x} - \vec{x}_0| [u_0(\vec{x}) + iv_0(\vec{x})] \end{aligned}$$

Betrachte Re und Im getrennt und verwende die Cauchy-Riemannschen Dglen.:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{f(z)\} = u(\vec{x}) &= u(\vec{x}_0) + u_x(\vec{x}_0)(x - x_0) - v_x(\vec{x}_0)(y - y_0) + |\vec{x} - \vec{x}_0| u_0(\vec{x}) \\ &= u(\vec{x}_0) + u_x(\vec{x}_0)(x - x_0) + u_y(\vec{x}_0)(y - y_0) + |\vec{x} - \vec{x}_0| u_0(\vec{x}) \\ &= u(\vec{x}_0) + \vec{\nabla} u(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + |\vec{x} - \vec{x}_0| u_0(\vec{x}), \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}\{f(z)\} = v(\vec{x}) = \dots = v(\vec{x}_0) + \vec{\nabla} v(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + |\vec{x} - \vec{x}_0| v_0(\vec{x}).$$

$\Rightarrow$  Reelle Differenzierbarkeit.

q.e.d.

## 2.3 Eigenschaften holomorpher Funktionen

### 2.3.1 Konformität

**Definition 2.5** („Konformität“)

Gegeben sei die komplexe Funktion  $f : D \rightarrow W$  mit  $D, W \subset \mathbb{C}$ .

a)  $f$  heißt „winkeltreu“ in  $z_0 \in D$ , falls alle Kurven  $z_1(t)$  und  $z_2(t)$ , die durch  $z_0$  gehen und Tangenten besitzen, auch Bildkurven  $f(z_1(t))$  und  $f(z_2(t))$  mit Tangenten besitzen und die Tangenten der  $z_k(t)$  denselben (orientierten) Winkel einschließen wie die Tangenten der  $f(z_k(t))$ .

b)  $f$  heißt „streckentreu“ in  $z_0 \in D$ , falls

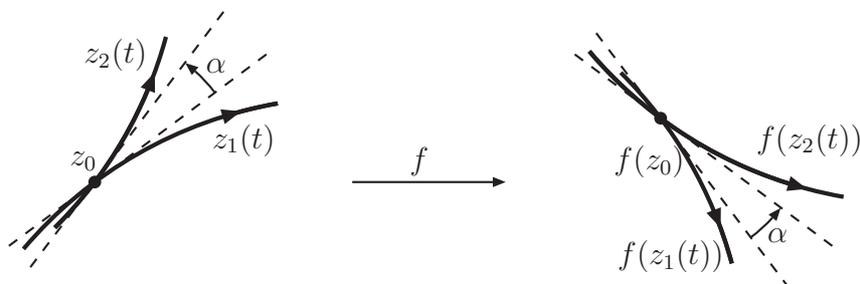
$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = c > 0. \quad (2.33)$$

c)  $f$  heißt „lokal konform“ in  $z_0 \in D$ , wenn  $f$  dort winkeltreu und streckentreu ist.

d)  $f$  heißt „konform“ auf einem Gebiet  $G \subset D$ , wenn  $f$  in jedem Punkt  $z_0 \in G$  lokal konform und invertierbar ist.

Geometrische Bedeutung:

- Winkeltreue:



- Streckentreue:

Infinitesimal kleine Strecken  $dl$  durch  $z_0$  werden durch  $f$  unabhängig von deren Richtung auf Strecken der Länge  $c dl$  abgebildet.

- Lokale Konformität:

$f$  verhält sich in infinitesimalen Umgebungen von  $z_0$  wie eine Drehstreckung mit Streckungsfaktor  $c$ .

**Satz 2.10** (Lokale Konformität holomorpher Funktionen)

Ist  $f : D \rightarrow W$  in  $z_0 \in D$  holomorph mit  $f'(z_0) \neq 0$ , dann ist  $f$  in  $z_0$  lokal konform.

**Beweis:**

Im Folgenden setzen wir  $f'(z_0) = c e^{i\gamma}$  mit  $c, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ .

- Winkeltreue: Sei  $z_k(0) = z_0$  für  $k = 1, 2$  und  $\dot{z}_k(t) = \frac{dz_k}{dt}(t)$ .

$$\text{Tangentenvektoren an } z_k \text{ in } z_0: \quad \vec{t}_k(z_0) = \frac{1}{|\dot{z}_k(0)|} \begin{pmatrix} \dot{x}_k(0) \\ \dot{y}_k(0) \end{pmatrix}, \quad |\vec{t}_k(z_0)| = 1.$$

$$\Rightarrow \cos \alpha_{12}(z_0) = \vec{t}_1(z_0) \cdot \vec{t}_2(z_0) = \vec{t}_1(z_0)^T \vec{t}_2(z_0).$$

Berechnung der Tangentenvektoren an  $f(z_k)$  in  $f(z_0)$ :

$$\dot{f}(z_k(t)) = f'(z_k) \dot{z}_k(t). \quad \Rightarrow \quad \dot{f}(z_k(0)) = f'(z_0) \dot{z}_k(0) = c e^{i\gamma} \dot{z}_k(0).$$

$$\begin{aligned} \vec{t}_k(f(z_0)) &= \frac{1}{|\dot{f}(z_0(0))|} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\{\dot{f}(z_0)\} \\ \operatorname{Im}\{\dot{f}(z_0)\} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\dot{z}_k(0)|} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\{e^{i\gamma} \dot{z}_k(0)\} \\ \operatorname{Im}\{e^{i\gamma} \dot{z}_k(0)\} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|\dot{z}_k(0)|} \begin{pmatrix} \cos \gamma \dot{x}_k(0) - \sin \gamma \dot{y}_k(0) \\ \sin \gamma \dot{x}_k(0) + \cos \gamma \dot{y}_k(0) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}}_{=: R} \vec{t}_k(z_0). \end{aligned}$$

$R =$  Drehmatrix, d.h.  $R^{-1} = R^T$ ,  $\det R = +1$ .

$$\Rightarrow |\vec{t}_k(f(z_0))| = |R \vec{t}_k(z_0)| = |\vec{t}_k(z_0)| = 1.$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{12}(f(z_0)) &= \vec{t}_1(f(z_0)) \cdot \vec{t}_2(f(z_0)) = [R \vec{t}_1(z_0)]^T [R \vec{t}_2(z_0)] \\ &= \vec{t}_1(z_0)^T R^T R \vec{t}_2(z_0) = \vec{t}_1(z_0)^T \vec{t}_2(z_0) = \cos \alpha_{12}(z_0). \end{aligned}$$

Beachte:

Die Orientierung des Schnittwinkels bleibt erhalten, da  $\det R = +1$ .

Formal folgt dies z.B. aus

$$\begin{aligned} \det(\vec{t}_1(f(z_0)), \vec{t}_2(f(z_0))) &= \det(R \vec{t}_1(z_0), R \vec{t}_2(z_0)) = \det R \cdot \det(\vec{t}_1(z_0), \vec{t}_2(z_0)) \\ &= \det(\vec{t}_1(z_0), \vec{t}_2(z_0)). \end{aligned}$$

- Streckentreue folgt aus Stetigkeit von  $|\cdot|$ :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \left| \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)| = c > 0.$$

q.e.d.

**Beispiel:**

Die Funktion  $f(z) = \bar{z}$  ist zwar streckentreu, aber nicht winkeltreu.

Für die im Beweis definierte Matrix  $R$  gilt hier  $\det R = -1$ , d.h. der Winkel  $\alpha_{12}$  ändert seine Orientierung unter  $f$ .

**Satz 2.11** (Lokale Eineindeutigkeit)

Ist  $f : D \rightarrow W$  in  $z_0 \in D$  holomorph und  $f'(z_0) \neq 0$ , so ist  $f$  in  $z_0$  invertierbar, d.h. es gibt eine Umgebung  $U$  von  $z_0$ , die durch  $f$  eineindeutig auf  $V = f(U)$  abgebildet wird. Die Umkehrfunktion  $f^{-1} : V \rightarrow U$  ist holomorph in  $w_0 = f(z_0)$ , und es gilt:

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}. \quad (2.34)$$

**Beweis:**

- Vorgriff auf Satz 3.8:  
 $\exists$  Umgebung  $U$  von  $z_0$ , so dass  $f'$  auf  $U$  stetig ist.  
 $\Rightarrow$  Durch evtl. Einschränkung von  $U$  kann erreicht werden, dass  $f'(z) \neq 0 \forall z \in U$ .

Für  $z = x + iy \in U$  gilt also auf Grund der Cauchy-Riemannschen Dglen.:

$$\begin{vmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{vmatrix} = u_x(x, y)^2 + v_x(x, y)^2 = |f'(z)|^2 \neq 0.$$

$\Rightarrow$  Nach einem Satz der reellen Analysis ist die Abbildung  $f : (x, y) \mapsto (u, v)$  eineindeutig auf  $U$ .

- Seien  $z, \tilde{z} \in U$ , so dass  $w, \tilde{w} \in V = f(U)$ , wenn  $w = f(z)$  und  $\tilde{w} = f(\tilde{z})$ .

$$\Rightarrow \lim_{\tilde{w} \rightarrow w} \frac{f^{-1}(\tilde{w}) - f^{-1}(w)}{\tilde{w} - w} = \lim_{\tilde{z} \rightarrow z} \frac{\tilde{z} - z}{f(\tilde{z}) - f(z)} = \frac{1}{f'(z)}.$$

q.e.d.

**Satz 2.12** („Riemannscher Abbildungssatz“)

Es seien  $G, \tilde{G} \subset \mathbb{C}$  einfach zusammenhängende Gebiete und  $G, \tilde{G} \neq \mathbb{C}$ . Dann gibt es eine konforme Abbildung  $f : G \rightarrow \tilde{G}$ .

**Beweis:**

Äußerst nicht-trivial, siehe z.B. [2, 6, 8].

### 2.3.2 Mehrdeutige Funktionen

Lokale Eineindeutigkeit nach Satz 2.11:

$f'(z) \neq 0, z \in U \Rightarrow f$  umkehrbar auf  $f(U)$ , d.h.  $f$  eineindeutig auf  $U$ .

$\hookrightarrow$  Frage nach globaler Eineindeutigkeit?

**Beispiele:**

a) Potenzfunktion:  $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$ .

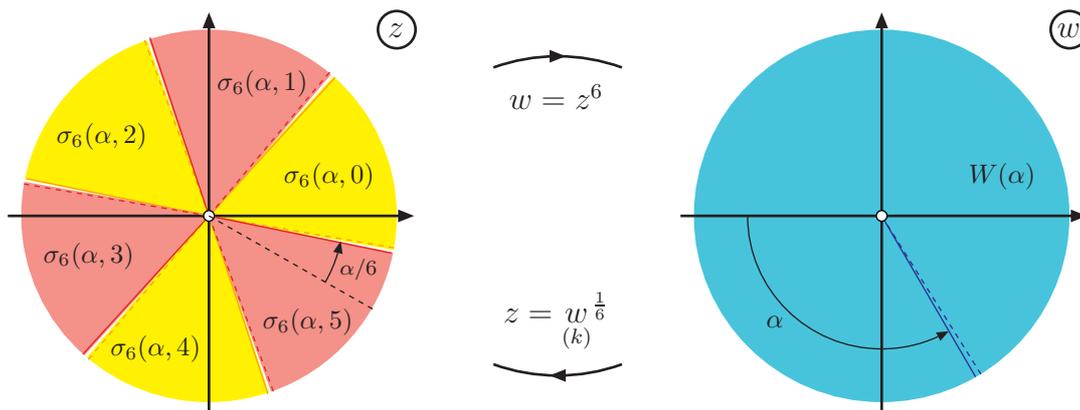
$f$  ist nicht global umkehrbar auf  $\mathbb{C}$ , da: ( $\zeta_n = n$ . Einheitswurzel)

$$f(z \zeta_n^k) = (z \zeta_n^k)^n = z^n \underbrace{(\zeta_n^k)^n}_{=1} = z^n = f(z), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (2.35)$$

$f$  bildet  $n$  Sektoren  $\sigma_n(\alpha, k)$  des  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  komplett auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ab:

$$\begin{aligned} \sigma_n(\alpha, k) &= \left\{ z = re^{i\phi} \mid -\frac{\pi}{n} < \phi - \frac{\alpha + 2\pi k}{n} \leq +\frac{\pi}{n}, 0 < r < \infty \right\}, \\ W(\alpha) &= \left\{ z = re^{i\phi} \mid -\pi < \phi - \alpha \leq +\pi, 0 < r < \infty \right\}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

$n = 6, \alpha = 120^\circ$ :



Umkehrabbildung  $z = f^{-1}(w)$  ist auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ( $n$ -fach) mehrdeutig.

$\hookrightarrow$  Eineindeutigkeit durch Einschränkung auf  $n$  verschiedene Zweige:

$$\begin{aligned} f &: \sigma_n(\alpha, k) \rightarrow W(\alpha), & z = re^{i\phi}, & f(z) = r^n e^{ni\phi}, \\ f_{(k)}^{-1} &: W(\alpha) \rightarrow \sigma_n(\alpha, k), & w = re^{i\phi}, & \\ f_{(k)}^{-1}(w) &= w_{(k)}^{\frac{1}{n}} := r^{\frac{1}{n}} \exp \left\{ \frac{i(\phi + 2\pi k)}{n} \right\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Bezeichnungen / Konventionen:

- Standardwahl:  $\alpha = 0$ , falls  $\alpha$  nicht explizit anders definiert.
- $f_{(k)}^{-1}(w) = w_{(k)}^{\frac{1}{n}}$  heißt „ $n$ . Wurzel auf dem  $k$ . Riemannschen Blatt“.
- $\sqrt[n]{w} \equiv w_{(0)}^{\frac{1}{n}} := w_{(0)}^{\frac{1}{n}}$  definiert das „Riemannsche Hauptblatt“.

b) Exponential- und Logarithmusfunktion:  $f(z) = e^z$ .

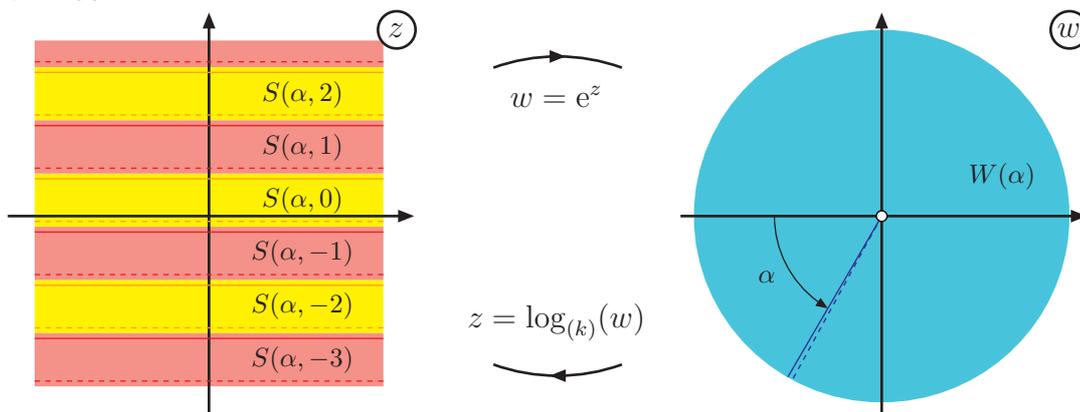
$f$  ist nicht global umkehrbar auf  $\mathbb{C}$ , da:

$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.38}$$

$f$  bildet Streifen  $S(\alpha, k)$  in  $\mathbb{C}$  komplett auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ab:

$$\begin{aligned} S(\alpha, k) &= \left\{ z = x + iy \mid -\pi < y - (\alpha + 2\pi k) \leq +\pi \right\}, \\ W(\alpha) &= \left\{ z = re^{i\phi} \mid -\pi < \phi - \alpha \leq +\pi, 0 < r < \infty \right\}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

$\alpha = 60^\circ$ :



Umkehrabbildung  $z = f^{-1}(w) =: \log_{(k)}(w)$  ist auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ( $\infty$ -fach) mehrdeutig.

$\iff$  Eindeutigkeit durch Einschränkung auf verschiedene Zweige:

$$\begin{aligned} f &: S(\alpha, k) \rightarrow W(\alpha), \quad z = x + iy, \quad f(z) = e^z, \\ f_{(k)}^{-1} &: W(\alpha) \rightarrow S(\alpha, k), \quad w = re^{i\phi}, \\ f_{(k)}^{-1}(w) &= \log_{(k)}(w) := \underbrace{\ln(r)}_{\text{reeller Logarithmus}} + i(\phi + 2\pi k). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Bezeichnungen / Konventionen:

- Standardwahl:  $\alpha = 0$ , falls  $\alpha$  nicht explizit anders definiert.
- $f_{(k)}^{-1}(z) = \log_{(k)}(z) =$  „Logarithmus auf dem  $k$ . Riemannschen Blatt“.
- $\log := \log_{(0)}$  definiert den Logarithmus auf dem „Riemannschen Hauptblatt“.

Ableitung des Logarithmus  $z = \log(w)$ :

$$\log'(w) \Big|_{w=w_0} = \frac{1}{(e^z)' \Big|_{z=z_0}} = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}. \tag{2.41}$$

c) Allgemeine Potenzfunktion:  $z^c := e^{c \log(z)}$  = mehrdeutig.

$\iff$  Eindeutig bestimmte Zweige:

$$z_{(k)}^c := e^{c \log_{(k)}(z)}, \quad z \in S(\alpha, k). \tag{2.42}$$

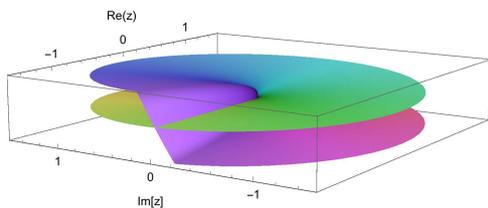
### „Riemannsche Flächen“:

Konstruktion:

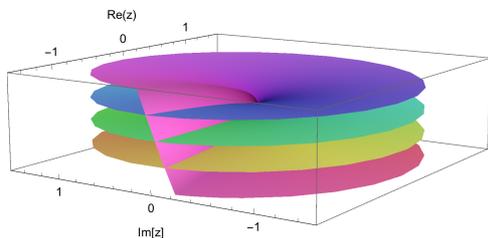
- Definition der mehrdeutigen Funktion  $f$  auf (bis zu abzählbar vielen) Riemannschen Blättern, die bis auf abzählbar viele isolierte Punkte („Verzweigungspunkte“), an denen  $f$  nicht holomorph ist, jeweils  $\overline{\mathbb{C}}$  überdecken. Zur eindeutigen Definition von  $f$  werden die Blätter an denselben Unstetigkeitskurven („Verzweigungsschnitte“), die die „Verzweigungspunkte“ verbinden, aufgeschnitten.
- Aufeinanderlegen der Riemannschen Blätter, so dass alle Verzweigungspunkte und -schnitte aufeinander liegen.
- Verheften aller Blätter an den Verzweigungsschnitten, so dass  $f$  beim Übergang über einen Schnitt durch Wechsel auf das nächste Blatt holomorph bleibt.

Beispiele:

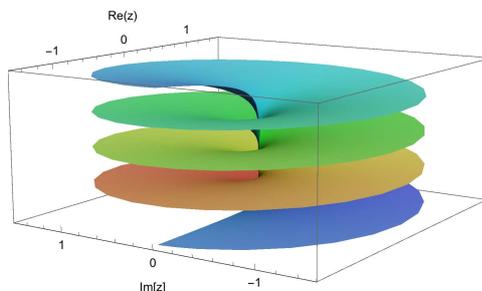
$$f(z) = \sqrt{z} \text{ mit } \alpha = 0:$$



$$f(z) = \sqrt[4]{z} \text{ mit } \alpha = 0:$$



$$f(z) = \log(z) \text{ mit } \alpha = 0:$$



„Wendeltreppe“

Eigenschaften:

- Veranschaulichung im Reellen schwierig durch Überschneidungen der Blätter.
- Die mehrdeutige Funktion wird auf der Riemannschen Fläche  $F$  eindeutig.  
Aber: Lokalisierung eines Punktes  $z \in F$  durch  $z = re^{i\phi}$  mit  $-\pi < \phi \leq \pi$  nicht mehr ausreichend!
- Wahl der Verzweigungsschnitte nahezu willkürlich (keine Kreuzung von Schnitten!).  
 $\hookrightarrow$  Änderung von  $\alpha$  in obigen Beispielen.
- Verzweigungspunkte eindeutig festgelegt.

Für die präzise Definition sowie die Theorie Riemannscher Flächen siehe z.B. [2]!

### 2.3.3 Harmonische Funktionen

**Definition 2.6** („Harmonische Funktion“)

Eine Funktion  $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf dem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar ist, heißt „harmonisch“, falls  $\Delta\Phi := \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$ .

**Satz 2.13** Sei  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  auf dem Gebiet  $G$  holomorph. Dann sind  $u$  und  $v$  auf  $G$  harmonisch, und die Gradientenfelder  $\nabla u$  und  $\nabla v$  stehen senkrecht aufeinander.

**Beweis:**

Vorgriff auf Satz 3.8:

$f''$ , und damit alle 2. part. Ableitungen von  $u$  und  $v$ , existiert auf  $G$  und sind dort stetig.

Aus den Cauchy-Riemannschen Dglen. folgt:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_x)_x = (v_y)_x = (v_x)_y = -(u_y)_y = -u_{yy}, \\ v_{xx} &= (v_x)_x = -(u_y)_x = -(u_x)_y = -(v_y)_y = -v_{yy}. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \Delta u = \Delta v = 0.$$

Ferner gilt mit  $\nabla u = (u_x, u_y)^T$  und  $\nabla v = (v_x, v_y)^T$ :

$$\nabla u \cdot \nabla v = u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0.$$

q.e.d.

#### Anwendungen in der Physik

↔ Lösung der Laplace-Gleichung  $\Delta\Phi = 0$  für

- Elektrostatik:  $\Delta\Phi(x, y) = 0$ .

↔ Elektrostatisches Potential  $\Phi(x, y)$  mit Translationsinvarianz in  $x_3$ -Richtung;  
elektrische Feldstärke  $\vec{E}(x, y) = -\nabla\Phi(x, y)$ .

Sei  $f = u + iv$  holomorph.

⇒  $\Phi(x, y) = u(x, y)$  ist mögliches Potential, wobei:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \text{const.}: && \text{Äquipotentiallinien,} \\ v(x, y) &= \text{const.}: && \text{Feldlinien.} \end{aligned}$$

- Strömungsmechanik: Wirbelfreie, stationäre Strömung bei konstanter Dichte  $\rho$ .

↔ Beschreibung durch Geschwindigkeitsfeld  $\vec{V}(x, y)$  mit:

$$\begin{aligned} \text{Kontinuitätsgleichung (Massenbilanz):} \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}(x, y)) = 0. \\ & \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad \text{da } \rho = \text{const.} \end{aligned}$$

$$\text{Wirbelfreiheit:} \quad \nabla \times \vec{V} = 0.$$

⇒ ∃ „Geschwindigkeitspotential“  $\Phi$  mit  $\vec{V} = \nabla\Phi$  und  $\Delta\Phi = \nabla \cdot \vec{V} = 0$ .

Bei Translationsinvarianz in  $x_3$ -Richtung:  $\vec{V} = \vec{V}(x, y)$ .

Sei  $f = u + iv$  holomorph.

⇒  $\Phi(x, y) = u(x, y)$  ist mögliches Geschwindigkeitspotential, wobei:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \text{const.}: && \text{Äquipotentiallinien,} \\ v(x, y) &= \text{const.}: && \text{Stromlinien (} v = \text{„Stromfunktion“).} \end{aligned}$$

**Beispiele:**

Einfache Strömungsprofile:  $f(z) = u + iv$ ,  $\Phi = u$ ,  $\vec{V} = \nabla\Phi$ ,  $z = x + iy = re^{i\phi}$ .

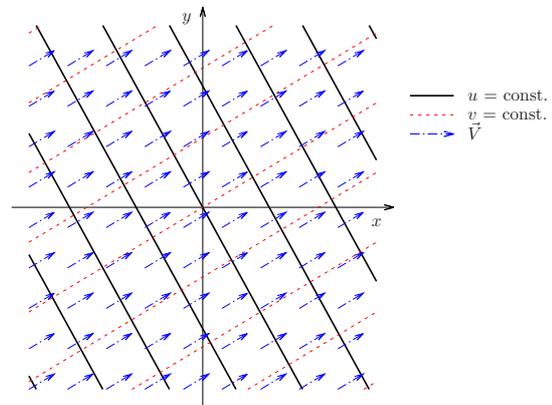
- Gleichförmige Strömung:

$$f(z) = \bar{c}z = |c|(x \cos \gamma + y \sin \gamma) + i|c|(-x \sin \gamma + y \cos \gamma), \quad c = |c|e^{i\gamma} \in \mathbb{C}.$$

$$\Rightarrow u = |c|(x \cos \gamma + y \sin \gamma),$$

$$v = |c|(-x \sin \gamma + y \cos \gamma),$$

$$\vec{V} = |c| \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix} = \text{const.}$$



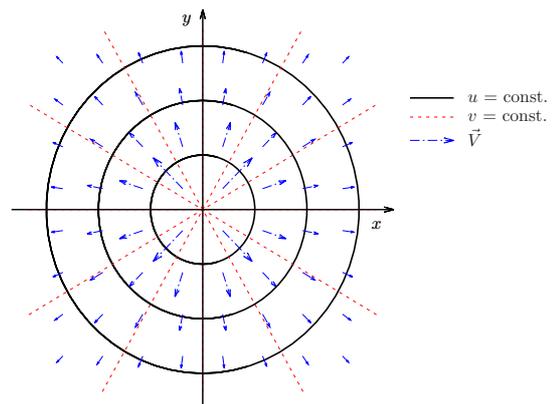
- Strömungsquelle bzw. -senke:

$$f(z) = a \log(z) = a \ln |z| + ia \arg z = a \ln r + ia\phi, \quad a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

$$\Rightarrow u = a \ln r,$$

$$v = a\phi,$$

$$\vec{V} = \frac{a}{r} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}.$$



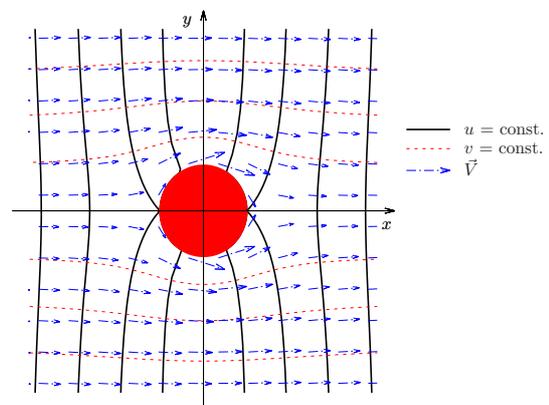
- Umflossener Kreiszyylinder:

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left( re^{i\phi} + \frac{e^{-i\phi}}{r} \right), \quad |z| = r > 1.$$

$$\Rightarrow u = \frac{\cos \phi}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right),$$

$$v = \frac{\sin \phi}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right),$$

$$\vec{V} = \frac{1}{2r^2} \begin{pmatrix} r^2 - \cos(2\phi) \\ -\sin(2\phi) \end{pmatrix}.$$



**Randwertprobleme in der Praxis:**

Problem: Harmonische Funktion  $\Phi(x, y)$  gesucht mit  $\Phi = c \in \mathbb{R}$  auf Kurve  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ,  
 d.h.  $\Phi(\xi(t), \eta(t)) = c$  für  $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t)) \in \mathbb{R}^2, t \in I = (t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$ .

$\Leftrightarrow$  Suche z.B. holomorphe Funktion  $f = u+iv$ , die die Kurve  $\alpha_\gamma = \{\xi(t)+i\eta(t) \mid t \in I\}$   
 auf ein Intervall der reellen bzw. imaginären Achse abbildet:

$$\text{Im}(f(\alpha_\gamma(t))) = v(\xi(t), \eta(t)) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \text{Re}(f(\alpha_\gamma(t))) = u(\xi(t), \eta(t)) = 0 \quad \forall t.$$

$\Rightarrow$  Lösungsfunktion:  $\Phi(x, y) = v(x, y) + c$  bzw.  $\Phi(x, y) = u(x, y) + c$ .

**Wichtige Sätze zur praktischen Anwendung**

Lösungen der Laplace-Gleichung  $\Delta\Phi = 0$  zu verschiedenen Randbedingungen können durch holomorphe Abbildungen ineinander übergeführt werden:

**Satz 2.14** (Invarianz harmonischer Funktionen)

Sei  $f : G \rightarrow \tilde{G}$  eine holomorphe Funktion zwischen Gebieten  $G, \tilde{G} \subset \mathbb{C}$  und  $\tilde{\Phi} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle harmonische Funktion. Dann ist  $\Phi = \tilde{\Phi} \circ f : G \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls harmonisch.

**Beweis:**

Vorgriff auf Satz 3.8:

$f''$ , und damit alle 2. partiellen Ableitungen von  $u$  und  $v$ , existiert auf  $G$  und ist dort stetig.

Notation:  $\tilde{\Phi}(f = u + iv) = \tilde{\Phi}(u, v), \quad \Phi(z = x + iy) = \Phi(x, y) = \tilde{\Phi}(u(x, y), v(x, y)).$

Anwendung der Kettenregel liefert:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= (\tilde{\Phi} \circ f)_x = \tilde{\Phi}_u u_x + \tilde{\Phi}_v v_x, \\ \Phi_{xx} &= (\tilde{\Phi}_u u_x + \tilde{\Phi}_v v_x)_x \\ &= (\tilde{\Phi}_{uu} u_x + \tilde{\Phi}_{uv} v_x) u_x + \tilde{\Phi}_u u_{xx} + (\tilde{\Phi}_{vu} u_x + \tilde{\Phi}_{vv} v_x) v_x + \tilde{\Phi}_v v_{xx} \\ \Phi_{yy} &= \dots = (\tilde{\Phi}_{uu} u_y + \tilde{\Phi}_{uv} v_y) u_y + \tilde{\Phi}_u u_{yy} + (\tilde{\Phi}_{vu} u_y + \tilde{\Phi}_{vv} v_y) v_y + \tilde{\Phi}_v v_{yy} \\ \Delta\Phi &= \Phi_{xx} + \Phi_{yy} \\ &= \underbrace{\tilde{\Phi}_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + \tilde{\Phi}_{vv}(v_x^2 + v_y^2)}_{= \tilde{\Phi}_{uu}(u_x^2 + u_y^2 - v_x^2 - v_y^2) = \tilde{\Phi}_{uu}(u_x^2 + u_y^2 - u_x^2 - u_y^2) = 0} + 2\tilde{\Phi}_{uv} \underbrace{(v_x u_x + v_y u_y)}_{= -u_y u_x + u_x u_y = 0} \\ &\quad + \underbrace{\tilde{\Phi}_u (u_{xx} + u_{yy})}_{= \Delta u = 0} + \underbrace{\tilde{\Phi}_v (v_{xx} + v_{yy})}_{= \Delta v = 0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

q.e.d.

**Satz 2.15** (Lokale Charakterisierung harmonischer Funktionen)

Sei  $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf dem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  harmonische Funktion. Dann gibt es zu jedem Punkt  $z_0 \in G$  eine Umgebung  $U \subset G$  und eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass  $\Phi = \text{Re}(f)$  oder  $\Phi = \text{Im}(f)$  auf  $U$ .

**Beweis:** Siehe z.B. [6].



# Kapitel 3

## Komplexe Integration

### 3.1 Komplexe Kurvenintegrale

**Definition 3.1** („Komplexes Kurvenintegral“)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine in  $D \subset \mathbb{C}$  stetige Funktion und  $\alpha : [t_0, t_1] \rightarrow D$  ein „Integrationsweg“, d.h. eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann das „komplexe Kurvenintegral“ entlang  $\alpha$  ist definiert durch:

$$\int_{\alpha} dz f(z) := \int_{t_0}^{t_1} dt f(\alpha(t)) \dot{\alpha}(t) \quad (3.1)$$

**Anmerkungen:**

- „Stückweise stetig diff'bar“ = stetig diff'bar bis auf endlich viele Punkte.
- Sei  $\alpha(t) = a(t) + ib(t)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ , d.h.  $\dot{\alpha}(t) := \frac{d\alpha}{dt}(t) = \dot{a}(t) + i\dot{b}(t)$ . Dann ist  $\vec{t}_{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix}$  der Tangentenvektor an die Kurve in  $\alpha(t)$  im  $\mathbb{R}^2$ .
- Die rechte Seite von (3.1) beruht auf der Definition reeller Integrale:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \\ \int_{\alpha} dz f(z) &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( u(a(t), b(t)) \dot{a}(t) - v(a(t), b(t)) \dot{b}(t) \right) \\ &\quad + i \int_{t_0}^{t_1} dt \left( u(a(t), b(t)) \dot{b}(t) + v(a(t), b(t)) \dot{a}(t) \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

↔ Berechnung wie in der reellen Analysis.

- Integrale über geschlossene Wege  $\alpha$ , d.h. Wege mit  $\alpha(t_0) = \alpha(t_1)$ , werden oft durch  $\oint_{\alpha}$  gekennzeichnet. Die Orientierung eines geschlossenen Weges ist positiv (negativ), wenn dieser in  $\mathbb{C}$  entgegen dem (im) Uhrzeigersinn durchlaufen wird.
- „Uneigentliche Integrale“, in denen  $\alpha(t) \rightarrow \infty$  für ein  $t \rightarrow \hat{t}$ , sind gesondert zu behandeln.

**Satz 3.1** (Eigenschaften von Kurvenintegralen)

Seien  $f, f_1, f_2$  stetige Funktionen und  $\alpha$  wie in Definition 3.1.

a) Linearität:

$$\int_{\alpha} dz (c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)) = c_1 \int_{\alpha} dz f_1(z) + c_2 \int_{\alpha} dz f_2(z), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \quad (3.3)$$

b) Sei  $\tau : [s_0, s_1] \rightarrow [t_0, t_1]$  eine Umparametrisierung der Kurve  $\alpha$ , d.h.  $(\alpha \circ \tau)(s) = \alpha(\tau(s))$  mit  $\tau(s_0) = t_0$  und  $\tau(s_1) = t_1$ . Dann gilt:

$$\int_{\alpha} dz f(z) = \int_{\alpha \circ \tau} dz f(z). \quad (3.4)$$

c) Sei  $\alpha$  zusammengesetzt aus  $\alpha_1 : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\alpha_2 : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{C}$ , d.h.  $\alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_1)$ . Dann gilt:

$$\int_{\alpha} dz f(z) = \int_{\alpha_1} dz f(z) + \int_{\alpha_2} dz f(z). \quad (3.5)$$

d) Sei  $\tilde{\alpha} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$  der umgekehrte Weg zu  $\alpha$ , d.h.  $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t_1 + t_0 - t)$ . Dann wird definiert  $-\alpha := \tilde{\alpha}$ , und es gilt:

$$\int_{\tilde{\alpha}} dz f(z) = \int_{-\alpha} dz f(z) = - \int_{\alpha} dz f(z). \quad (3.6)$$

e) Falls  $f$  auf einem kompakten Weg  $\alpha$  beschränkt, d.h.  $M = \max_{z \in \alpha} |f(z)| < \infty$ , gilt:

$$\left| \int_{\alpha} dz f(z) \right| \leq M L_{\alpha}, \quad \text{wobei} \quad L_{\alpha} = \int_{\alpha} |dz| = \int_{t_0}^{t_1} dt |\dot{\alpha}(t)| = \text{Bogenlänge von } \alpha. \quad (3.7)$$

**Beweis:**

- a)–d) folgen unmittelbar aus reeller Analysis.

Exemplarisch für b) durch Anwendung der Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \circ \tau} dz f(z) &= \int_{s_0}^{s_1} ds f((\alpha \circ \tau)(s)) \underbrace{\frac{d}{ds}(\alpha \circ \tau)(s)}_{= \frac{d}{ds} \alpha(\tau(s)) = \frac{d\alpha}{d\tau} \frac{d\tau}{ds}} = \int_{s_0}^{s_1} ds f(\alpha(\tau(s))) \frac{d\alpha}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt f(\alpha(t)) \frac{d\alpha}{dt}. \end{aligned}$$

- e): Abschätzung von Partialsummen der zugrundeliegenden reellen Integrale:

$$\int_{\alpha} dz f(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Delta t f(\alpha(t_k)) \dot{\alpha}(t_k), \quad t_k = t_0 + k\Delta t, \quad \Delta t = \frac{t_1 - t_0}{N}.$$

$$\left| \sum_k \Delta t f(\alpha(t_k)) \dot{\alpha}(t_k) \right| \leq \sum_k \Delta t |f(\alpha(t_k))| |\dot{\alpha}(t_k)| \leq M \sum_k \Delta t |\dot{\alpha}(t_k)|.$$

Im Limes  $N \rightarrow \infty$  folgt:  $\left| \int_{\alpha} dz f(z) \right| \leq M \int dt |\dot{\alpha}(t)| = M L_{\alpha}. \quad \text{q.e.d.}$

**Beispiele:**

- Potenzfunktion:  $f(z) = (z - z_0)^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Weg = Kreis um  $z_0 \in \mathbb{C}$ :  $\alpha = K_r(z_0) = \{z \mid z(t) = z_0 + re^{it}, 0 \leq t < 2\pi\}.$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \oint_{\alpha} dz (z - z_0)^n &= \int_0^{2\pi} dt r^n e^{int} i r e^{it} = i r^{n+1} \int_0^{2\pi} dt e^{i(n+1)t} \\
 &= i r^{n+1} \int_0^{2\pi} dt [\cos((n+1)t) + i \sin((n+1)t)]. \\
 &= \begin{cases} \frac{i r^{n+1}}{n+1} [\sin((n+1)t) - i \cos((n+1)t)] \Big|_0^{2\pi}, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

- Exponentialfunktion:  $f(z) = e^z.$

Wegstrecke:  $\alpha = \{z \mid z(t) = a_0 + (a_1 - a_0)t, t \in [0, 1], a_0, a_1 \in \mathbb{C}\}.$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_{\alpha} dz e^z &= \int_0^1 dt e^{a_0 + (a_1 - a_0)t} (a_1 - a_0) = (a_1 - a_0) e^{a_0} \underbrace{\int_0^1 dt e^{(a_1 - a_0)t}}_{\text{wie reelles Integral}} \\
 &\hspace{15em} \text{(zerlege z.B. in Re und Im)} \\
 &= e^{a_0} e^{(a_1 - a_0)t} \Big|_0^1 = e^{a_1} - e^{a_0}. \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Wegunabhängigkeit, falls  $\alpha = \text{Polygonzug } a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_N:$

$$\int_{\alpha} dz e^z = \sum_{k=1}^N (e^{a_k} - e^{a_{k-1}}) = e^{a_N} - e^{a_0}. \tag{3.10}$$

$\hookrightarrow$  Verallgemeinerung auf beliebigen Integrationsweg  $\alpha$  durch Approximation durch Polygonzug!

## 3.2 Cauchyscher Integralsatz

**Satz 3.2** („Cauchyscher Integralsatz“)

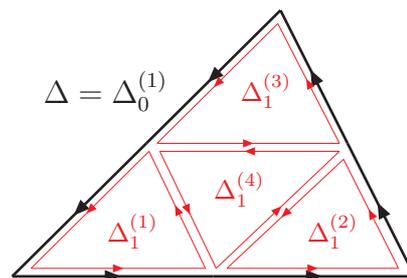
Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf dem endlichen, einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  und  $\alpha$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, die ganz in  $G$  verläuft. Dann gilt:

$$\oint_{\alpha} dz f(z) = 0. \quad (3.11)$$

**Beweis:**

a) Beweis für Dreiecksweg  $\Delta$  mit Umfang  $L$ :

Sukzessive Zerlegung von  $\Delta_n^{(k)}$  in je 4 ähnliche Dreiecke  $\Delta_{n+1}^{(j)}$  durch Verbinden der Mittelpunkte der Seiten.



$\hookrightarrow$  Nach  $n$  Schritten:  $4^n$  Dreiecke  $\Delta_n^{(k)}$  mit  $k = 1, \dots, 4^n$  mit Umfang  $L_n = 2^{-n}L$ .

Da sich Integrale über innere Linien aufheben, gilt:

$$\oint_{\Delta} dz f(z) = \sum_{k=1}^{4^n} \oint_{\Delta_n^{(k)}} dz f(z).$$

Wähle eine Folge von geschachtelten Dreiecken  $\Delta_n$ , so dass

$$\Delta_n = \Delta_n^{(k_n)} \subset \Delta_{n-1} \quad \text{mit} \quad \left| \oint_{\Delta_n} dz f(z) \right| = \max_{\Delta_n^{(k)} \subset \Delta_{n-1}} \left| \oint_{\Delta_n^{(k)}} dz f(z) \right|.$$

$\Rightarrow$  Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\Delta} dz f(z) \right| &= \left| \sum_{k=1}^4 \oint_{\Delta_1^{(k)}} dz f(z) \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \oint_{\Delta_1^{(k)}} dz f(z) \right| \leq 4 \left| \oint_{\Delta_1} dz f(z) \right| \\ &\leq \dots \leq 4^n \left| \oint_{\Delta_n} dz f(z) \right|. \end{aligned}$$

Die Folge  $\{\Delta_n\}$  zieht sich auf einen Punkt  $z_0 \in G$  zusammen, d.h.  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \{z_0\}$ .

Da  $f$  in einer Umgebung  $U$  von  $z_0$  diff'bar, gilt nach Satz 2.8:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + |z - z_0| f_0(z) \quad \text{mit} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f_0(z) = 0.$$

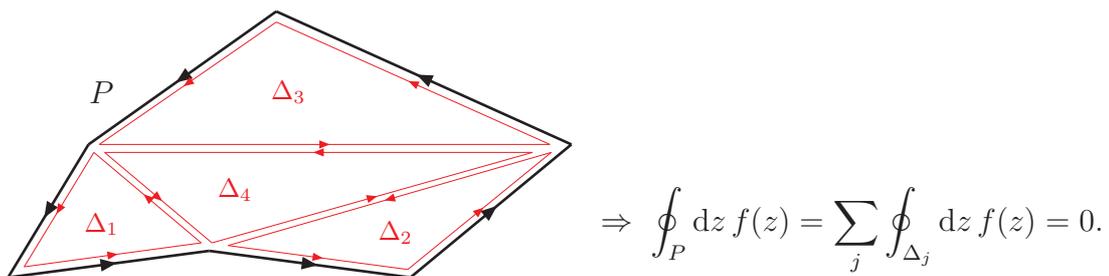
$\Rightarrow$  Zu jedem  $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass  $|f_0(z)| < \epsilon/L^2 \forall z \in D_{\delta}(z_0)$ .

Für hinreichend große  $n$  gilt  $\Delta_n \subset D_\delta(z_0)$ , so dass gilt:

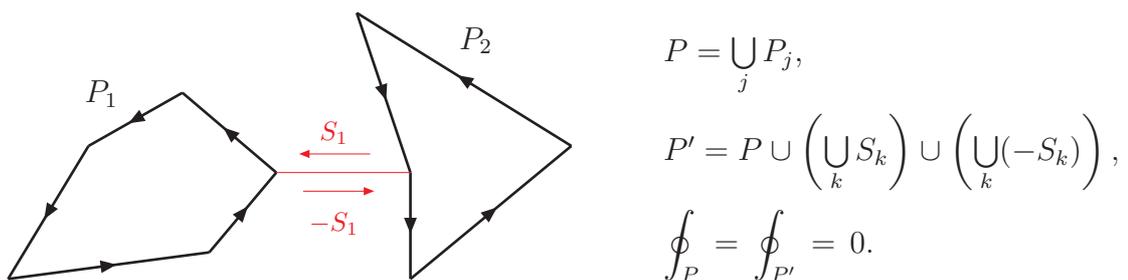
$$\begin{aligned} \left| \oint_{\Delta_n} dz f(z) \right| &= \left| \oint_{\Delta_n} dz \left[ \underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)}_{\text{Integral ist trivial 0.}} + |z - z_0| f_0(z) \right] \right| \\ &= \left| \oint_{\Delta_n} dz |z - z_0| f_0(z) \right| \leq \underbrace{\max_{z \in \Delta_n} |f_0(z)|}_{< \epsilon/L^2} \underbrace{\max_{z \in \Delta_n} |z - z_0|}_{< L_n} L_n \\ &< \epsilon \frac{L_n^2}{L^2} = 4^{-n} \epsilon. \\ \Rightarrow \oint_{\Delta} dz f(z) &= 0, \text{ da: } \left| \oint_{\Delta} dz f(z) \right| \leq 4^n \left| \oint_{\Delta_n} dz f(z) \right| < 4^n 4^{-n} \epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

b) Verallgemeinerung von  $\oint_{\Delta} dz f(z) = 0$  auf beliebige Polygonzüge:

Hilfssatz („Triangulierung“): Das Innere eines einfach geschlossenen Polygons  $P$  lässt sich durch Diagonale in endlich viele Dreiecke  $\Delta_j$  zerlegen (Beweis siehe z.B. [2], Kap. I, §6, Satz E).



Falls  $P$  mehrere geschlossene Komponenten  $P_j$  besitzt, können die  $P_j$  durch Strecken  $S_k$  verbunden werden:



c) Approximation des Weges  $\alpha$  mit Länge  $L_\alpha$  durch Polygonzug:

Da  $\alpha$  kompakt ist und ganz in der offenen Menge  $G$  liegt,  $\exists$  kompakte Menge  $M \in G$  mit  $\alpha \subset M_0 = M \setminus \partial M$ .

Da  $f$  stetig in  $G$ , ist  $f$  gleichmäßig stetig auf  $M$  nach Satz 2.1, d.h. zu jedem  $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass:

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon / (2L_\alpha) \quad \forall z_1, z_2 \in M \quad \text{mit} \quad |z_1 - z_2| < \delta.$$

Sei  $\alpha(t)$  mit  $t \in [t_0, t_1]$  eine Parametrisierung von  $\alpha$ . Dann existiert eine Partition  $\tau_0 = t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_1$  mit  $z_k = \alpha(\tau_k)$ , so dass:

$$\left| \oint_{\alpha} dz f(z) - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{mit} \quad |z_k - z_{k-1}| < \delta, \quad k = 1, \dots, n.$$

Sei  $P$  das von den Strecken  $S(z_{k-1}, z_k)$  von  $z_{k-1}$  nach  $z_k$  aufgespannte geschlossene Polygon, dann gilt ebenfalls:

$$\begin{aligned} \left| \oint_P dz f(z) - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{S(z_{k-1}, z_k)} dz \underbrace{[f(z) - f(z_k)]}_{|\dots| < \epsilon/(2L_{\alpha})} \right| \\ &< \frac{\epsilon}{2L_{\alpha}} L_{\alpha} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Da  $\oint_P dz f(z) = 0$ , ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} &\left| \oint_{\alpha} dz f(z) \right| \\ &= \left| \left[ \oint_{\alpha} dz f(z) - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right] - \left[ \oint_P dz f(z) - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right] \right| \\ &< \underbrace{\left| \left[ \oint_{\alpha} dz f(z) - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right] \right|}_{< \epsilon/2} + \underbrace{\left| \left[ \oint_P dz f(z) - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right] \right|}_{< \epsilon/2} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

q.e.d.

Verallgemeinerungen des Cauchyschen Integralsatzes:

**Satz 3.3**

Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf dem endlichen, einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  und auf  $\overline{G}$  stetig. Sei ferner  $\partial G$  ein zulässiger Integrationsweg, dann gilt:

$$\oint_{\partial G} dz f(z) = 0. \quad (3.12)$$

**Beweis:**

Strategie: Approximation von  $\partial G$  durch Polygon von innen (siehe [2]).

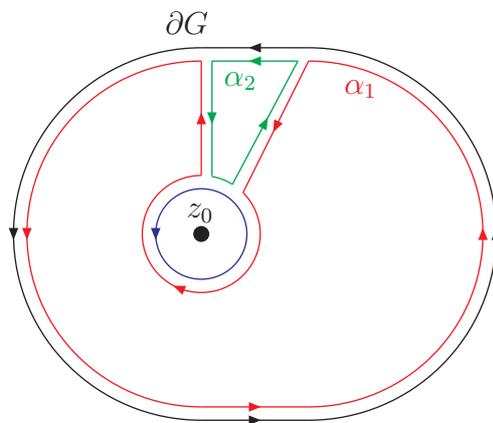
**Satz 3.4**

Sei  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig auf dem Abschluss  $\overline{G}$  des endlichen Gebietes  $G$  und holomorph auf  $G \setminus \{z_0\}$ . Sei ferner  $\partial G$  ein zulässiger Integrationsweg, dann gilt:

$$\oint_{\partial G} dz f(z) = 0. \quad (3.13)$$

**Beweis:**

Zerlegung des Integrationsweges:  $\partial G = \alpha_1 + \alpha_2 + K_\delta(z_0)$ .



Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes sowie Stetigkeit von  $f$  innerhalb  $K_\delta(z_0)$ :

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\partial G} dz f(z) \right| &= \left| \oint_{\alpha_1 + \alpha_2 + K_\delta(z_0)} dz f(z) \right| = \left| \oint_{K_\delta(z_0)} dz f(z) \right| \leq \underbrace{\max_{z \in K_\delta(z_0)} \{|f(z)|\}}_{= M < \infty} 2\pi\delta \\ &< \epsilon \quad \text{für } \delta < \epsilon/(2\pi M) \text{ zu beliebig vorgegebenem } \epsilon > 0. \end{aligned}$$

q.e.d.

**Satz 3.5** (Existenz einer „Stammfunktion“)

Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  und  $\oint_{\alpha} dz f(z) = 0$  für alle geschlossenen Wege  $\alpha \subset G$ . Dann existiert eine holomorphe „Stammfunktion“  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  von  $f$ , d.h.  $F' = f$ , und für das Integral entlang des Weges  $\alpha(a_1, a_2)$  von  $a_1$  nach  $a_2$  ( $a_1, a_2 \in G$ ) gilt:

$$\int_{\alpha(a_1, a_2)} dz f(z) = F(a_2) - F(a_1). \quad (3.14)$$

Die Funktion  $F$  ist bis auf eine additive Konstante eindeutig.

**Beweis:**

- Existenz: Definiere:  $F(z) = \int_{\alpha(a_0, z)} d\zeta f(\zeta)$  für ein festes  $a_0 \in G$ .

Da  $\oint dz f(z) = 0$  für geschlossene Wege, ist  $F$  unabhängig vom Weg von  $a_0$  nach  $z$ , d.h. eine wohl definierte Funktion von  $z$ . Jeder Punkt  $z \in G$  ist durch einen Weg von  $a_0$  aus erreichbar, da  $G$  einfach zusammenhängend. Ferner ist (3.14) erfüllt per Konstruktion.

Beweis von  $F'(z) = f(z)$  (und damit Holomorphie von  $F$ ) durch Grenzwertbildung:

Wähle  $\Delta z$  so klein, dass  $\overline{D}_{|\Delta z|}(z) \subset G$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{\alpha(z, z + \Delta z)} d\zeta f(\zeta) - f(z) \right| \\ &\text{als Strecke wählbar (Wegunabhängigkeit des Integrals)} \\ &= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_0^1 dt f(z + t\Delta z) \Delta z - f(z) \right| \\ &= \left| \int_0^1 dt \underbrace{[f(z + t\Delta z) - f(z)]}_{|\dots| < \epsilon \text{ für hinreichend kleine } |\Delta z|,} \right| \\ &\quad \text{da } f \text{ gleichmäßig stetig } (\epsilon > 0 \text{ beliebig wählbar}) \\ &< \epsilon \quad \text{nach Satz 3.1 e).} \end{aligned}$$

- Eindeutigkeit:

Seien  $F_1$  und  $F_2$  beide Stammfunktionen von  $f$ , d.h.  $F_1' = F_2' = f$ .

$\Leftrightarrow g := F_1 - F_2$  ist holomorph mit Ableitung  $g'(z) = 0 \forall z \in G$ .

$\Leftrightarrow$  Cauchy-Riemannsche Dglen. für  $g(z) = g(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ :

$$\begin{aligned} u_x = v_x = 0 &\Rightarrow u = u(y), v = v(y), \text{ d.h. Fkten. von } y, \\ u_y = v_y = 0 &\Rightarrow u = u(x) = \text{const.}, v = v(x) = \text{const.} \\ &\Rightarrow g(z) = \text{const.} \end{aligned}$$

q.e.d.

**Anmerkung:**

Satz 3.5 gilt insbesondere für holomorphe Funktionen  $f$ .

**Beispiele:**

- Polynome:  $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad D = \mathbb{C}.$

$$\Rightarrow \text{Stammfunktion: } F(z) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k z^{k+1}}{k+1} + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

- Stammfunktionen für exp und trigonometrische Funktionen:  $D = \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{C}.$

$$f(z) = \exp(z) \quad \Rightarrow \quad F(z) = \exp(z) + c,$$

$$f(z) = \cos(z) \quad \Rightarrow \quad F(z) = \sin(z) + c,$$

$$f(z) = \sin(z) \quad \Rightarrow \quad F(z) = -\cos(z) + c.$$

- $f(z) = \frac{1}{z}, \quad D = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$

$$\Rightarrow F(z) = \log(z) \quad \text{hat Eigenschaft} \quad F'(z) = f(z).$$

Aber:  $F$  ist nicht Stammfunktion von  $f$  auf  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ !

Grund:  $D$  nicht einfach zusammenhängend.  $\Rightarrow \int \frac{dz}{z}$  nicht wegunabhängig in  $D$ .

$$\text{Beispiel: } \oint_{K_1(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 = F(1) - F(1).$$

Ausweg:

Einschränkung von  $f$  und  $F$  auf einfach zusammenhängendes Gebiet,  
z.B.  $D' = \mathbb{C} \setminus [0, -\infty)$ .  $\Rightarrow F$  Stammfunktion von  $f$  auf  $D'$ .

### 3.3 Cauchysche Integralformeln

**Satz 3.6** („1. Cauchysche Integralformel“)

Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf dem Gebiet  $G$  und  $\alpha \subset G$  eine geschlossene, positiv orientierte Kurve. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\alpha} dz \frac{f(z)}{z - z_0} = \begin{cases} f(z_0), & \text{falls } z_0 \in G \text{ innerhalb von } \alpha, \\ 0, & \text{falls } z_0 \in G \text{ außerhalb von } \alpha. \end{cases} \quad (3.15)$$

**Beweis:**

- $z_0$  außerhalb  $\alpha$ : Behauptung folgt aus Cauchyschem Integralsatz, da  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  holomorph innerhalb  $\alpha$ .
- $z_0$  innerhalb  $\alpha$ : Anwendung von Satz 3.4 auf  $g(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\alpha} dz g(z) = \oint_{\alpha} dz \frac{f(z)}{z - z_0} - \underbrace{\oint_{\alpha} dz \frac{f(z_0)}{z - z_0}}_{\substack{\text{Wegdeformation zu } K_{\epsilon}(z_0) \\ \text{wie in Beweis von Satz 3.4}}} \\ &= \oint_{\alpha} dz \frac{f(z)}{z - z_0} - f(z_0) \underbrace{\oint_{K_{\epsilon}(z_0)} dz \frac{1}{z - z_0}}_{= 2\pi i, \text{ nach (3.8)}} \\ &= \oint_{\alpha} dz \frac{f(z)}{z - z_0} - 2\pi i f(z_0). \end{aligned}$$

q.e.d.

**Beachte:** Integrand in (3.15) ist einfache, auf  $\alpha$  diff'bare Funktion von  $z_0$ .

$\hookrightarrow$  Falls Vertauschung von  $\frac{d}{dz_0}$  und  $\int$  erlaubt, könnte  $f'(z_0)$  aus  $f(z)$  berechnet werden.

$\hookrightarrow$  Durch rekursive Anwendung auf  $f'$  etc. könnte  $f^{(n)}(z_0)$  aus  $f(z)$  berechnet werden.

Vermutung in der Tat korrekt und hat weitreichende Konsequenzen!

**Satz 3.7** (Vertauschung von Integration und Differentiation)

Sei  $f(w, z)$  für  $w$  auf einem kompakten Weg  $\alpha$  stetig und für  $z$  aus einem Gebiet  $G$  komplex differenzierbar. Falls  $f_z(w, z) := \frac{\partial f}{\partial z}(w, z)$  für  $(w, z) \in (\alpha, G)$  stetig ist, dann gilt:

$$\frac{d}{dz} \int_{\alpha} dw f(w, z) = \int_{\alpha} dw f_z(w, z). \quad (3.16)$$

**Beweis:**

Wähle  $\Delta z$  so klein, dass die Strecke  $\gamma$  von  $z$  nach  $z + \Delta z$  ganz in  $G$  verläuft. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} d\zeta f_z(w, \zeta) &= f(w, z + \Delta z) - f(w, z), \\ \int_{\gamma} d\zeta f_z(w, z) &= f_z(w, z) \int_{\gamma} d\zeta = f_z(w, z) \Delta z. \end{aligned}$$

Anwendung:

$$\begin{aligned} g(\Delta z) &:= \frac{1}{\Delta z} \left( \int_{\alpha} dw f(w, z + \Delta z) - \int_{\alpha} dw f(w, z) \right) - \int_{\alpha} dw f_z(w, z) \\ &= \int_{\alpha} dw \left( \frac{f(w, z + \Delta z) - f(w, z)}{\Delta z} - f_z(w, z) \right) \\ &= \int_{\alpha} dw \frac{1}{\Delta z} \int_{\gamma} d\zeta \left( f_z(w, \zeta) - f_z(w, z) \right). \end{aligned}$$

Da  $f_z$  stetig und  $\alpha$  kompakt,  $\exists$  zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass

$$\begin{aligned} \left| f_z(w, \zeta) - f_z(w, z) \right| &< \epsilon/L_{\alpha} \quad \forall |\Delta z| < \delta \text{ und } w \in \alpha. \\ \Rightarrow \left| \int_{\gamma} d\zeta \left( f_z(w, \zeta) - f_z(w, z) \right) \right| &< \frac{\epsilon}{L_{\alpha}} |\Delta z|. \\ \Rightarrow |g(\Delta z)| &< \frac{L_{\alpha}}{|\Delta z|} \underbrace{\max_{w \in \alpha} \left| \int_{\gamma} d\zeta \left( f_z(w, \zeta) - f_z(w, z) \right) \right|}_{< \epsilon |\Delta z| / L_{\alpha}} = \epsilon. \end{aligned}$$

$\Rightarrow g(\Delta z) \rightarrow 0$  für  $\Delta z \rightarrow 0$  und damit (3.16).

q.e.d.

**Anmerkung:**

Satz 3.7 bleibt korrekt für uneigentliche Integrale, falls  $\int_{\alpha} dw f(w, z)$  existiert und  $\int_{\alpha} dw f_z(w, z)$  gleichmäßig für  $z \in G$  konvergiert. (Beweis siehe Ref. [2].)

**Satz 3.8** („Allgemeine Cauchysche Integralformeln“)

Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf dem Gebiet  $G$  und  $\alpha$  eine geschlossene, positiv orientierte Kurve, die ganz in  $G$  liegt. Dann ist  $f$  auf  $G$  beliebig oft diff'bar, und es gilt für  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint_{\alpha} dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \begin{cases} f^{(n)}(z_0), & \text{falls } z_0 \in G \text{ innerhalb von } \alpha, \\ 0, & \text{falls } z_0 \in G \text{ außerhalb von } \alpha. \end{cases} \quad (3.17)$$

**Beweis:**

Durch Induktion:

- $n = 0$ : korrekt nach Satz 3.6.
- $n \rightarrow n + 1$ : Anwendung von Satz 3.7:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(z) &= \frac{d}{dz} f^{(n)}(z) = \frac{d}{dz} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\alpha} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \stackrel{(3.16)}{=} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\alpha} d\zeta \frac{d}{dz} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_{\alpha} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}}. \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

**Satz 3.9** („Cauchysche Ungleichung“)

Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph in  $G$  und die Kreisscheibe  $\overline{D}_r(z_0)$  ganz in  $G$  enthalten. Dann gilt:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{z \in K_r(z_0)} |f(z)|. \quad (3.18)$$

**Beweis:**

Nach Satz 3.8 gilt:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{K_r(z_0)} dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{2\pi r}{r^{n+1}} \max_{z \in K_r(z_0)} |f(z)| = \frac{n!}{r^n} \max_{z \in K_r(z_0)} |f(z)|. \quad \text{q.e.d.}$$

**Satz 3.10** (Morera)

Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  und  $\oint_{\alpha} dz f(z) = 0$  für alle geschlossenen Wege  $\alpha \subset G$ . Dann ist  $f$  in  $G$  holomorph.

**Beweis:**

Nach Satz 3.5  $\exists$  eine holomorphe Stammfunktion  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F' = f$ .

$\Rightarrow F$  und damit  $f$  beliebig oft diff'bar nach Satz 3.8.

q.e.d.

### 3.4 Ganze Funktionen und Fundamentalsatz der Algebra

**Definition 3.2** („Ganze Funktion“)

Eine Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph ist, heißt „ganze Funktion“.

**Satz 3.11** (Liouville)

Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

**Beweis:**

Sei  $|f(z)| < M \forall z \in \mathbb{C}$ .

Dann gilt für beliebige  $\epsilon > 0$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$  nach Satz 3.9 mit  $r = \frac{M}{\epsilon}$ :

$$|f'(z_0)| \leq \frac{\max_{z \in K_r(z_0)} |f(z)|}{r} < \frac{M}{r} = \epsilon. \tag{3.19}$$

$\Rightarrow f'(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C}$ , d.h.  $f(z) = \text{const.}$  q.e.d.

**Anmerkung:**

Als „ganze rationale Funktionen“ kommen Polynomen eine besondere Bedeutung zu.

Hilfssatz zu Polynomen:

**Satz 3.12**

Zu jedem Polynom  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  vom Grad  $n$  (d.h.  $a_n \neq 0$ ) und jedem  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $r > 0$ , so dass für alle  $z$  mit  $|z| > r$  gilt:

$$(1 - \epsilon) |a_n| |z|^n < |P_n(z)| < (1 + \epsilon) |a_n| |z|^n. \tag{3.20}$$

**Beweis:**

Setze  $M = \max_k \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$ . Für jedes  $\epsilon > 0$  gilt dann für  $|z| > nM/\epsilon$ :

$$\left| \frac{P_n(z)}{a_n z^n} - 1 \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| |z|^{k-n} \leq \frac{nM}{|z|} < \epsilon.$$

$$\Leftrightarrow -\epsilon |a_n| |z|^n < P_n(z) - a_n z^n < \epsilon |a_n| |z|^n. \tag{3.21}$$

q.e.d.

**Satz 3.13** („Fundamentalsatz der Algebra“)

Jedes Polynom  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  vom Grad  $n$  ist darstellbar als:

$$P_n(x) = a_n (z - z_1) \cdots (z - z_n), \quad (3.21)$$

wobei verschiedene Nullstellen  $z_k$  von  $P_n$  gleich sein können.

**Beweis:**

- Existenz einer Nullstelle für  $n > 0$ :

Betrachte  $f(z) = 1/P_n(z)$ .

Nach Satz 3.12 gibt es z.B. für  $\epsilon = \frac{1}{2}$  ein  $r > 0$ , so dass:

$$\begin{aligned} |P_n(z)| &> \frac{|a_n| |z|^n}{2} > \frac{|a_n| r^n}{2} =: \frac{1}{M_1} \quad \forall |z| > r. \\ \Rightarrow |f(z)| &< M_1 \quad \forall |z| > r. \end{aligned}$$

Annahme:  $P_n(z)$  hat keine Nullstelle.  $\Rightarrow f(z)$  holomorph  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

$\Leftrightarrow f(z)$  beschränkt auf kompakten Gebieten, d.h.  $|f(z)| < M_2 \quad \forall |z| \leq r$ .

$\Leftrightarrow f(z)$  beschränkt auf  $\mathbb{C}$ :  $f(z) < \max\{M_1, M_2\} \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .

$\Leftrightarrow f(z) = \text{const.}$  nach Satz 3.11.

$\Leftrightarrow$  Widerspruch, da  $n > 0$ .

- Induktion in  $n$ :

–  $n = 0$ : Satz trivial erfüllt.

–  $n \rightarrow n + 1$ : Wie oben gezeigt, hat  $P_{n+1}(z)$  mindestens eine Nullstelle  $z_{n+1}$ .

Anwendung des Divisionsalgorithmus liefert:

$$P_{n+1}(z) = (z - z_{n+1}) \underbrace{p_n(z)}_{\text{Polynom vom Grad } n} + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

$$\Leftrightarrow 0 = P_{n+1}(z_{n+1}) = c.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{n+1}(z) &= (z - z_{n+1})p_n(z) \\ &= a_{n+1} (z - z_1) \cdots (z - z_{n+1}) \text{ nach Induktionsvoraussetzung.} \end{aligned}$$

q.e.d.

# Kapitel 4

## Potenzreihen und analytische Funktionen

### 4.1 Funktionenreihen

**Definition 4.1** (Konvergenz von Funktionenreihen)

Sei  $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$  eine Folge von Funktionen  $f_k : M \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $M \subset \mathbb{C}$ .

a)  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  heißt „punktweise konvergent“ gegen eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ , falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = f(z) \quad \forall z \in M.$$

b)  $\sum_k f_k$  heißt „gleichmäßig konvergent“ gegen  $f$ , falls zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n_0$  existiert,

so dass für alle  $n \geq n_0$  gilt: 
$$\sup_M \left| \sum_{k=0}^n f_k(z) - f(z) \right| < \epsilon \quad \forall z \in M.$$

c)  $\sum_k f_k$  heißt „kompakt konvergent“ auf  $M$ , falls die Reihe auf jeder kompakten Teilmenge  $K \subset M$  gleichmäßig konvergiert.

**Satz 4.1** (Hierarchie von Konvergenzen)

Jede gleichmäßig konvergente Reihe  $\sum_k f_k$  ist auch kompakt konvergent; jede gleichmäßig oder kompakt konvergente Reihe ist auch punktweise konvergent.

**Beweis:** trivial.

**Satz 4.2** (Stetigkeit von Reihen)

Sei  $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$  eine Folge von stetigen Funktionen  $f_k : M \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$  gleichmäßig konvergent. Dann ist auch die Grenzfunktion  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$  in  $M$  stetig.

**Beweis:**

Sei  $\epsilon > 0$  vorgegeben und  $F_n(z) := \sum_{k=0}^n f_k(z)$ .

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  existiert ein  $n_0$ , so dass

$$|F_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall z \in M.$$

Da  $F_n$  stetig in  $z_0 \in M$ , existiert ein  $\delta > 0$ , so dass

$$|F_n(z) - F_n(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{falls } |z - z_0| < \delta.$$

$\Rightarrow f$  stetig in  $z_0$ , da:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \underbrace{|f(z) - F_n(z)|}_{< \epsilon/3} + \underbrace{|F_n(z) - F_n(z_0)|}_{< \epsilon/3} + \underbrace{|F_n(z_0) - f(z_0)|}_{< \epsilon/3} < \epsilon.$$

q.e.d.

**Satz 4.3** (Weierstrass-Kriterium)

Sei  $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$  eine Folge von stetigen Funktionen  $f_k : M \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine konvergente Reihe reeller Zahlen  $a_k \geq 0$ . Falls es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$|f_k(z)| \leq a_k \quad \forall z \in M \text{ und } k \geq n_0,$$

dann konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  auf  $M$  absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion auf  $M$ .

**Beweis:**

Die absolute und gleichmäßige Konvergenz folgt direkt aus dem Majorantenkriterium (Satz 1.11).

$$\Rightarrow f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z), \quad z \in M.$$

$f$  ist stetig nach Satz 4.2.

q.e.d.

**Satz 4.4** (Vertauschung von Summation und Integration)

Sei  $\{f_k\}_{k=0}^\infty$  eine Folge von Funktionen  $f_k : M \rightarrow \mathbb{C}$ , die auf dem kompakten Integrationsweg  $\alpha \subset M$  stetig sind. Falls  $f = \sum_{k=0}^\infty f_k$  auf  $\alpha$  gleichmäßig konvergiert, dann gilt:

$$\int_\alpha dz f(z) = \sum_{k=0}^\infty \int_\alpha dz f_k(z). \quad (4.1)$$

**Beweis:**

Sei  $L_\alpha < \infty$  die Länge von  $\alpha$ . Zu gegebenem  $\epsilon > 0 \exists n_0$ , so dass

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n f_k(z) \right| < \epsilon/L_\alpha \quad \forall n > n_0, z \in \alpha.$$

Da  $f$  nach Satz 4.2 stetig und damit integrierbar auf  $\alpha$ , folgt:

$$\left| \int_\alpha dz f(z) - \int_\alpha dz \left( \sum_{k=0}^n f_k(z) \right) \right| = \left| \int_\alpha dz \left( f(z) - \sum_{k=0}^n f_k(z) \right) \right| < \frac{\epsilon}{L_\alpha} L_\alpha = \epsilon. \quad \text{q.e.d.}$$

**Satz 4.5** (Holomorphie von Funktionenreihen)

Sei  $\{f_k\}_{k=0}^\infty$  eine Folge von holomorphen Funktionen  $f_k : G \rightarrow \mathbb{C}$  auf dem Gebiet  $G$ . Konvergiert die Reihe  $f = \sum_{k=0}^\infty f_k$  kompakt auf  $G$ , dann ist  $f$  auf  $G$  holomorph, und die folgenden Reihen für die Ableitungen von  $f$  konvergieren kompakt:

$$f^{(l)}(z) = \sum_{k=0}^\infty f_k^{(l)}(z), \quad l \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

**Beweis:**

- Holomorphie von  $f$ :

Mit  $f_k$  ist auch  $f$  stetig auf  $G$  (Satz 4.2), so dass (4.1) angewendet werden kann.

Für jedes  $z_0 \in G \exists r > 0$ , so dass  $D_r(z_0) \in G$ . Da  $f_k$  holomorph, gilt für alle geschlossenen Wege  $\alpha \subset D_r(z_0)$ :  $\oint_\alpha dz f_k(z) = 0$ .

$$\Rightarrow \oint_\alpha dz f(z) \stackrel{(4.1)}{=} \sum_{k=0}^\infty \oint_\alpha dz f_k(z) = 0. \quad (4.3)$$

$\Rightarrow$  Holomorphie von  $f$  auf  $D_r(z_0)$  in allen  $z_0 \in G$  nach Satz 3.10.

- Berechnung von  $f^{(l)}$  mit Cauchyscher Integralformel (Satz 3.8):

Integrationsweg = Kreis um  $z_0$  mit Radius  $\rho = r/2$ , so dass  $K_\rho(z_0) \subset D_r(z_0)$ .

Abschätzung von  $f$  für  $z \in K \subset G$  ( $K$  kompakt) durch kompakte Konvergenz auf  $G$ :

Für jedes  $\epsilon > 0 \exists n_0$ , so dass  $|f(z) - \sum_{k=0}^n f_k(z)| < \epsilon \cdot \rho^l / l! \forall z \in K$  und  $n > n_0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| f^{(l)}(z_0) - \sum_{k=0}^n f_k^{(l)}(z_0) \right| &= \left| \frac{l!}{2\pi i} \oint_{K_\rho(z_0)} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^{l+1}} - \sum_{k=0}^n \frac{l!}{2\pi i} \oint_{K_\rho(z_0)} dz \frac{f_k(z)}{(z-z_0)^{l+1}} \right| \\ &= \frac{l!}{2\pi} \left| \oint_{K_\rho(z_0)} dz \frac{f(z) - \sum_{k=0}^n f_k(z)}{(z-z_0)^{l+1}} \right| < \frac{l!}{2\pi} \frac{\epsilon \cdot \rho^l}{l! \rho^{l+1}} 2\pi \rho = \epsilon. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  (4.2).

q.e.d.

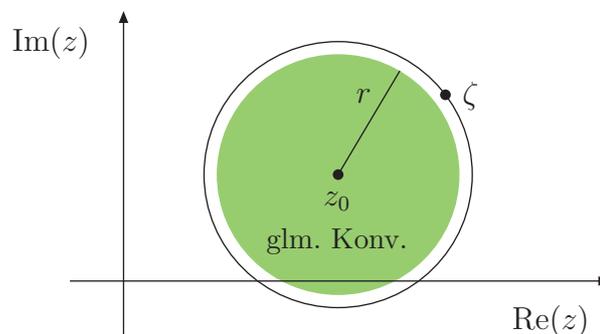
## 4.2 Potenzreihen

**Satz 4.6** (Konvergenzverhalten)

Die Potenzreihe  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  konvergiere für ein  $\zeta \neq z_0$ .

- Dann konvergiert  $P(z)$  auf jeder Kreisscheibe  $D_r(z_0)$  absolut und gleichmäßig, falls  $0 < r < |\zeta - z_0| =: R$  (=kompakte Konvergenz auf  $D_R(z_0)$ ).
- Ferner ist  $P(z)$  auf  $D_r(z_0)$  holomorph, und die Ableitung von  $P$  ist gegeben durch die ebenfalls auf  $D_r(z_0)$  absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}. \quad (4.4)$$



**Beweis:**

- Konvergenz von  $P(z)$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\zeta - z_0)^k = \text{konvergent.} \quad \Rightarrow \quad \exists M > 0, \text{ so dass } |a_k(\zeta - z_0)^k| \leq M \quad \forall k.$$

Für  $r$  mit  $0 < r < |\zeta - z_0|$  definiere  $q := \frac{r}{|\zeta - z_0|} < 1$ .

$$\Rightarrow |a_k(z - z_0)^k| = |a_k(\zeta - z_0)^k| \cdot \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^k \leq M \cdot q^k \quad \forall z \text{ mit } |z - z_0| \leq r.$$

$\Rightarrow$  Die konvergente geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} Mq^k$  ist eine Majorante zu

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \text{ d.h. } P(z) \text{ konvergiert absolut nach Satz 1.11.}$$

$\Rightarrow$  Nach Satz 4.3 konvergiert  $P(z)$  auf  $D_r(z_0)$  absolut und gleichmäßig.

- Existenz und Form von  $P'(z)$ :

Da Reihe für  $P$  gleichmäßig konvergent und  $a_k(z - z_0)^k$  diff'bar, impliziert Satz 4.5 die Diff'barkeit von  $P(z) \forall z \in D_r(z_0)$  sowie die gleichmäßige Konvergenz von  $P'$  in (4.4).

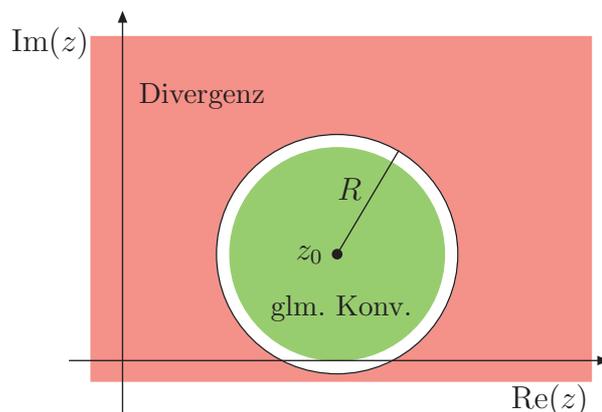
q.e.d.

**Satz 4.7** („Konvergenzradius“ von Potenzreihen)

Für jede Potenzreihe  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$  existiert ein eindeutiger „Konvergenzradius“  $R$  mit  $0 \leq R \leq \infty$ , wobei

- die Reihe für  $R = 0$  nur bei  $z_0$  konvergiert,
- die Reihe für  $0 < R < \infty$  auf dem „Konvergenzkreis“  $D_R(z_0)$  absolut konvergiert, aber für  $|z - z_0| > R$  divergiert,
- die Reihe für  $R = \infty$  auf ganz  $\mathbb{C}$  absolut konvergiert.

Die Konvergenz ist auf kompakten Gebieten des Konvergenzkreises gleichmäßig.



**Beweis:**

Definiere:  $R = \sup\{r \geq 0 \mid \exists \zeta \in \mathbb{C} \text{ mit } r = |\zeta - z_0|, \text{ so dass } P(\zeta) \text{ konvergiert}\}$ .

- $R = 0$ : trivial nach Definition von  $R$ .
- $0 < R < \infty$ : Betrachte ein  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| \neq R$ .
  - $|z - z_0| < R$ :  $\exists \zeta$  mit  $|z - z_0| < |\zeta - z_0| = r < R$ , so dass Reihe konvergiert.  
 $\Rightarrow$  Nach Satz 4.6 konvergiert Reihe auf  $D_r(z_0)$  absolut.  
 Da  $z \in D_R(z_0)$  beliebig, konvergiert die Reihe auf ganz  $D_R(z_0)$  absolut.
  - $|z - z_0| > R$ : Reihe divergiert nach Definition von  $R$ .
- $R = \infty$ : trivial nach Definition von  $R$ .

Die gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Mengen folgt aus der glm. Konvergenz für  $z \in D_r(z_0)$  mit  $r < R$  (Satz 4.6).

q.e.d.

**Anmerkungen:**

- Für  $|z - z_0| = R$  ist keine generelle Aussage über Konvergenz/Divergenz möglich.
- Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz in jedem kompakten Bereich  $D \subset D_R(z_0)$  können Potenzreihen gliedweise integriert und differenziert werden (Sätze 4.4 und 4.5).
- Auf  $D_R(z_0)$  liegt im Allgemeinen keine gleichmäßige Konvergenz vor.

**Satz 4.8** (Cauchy–Hadamard)

Sei  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  und  $\gamma = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ . Dann gilt für den Konvergenzradius  $R$  von  $P(z)$ :

- Falls  $\gamma = 0$ , dann ist  $R = \infty$ .
- Falls  $0 < \gamma < \infty$ , dann ist  $R = 1/\gamma$ .
- Falls  $\gamma = \infty$ , dann ist  $R = 0$ .

Zur Erinnerung:

Der „Limes Superior“  $\overline{\lim}_k r_k$  einer reellen Folge  $\{r_k\}$  ist deren größter Häufungspunkt.

**Beweis:**

Definiere  $\gamma(z) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k(z - z_0)^k|}$  für  $z \in \mathbb{C}$ , so dass  $\gamma(z) = |z - z_0| \gamma$ .

- $\gamma = 0$ : Dann ist  $\gamma(z) = 0 \forall z$ , d.h.  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k(z - z_0)^k|} = 0$ .  
 $\exists k_0$  für ein  $q$  mit  $0 < q < 1$ , so dass  $|a_k(z - z_0)^k| < q^k$  für  $k > k_0$ .  
 $\Rightarrow$  Absolute Konvergenz von  $P(z)$  nach Majorantenkriterium (Satz 1.11).
- $0 < \gamma < \infty$ : Für  $|z - z_0| < 1/\gamma$  ist  $\gamma(z) < 1$ .  
 $\exists k_0$  und ein  $q$  mit  $\gamma(z) < q < 1$ , so dass  $|a_k(z - z_0)^k| < q^k$  für  $k > k_0$ .  
 $\Rightarrow$  Absolute Konvergenz von  $P(z)$  nach Majorantenkriterium (Satz 1.11).
- $\gamma = \infty$ : Für  $z \neq z_0$  sind Glieder in  $P(z)$  unbeschränkt.  $\Rightarrow$  Divergenz.

q.e.d.

**Beispiele:**

- Geometrische Reihe:  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k = (1 + z_0 - z)^{-1}$ .  
 $\Rightarrow \gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1, \quad R = 1.$
- $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^a (z - z_0)^k$  mit  $a \in \mathbb{R}$ .  
 $\Rightarrow \gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{a/k} = \left( \lim_{k \rightarrow \infty} k^{1/k} \right)^a = 1^a = 1, \quad R = 1.$
- $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k! (z - z_0)^k. \quad \Rightarrow \gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} (k!)^{1/k} = \infty, \quad R = 0.$
- $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z - z_0)^k = e^{z-z_0}. \quad \Rightarrow \gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} (k!)^{-1/k} = 0, \quad R = \infty.$

## 4.3 Taylor-Reihen

**Lemma 4.1** (Entwicklungslemma)

Sei  $\alpha$  ein kompakter Integrationsweg in  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \alpha$  und  $R = \min_{z \in \alpha} |z - z_0| > 0$  der Abstand von  $z_0$  und  $\alpha$ . Ist die Funktion  $f$  auf  $\alpha$  stetig, dann gibt es eine Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (4.5)$$

die auf  $D_R(z_0)$  absolut und kompakt gegen die auf  $\mathbb{C} \setminus \alpha$  definierte Funktion

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \quad (4.6)$$

konvergiert, wobei gilt:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}. \quad (4.7)$$

Insbesondere ist  $g$  holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \alpha$ .

**Beweis:**

Für  $\zeta \in \alpha$  und  $z \in D_R(z_0)$  ist  $|z - z_0| < R \leq |\zeta - z_0|$ , so dass folgende geometrische Reihe konvergiert:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k.$$

Da  $f$  auf  $\alpha$  beschränkt ist,  $\exists c > 0$ , so dass  $|f(\zeta)| < c \forall \zeta \in \alpha$ .

$$\Rightarrow \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^k \right| < \frac{c}{R} \cdot \underbrace{\left( \frac{|z - z_0|}{R} \right)^k}_{=: q < 1} \quad \forall \zeta \in \alpha, z \in D_R(z_0).$$

Da die Summe über  $q^k \forall z \in D_R(z_0)$  konvergiert, konvergiert folgende Reihe nach Satz 4.3 absolut und gleichmäßig in  $\zeta \in \alpha$ :

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k.$$

Nach Satz 4.4 kann  $\int d\zeta$  und  $\sum_k$  vertauscht werden, so dass für alle  $z \in D_R(z_0)$  gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}}_{=: a_k} \cdot (z - z_0)^k = P(z).$$

Nach Satz 4.6 konvergiert die Reihe  $P(z)$  absolut und gleichmäßig auf allen  $D_r(z_0)$  mit  $0 < r < R$ , d.h. es liegt kompakte Konvergenz vor.

Da  $P(z)$  für alle  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \alpha$  konstruiert werden kann, ist  $g$  dort überall holomorph.

q.e.d.

**Satz 4.9** (Cauchyscher Entwicklungssatz)

Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  auf dem Gebiet  $G$  holomorph,  $z_0 \in G$  und  $R > 0$  der maximale Radius, so dass  $D_R(z_0) \subset G$ . Dann gibt es eine Potenzreihe  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ , die auf  $D_R(z_0)$  absolut und kompakt gegen  $f$  konvergiert. Die Funktion  $f$  ist auf  $G$  beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_r(z_0)} dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}. \quad (4.8)$$

**Beweis:**

Sei  $0 < r < R$ .  $f$  auf  $K_r(z_0) \subset G$  stetig.

$\Rightarrow$  Nach Lemma 4.1 gilt:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_r(z_0)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \quad z \in D_r(z_0),$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_r(z_0)} dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}},$$

mit absoluter und gleichmäßiger Konvergenz der Reihe.

Nach der 1. Cauchyschen Integralformel (Satz 3.6) gilt  $f(z) = P(z) \forall z \in D_r(z_0)$ .

Nach der allgemeinen Cauchyschen Integralformel (Satz 3.8) ist  $f$  auf  $D_r(z_0)$  beliebig oft diff'bar, und es gilt  $f^{(k)}(z) = a_k \cdot k!$ .

q.e.d.

**Satz 4.10** (Identitätssatz für Potenzreihen)

Stimmen zwei auf  $D_r(z_0)$  ( $r > 0$ ) konvergente Potenzreihen  $P_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  und  $P_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$  an verschiedenen Punkten  $z_n \in D_r(z_0)$  überein, die sich in  $z_0 \neq z_n$  häufen, d.h.  $P_1(z_n) = P_2(z_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ , dann sind  $P_1$  und  $P_2$  identisch, d.h.  $a_k = b_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

**Beweis:**

$P_1, P_2$  auf  $D_r(z_0)$  holomorph.  $\Rightarrow h(z) = P_1(z) - P_2(z)$  auf  $D_r(z_0)$  holomorph.

Nach Satz 4.9 konvergiert dann die folgende Reihe für  $z \in D_r(z_0)$ :

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k)(z - z_0)^k.$$

Annahme:  $\exists l \in \mathbb{N}_0$  mit  $a_l \neq b_l$ , aber  $a_k = b_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, l - 1$ .

Betrachte folgende Reihe, die auch auf  $D_r(z_0)$  konvergiert:

$$H(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^l} = \sum_{k=l}^{\infty} (a_k - b_k)(z - z_0)^{k-l} = a_l - b_l + (a_1 - b_1)(z - z_0) + \dots,$$

$\Leftrightarrow$  Widerspruch durch Stetigkeit (da  $H$  holomorph) bei  $z \rightarrow z_0$ :

$$a_l - b_l = H(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} H(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z)}{(z - z_0)^l} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(z_k)}{(z_k - z_0)^l} = 0. \quad \text{q.e.d.}$$

## 4.4 Identitätssatz und analytische Fortsetzung

**Satz 4.11** (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)

Für zwei auf einem Gebiet  $G$  holomorphe Funktionen  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- a)  $f(z) = g(z) \forall z \in G$ .
- b)  $f(z) = g(z) \forall z \in D_\epsilon(z_0) \subset G$  für ein  $z_0 \in G$  und ein  $\epsilon > 0$ .
- c)  $\exists$  Folge  $\{z_n\} \subset G$  mit  $z_n \neq z_0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \in G$ , so dass  $f(z_n) = g(z_n) \forall n \in \mathbb{N}$ .
- d)  $\exists z_0 \in G$  mit  $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \forall k \in \mathbb{N}_0$ .

**Beweis:**

- a)  $\rightarrow$  b)  $\rightarrow$  c),d): Trivial.
- c)  $\rightarrow$  b):  $f, g$  holomorph.  
 $\leftrightarrow$  Potenzreihenentwicklungen in einem Kreis  $D_r(z_0)$  nach Satz 4.9, die aber nach Satz 4.10 identisch sind.
- d)  $\rightarrow$  b):  $f, g$  holomorph.  
 $\leftrightarrow$  Identische Potenzreihen für  $f, g$  in einem Kreis  $D_r(z_0)$  nach Satz 4.9.
- b)  $\rightarrow$  a): „Kreiskettenverfahren“

Wähle beliebiges  $\hat{z} \in G$  und einen kompakten Weg  $\alpha \subset G$  von  $z_0$  nach  $\hat{z}$ .

Abstand von  $\alpha$  zu  $\partial G$ :  $d = \min\{|z - z'| \mid z \in \alpha, z' \in \partial G\} > 0$ .

Da  $\alpha$  kompakt,  $\exists$  endliche Partition  $\{z_n\}_{n=0}^N$  von  $\alpha$  mit  $\hat{z} = z_N, z_n \in \alpha, |z_n - z_{n-1}| < d$ .

Nach Satz 4.9 gibt es für  $f, g$  auf allen  $D_d(z_n)$  konvergente Potenzreihen um  $z_n$ .

Beachte:

Da  $|z_n - z_{n-1}| < d$ , gilt  $z_n \in D_d(z_{n-1})$ .

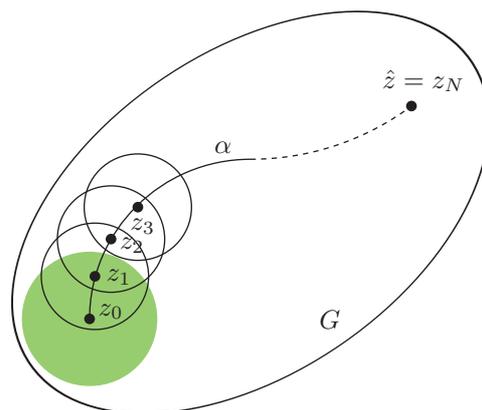
$\leftrightarrow \exists$  Folgen  $\{z_n^{(l)}\}_{l=0}^\infty \subset D_d(z_{n-1}) \cap D_d(z_n)$   
mit  $\lim_{l \rightarrow \infty} z_n^{(l)} = z_n$ .

$\Rightarrow$  Induktionsbeweis von  $f(z_n^{(l)}) = g(z_n^{(l)})$   
und somit  $f = g$  in allen  $D_d(z_n)$ :

- $n = 0$ :  $f = g$  auf  $D_\epsilon(z_0)$ .  
 $\leftrightarrow$  Identische Potenzreihen für  $f, g$  nach Satz 4.9, die in  $D_d(z_0)$  konvergieren.  
 $\leftrightarrow f(z_1^{(l)}) = g(z_1^{(l)})$ , so dass  $f = g$  in  $D_\epsilon(z_1)$  nach c)  
 $\leftrightarrow$  Identische konv. Potenzreihen für  $f, g$  in  $D_d(z_1)$  nach Satz 4.9
- $(n-1) \rightarrow n$ :  $f = g$  auf  $D_d(z_{n-1})$ .  
 $\leftrightarrow f = g \forall z_n^{(l)}$ , so dass Potenzreihen um  $z_n$  identisch nach Satz 4.10.

$\Rightarrow f(\hat{z} = z_N) = g(\hat{z} = z_N)$ .

q.e.d.



**Definition 4.2** („Analytische Funktion“)

Eine auf einem Gebiet  $G$  definierte Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt in  $z_0 \in G$  „in eine Potenzreihe entwickelbar“, falls es ein  $r > 0$  gibt, so dass  $\overline{D_r(z_0)} \subset G$  und  $f$  auf  $D_r(z_0)$  mit einer konvergenten Potenzreihe übereinstimmt.

$f$  heißt „analytisch“, wenn  $f$  in jedem Punkt von  $G$  in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

**Anmerkungen:**

- Analytische Funktionen sind beliebig oft diff'bar und nach Satz 4.9 holomorph (und umgekehrt).
- Zur Darstellung von  $f$  durch Potenzreihen im ganzen Definitionsbereich sind im Allgemeinen Entwicklungen um mehrere Punkte nötig.

**Definition 4.3** („Analytische Fortsetzung“)

Seien  $f_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f_2 : G_2 \rightarrow \mathbb{C}$  zwei analytische Funktionen auf den Gebieten  $G_1$  und  $G_2$ . Falls

$$f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in G_1 \cap G_2 \neq \emptyset, \quad (4.9)$$

dann heißt  $f_1$  „analytische Fortsetzung“ von  $f_2$  und umgekehrt.

Folgerung aus Satz 4.11:

Definiere auf  $G_1 \cup G_2$ :

$$f(z) := \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1, \\ f_2(z), & z \in G_2, \end{cases} \quad (4.10)$$

was auf Grund von (4.9) konsistent ist, dann folgt unmittelbar:

**Satz 4.12** (Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung)

Seien  $f_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f_2 : G_2 \rightarrow \mathbb{C}$  analytische Fortsetzungen voneinander in den Gebieten  $G_1$  und  $G_2$ , d.h. es gilt (4.9). Dann gibt es genau eine analytische Funktion  $f : G_1 \cup G_2 \rightarrow \mathbb{C}$ , die in  $G_1$  mit  $f_1$  und in  $G_2$  mit  $f_2$  übereinstimmt.

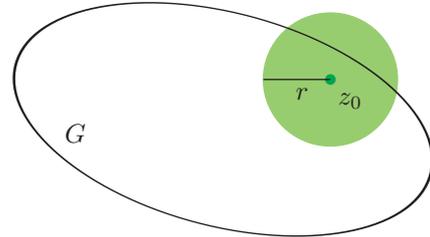
**Wichtige Fragen:**

Existenz / Konstruktion / Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung einer Funktion  $f$  über ein Gebiet  $G$  hinaus?

- Existenz?

Dazu muss ein Konvergenzkreis  $D_r(z_0)$  um  $z_0 \in G$  über den Rand  $\partial G$  hinausgehen:

$\Leftrightarrow f$  holomorph auf  $G \cup K_r(z_0)$  fortsetzbar.



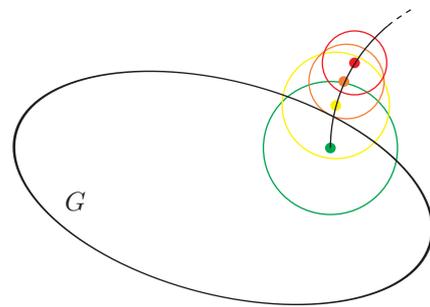
- Konstruktion?

Kreiskettenverfahren  
wie in Beweis von Satz 4.11:

Aber:

Kreise können immer kleiner werden.

$\Leftrightarrow$  Beschränkung der Fortsetzung möglich!



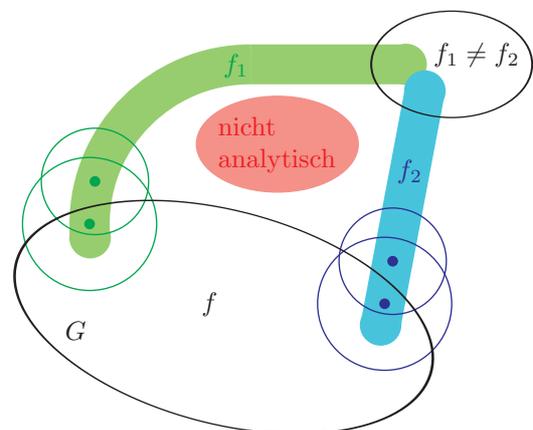
- Eindeutigkeit? Nein!

Grund:

Mögliche Wegabhängigkeit der Fortsetzung  
beim Umlaufen nicht-holomorpher Punkte.

$\Leftrightarrow$  Fortsetzungen äquivalent für  
stetig ineinander deformierbare  
(= „homotope“) Wege.

$\Leftrightarrow$  Zweige mehrdeutiger Fortsetzungen  
charakterisiert durch Homotopieklassen.



Wichtiger Spezialfall:

**Satz 4.13** („Kleiner Schwarzscher Spiegelungssatz“)

Sei  $f : G_+ \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion auf  $G_+$ , wobei das Gebiet  $G_+$  in der oberen komplexen Halbebene  $H_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  liegt und dessen Rand  $\partial G$  ein endliches Intervall  $I$  mit der reellen Achse gemeinsam hat. Falls  $f$  auf  $G \cup I$  stetig ist und auf  $I$  nur reelle Werte annimmt, ist  $f$  nach  $G = G_+ \cup I \cup G_-$  analytisch fortsetzbar, wobei  $G_- = \{\bar{z} \mid z \in G_+\}$ . Ferner gilt:

$$\overline{f(\bar{z})} = f(z) \quad \forall z \in G. \quad (4.11)$$

**Beweis:**

Definiere:  $f(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad \forall z \in G_-$ .

$\Leftrightarrow f$  stetig auf ganz  $G$ .

Ferner ist  $f$  in  $G_-$  holomorph durch Übertragung der Cauchy–Riemannschen Dglen. aus  $G_+$ :

$$z \in G_+ : \quad f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

$$z \in G_- : \quad f(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \overline{f(\overline{x + iy})} = u(x, -y) - iv(x, -y).$$

$$\Rightarrow U_x(x, y) = u_x(x, -y) = -v_y(x, -y) = +V_y(x, y),$$

$$V_x(x, y) = -v_x(x, -y) = -u_y(x, -y) = -U_y(x, y).$$

$\Rightarrow f$  stetig und  $\oint_{\alpha} dz f(z) = 0$  in  $G$ ,

da Wege  $\alpha$  aufgeteilt werden können:

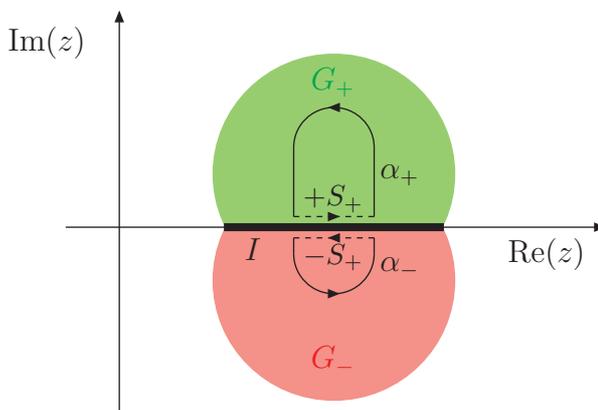
$$\alpha = \underbrace{\alpha|_{G_+} + S_+}_{=: \alpha_+} + \underbrace{\alpha|_{G_-} - S_+}_{=: \alpha_-}$$

mit  $S_+ = t + i\delta$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ .

$$\oint_{\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left( \oint_{\alpha_+} + \oint_{\alpha_-} \right) = 0 + 0 = 0.$$

$\Rightarrow f$  holomorph in  $G$  nach Satz von Morera (Satz 3.10).

q.e.d.



# Kapitel 5

## Laurent-Reihen und Residuensatz

### 5.1 Laurent-Reihen

**Definition 5.1** („Laurent-Reihe“)

Die Reihe

$$L(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (5.1)$$

heißt „Laurent-Reihe“ um den Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$ . Die Teilreihen  $H$  und  $N$  von  $L = H + N$ ,

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots, \quad (5.2)$$

$$N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (5.3)$$

heißen „Hauptteil“ bzw. „Nebenteil“ von  $L$ . Die Laurent-Reihe heißt (absolut) konvergent, wenn  $H$  und  $N$  jeweils für sich (absolut) konvergent sind.

**Anmerkung:**

Das Konvergenzverhalten von  $H$  und  $N$  ist offensichtlich (Satz 4.7):

- $N(z) =$  Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R_2$ .  
↔ Absolute und kompakte Konvergenz auf  $D_{R_2}(z_0)$ .
- $H(z = z_0 + 1/\zeta) = a_{-1}\zeta + a_{-2}\zeta^2 \dots =$  Potenzreihe in  $\zeta$  mit Konvergenzradius  $\rho_1$ .  
↔ Absolute und gleichmäßige Konvergenz  $\forall \zeta$  mit  $|\zeta| < \rho < \rho_1$ ,  
d.h.  $\forall z$  mit  $|z - z_0| > r = 1/\rho$ , wobei  $r > R_1 := 1/\rho_1$ .

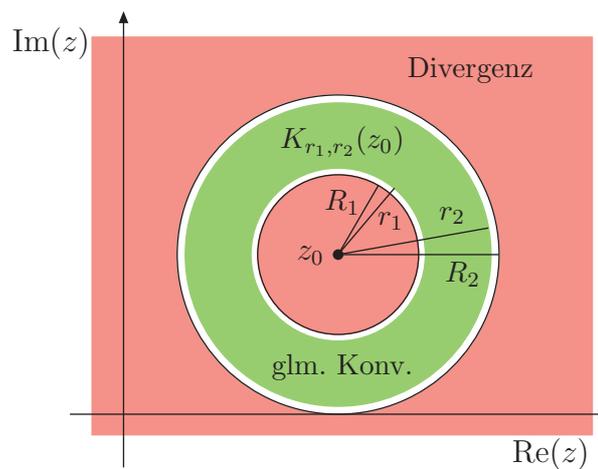
Damit ist bewiesen:

**Satz 5.1** (Konvergenzverhalten von Laurent-Reihen)

Die Laurent-Reihe  $L(z) = H(z) + N(z)$  konvergiert auf jedem Kreisring

$$K_{r_1, r_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\} \quad (5.4)$$

absolut und gleichmäßig, falls  $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$  (d.h. kompakte Konvergenz auf  $K_{R_1, R_2}(z_0)$ ), wobei  $1/R_1$  und  $R_2$  die Konvergenzradien der Potenzreihen  $H(z_0 + 1/\zeta)$  und  $N(\zeta)$  in  $\zeta$  sind. Falls  $R_1 > R_2$ , konvergiert  $L$  nirgends in  $\mathbb{C}$ .



**Anmerkungen:**

- Falls  $R_1 = R_2 = R$ , kann für  $z$  mit  $|z - z_0| = R$  punktweise Konvergenz vorliegen, muss aber nicht. Für  $|z - z_0| \neq R$  divergiert  $L$  jedenfalls.
- Auf Grund der kompakten Konvergenz auf  $K_{R_1, R_2}$  können Laurent-Reihen gliedweise integriert und differenziert werden (Sätze 4.4 und 4.5).

**Satz 5.2** (Laurent-Entwicklung)

Sei  $f$  ein Funktion, die auf einem Ringgebiet  $K_{R_1, R_2}(z_0)$  mit  $R_1 < R_2$  holomorph ist.

a)  $f$  lässt sich auf  $K_{R_1, R_2}(z_0)$  in eine Laurent-Reihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad z \in K_{R_1, R_2}(z_0). \quad (5.5)$$

b) Ist  $\alpha$  ein geschlossener, positiv orientierter Integrationsweg, der ganz in  $K_{R_1, R_2}(z_0)$  verläuft und die Kreisscheibe  $D_{R_1}(z_0)$  genau einmal umrundet, dann gilt:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\alpha} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.6)$$

**Beweis:**

- Wahl eines Hilfsweges für ein beliebiges  $z \in K_{R_1, R_2}(z_0)$ :

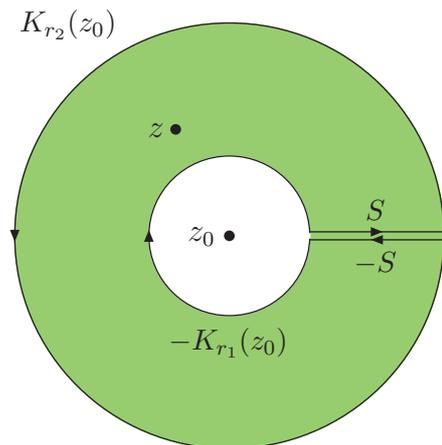
$\exists r_1, r_2$  mit  $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$ , d.h.  $z \in K_{r_1, r_2}(z_0) \subset K_{R_1, R_2}(z_0)$ .

$\hookrightarrow$  Definiere geschlossenen, positiv orientierten Weg:

$$\alpha' = -K_{r_1}(z_0) + S + K_{r_2}(z_0) - S.$$

$\Rightarrow$  Nach Satz 3.6 gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\alpha'} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_{r_1}(z_0)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}_{=: I_1(z)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_{r_2}(z_0)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}_{=: I_2(z)}. \end{aligned}$$



- Berechnung von  $I_2(z)$ :

Für  $\zeta \in K_{r_2}(z_0)$  gilt  $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ .

$\hookrightarrow$  Gleichmäßige Konvergenz für  $\zeta \in K_{r_2}(z_0)$  von:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_{r_2}(z_0)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k, && \text{Vertauschung von } f \text{ und } \sum \\ &&& \text{nach Satz 4.4} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_{r_2}(z_0)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}}_{=: a_k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

- Berechnung von  $I_1(z)$ :

Für  $\zeta \in K_{r_1}(z_0)$  gilt  $|z - z_0| > |\zeta - z_0|$ .

$\hookrightarrow$  Gleichmäßige Konvergenz für  $\zeta \in K_{r_1}(z_0)$  von:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{-1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \frac{-1}{z - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_1(z) &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_{K_{r_1}(z_0)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k, && \text{Vertauschung von } f \text{ und } \sum \\ &&& \text{nach Satz 4.4} \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^{-k-1} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_{r_1}(z_0)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-k}}}_{=: a_{-k-1}} = - \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}. \end{aligned}$$

- $I_1(z)$  konvergiert für  $|z - z_0| < r_2$  absolut;  $I_2(z)$  konvergiert für  $|z - z_0| > r_1$  absolut.  
Beachte: Man kann mit  $r_1$  bzw.  $r_2$  beliebig nahe an  $R_1$  bzw.  $R_2$  gehen.
- In Berechnung von  $a_k$  können Integrationswege  $K_{r_1}(z_0)$  und  $K_{r_2}(z_0)$  durch  $\alpha$  ersetzt werden, da Integrand  $f(\zeta)/(\zeta - z_0)^{k+1}$  holomorph  $\forall \zeta \in K_{R_1, R_2}(z_0)$ .  $\Rightarrow$  (5.6).

q.e.d.

### Satz 5.3 (Identitätssatz für Laurent-Reihen)

Stimmen zwei auf  $K_{r_1, r_2}(z_0)$  ( $r_1 < r_2$ ) konvergente Laurent-Reihen

$$L_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad L_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z - z_0)^k \quad (5.7)$$

auf  $K_{r_1, r_2}(z_0)$  überein, d.h.  $L_1(z) = L_2(z) \forall z \in K_{r_1, r_2}(z_0)$ , dann gilt  $a_k = b_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

#### Beweis:

Nach Satz 5.2 gilt für jeden Weg  $\alpha$  in  $K_{r_1, r_2}(z_0)$ , der  $z_0$  positiv umläuft und auf dem  $L_1 = L_2$  ist:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\alpha} d\zeta \frac{L_1(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\alpha} d\zeta \frac{L_2(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} = b_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

q.e.d.

## 5.2 Isolierte Singularitäten

**Definition 5.2** („Isolierte Singularitäten“)

Sei  $f$  eine auf  $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  holomorphe Funktion. Dann heißt  $z_0$  „isolierte Singularität“ von  $f$ . Ist  $H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k}$  der Hauptteil der Laurent-Reihe von  $f$  um  $z_0$ , dann heißt  $z_0$

- a) „hebbare Singularität“, falls  $a_{-k} = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ , d.h. falls  $H(z) \equiv 0$ ;  
 b) „Pol der Ordnung  $p \in \mathbb{N}$ “, wenn  $H(z)$  nur endlich viele Terme enthält, d.h.

$$H(z) = \sum_{k=1}^p a_{-k}(z-z_0)^{-k} \quad \text{mit } a_{-p} \neq 0; \quad (5.8)$$

- c) „wesentliche Singularität“, falls  $H(z)$  unendlich viele Terme enthält.

**Beispiele:**

- $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ,  $z \neq 0$ : Laurent-Reihe durch Taylor-Entwicklung von  $\sin z$ :

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}. \quad (5.9)$$

$\Rightarrow$  Singularität bei  $z = 0$  hebbbar;  $f$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  mit Definition  $f(0) = 1$ .

- $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ,  $z \neq \pm i$ : z.B. Entwicklung um  $z = i$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) = -\frac{i}{2} \frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{i}{2}(z-i)} \\ &= -\frac{i}{2} \frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{i}{2} \right)^k (z-i)^k. \end{aligned} \quad (5.10)$$

$\Rightarrow$  Singularität bei  $z = i$  ist Pol 1. Ordnung (ebenfalls bei  $z = -i$ ).

- $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ,  $z \neq 0$ : Laurent-Reihe durch Potenzreihe für exp-Funktion:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}. \quad (5.11)$$

$\Rightarrow$  Singularität bei  $z = 0$  wesentlich.

$\hookrightarrow$  Frage nach weiteren Charakterisierungen der Typen isolierter Singularitäten?

**Satz 5.4** (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Eine isolierte Singularität  $z_0$  von  $f$  ist genau dann hebbar, wenn es eine „punktierte Umgebung“  $D_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$  gibt, in der  $|f(z)|$  beschränkt ist. In diesem Fall ist  $f$  nach  $z_0$  holomorph fortsetzbar.

**Beweis:**

Sei  $|f(z)| < M \forall z \in D_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ .

Laurent-Entwicklung von  $f$  um  $z_0$ ;  $a_k$  nach (5.6) mit  $\alpha = K_\delta(z_0)$  mit  $0 < \delta < \epsilon$ :

$$|a_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_\delta(z_0)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \right| < \frac{1}{2\pi i} \frac{M}{\delta^{k+1}} 2\pi\delta = M\delta^{-k} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad \text{für } k < 0.$$

$\Rightarrow$  Holomorphe Fortsetzung nach  $z_0$  durch  $f(z_0) = a_0$ .

Die Beschränktheit von  $f$  in  $D_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$  ist trivial, falls  $z_0$  hebbar. q.e.d.

**Satz 5.5**

Eine isolierte Singularität  $z_0$  von  $f$  ist genau dann ein Pol, wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty. \tag{5.12}$$

**Beweis:**

- Sei  $z_0$  Pol  $p$ . Ordnung.

$\Leftrightarrow g(z) = (z - z_0)^p f(z)$  holomorph auf  $D_\epsilon(z_0)$  und  $g(z_0) \neq 0$ .

$\exists \epsilon > 0$ , so dass  $|g(z)| > \epsilon \forall z \in D_\delta(z_0)$  für ein  $\delta > 0$ .

$$\Rightarrow |f(z)| = \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^p} > \frac{\epsilon}{|z - z_0|^p} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \infty.$$

- Sei  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ .

$\Leftrightarrow h(z) = 1/f(z)$  holomorph fortsetzbar auf  $D_\epsilon(z_0)$  mit  $h(z_0) = 0$ .

$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}$ , so dass  $h(z) = (z - z_0)^p \tilde{h}(z)$  und  $\tilde{h}(z_0) \neq 0$ .

$\Leftrightarrow f(z) = (z - z_0)^{-p} g(z)$  mit  $g(z) = 1/\tilde{h}(z)$  holomorph auf  $D_\epsilon(z_0)$ ,  
d.h.  $z_0$  ist Pol  $p$ . Ordnung. q.e.d.

**Satz 5.6** (Casorati-Weierstraß)

Eine isolierte Singularität  $z_0$  von  $f$  ist genau dann wesentlich, wenn  $f(z)$  in jeder Umgebung  $D_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$  jedem beliebigen Wert beliebig nahe kommt, d.h. für jedes  $w_0 \in \mathbb{C}$  gibt es eine Folge  $(z_n)$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_0. \quad (5.13)$$

**Beweis:**

- Falls  $(z_n)$  mit (5.13) existiert, dann ist weder  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ , noch ist  $|f(z)|$  in einer Umgebung beschränkt (sei  $M$  eine Schranke, dann ist  $w_0 > M$  unmöglich).  
 $\Rightarrow$  Singularität wesentlich nach Sätzen 5.5 und 5.4.

- Sei  $z_0$  wesentliche Singularität.

Annahme:  $\exists w_0 \in \mathbb{C}$  und  $\epsilon > 0$ , so dass  $|f(z) - w_0| > \epsilon \forall z \in D_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$   
für ein geeignetes  $\delta > 0$ .

$\Leftrightarrow g(z) = 1/[f(z) - w_0]$  ist holomorph auf  $D_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$  und beschränkt.

$\Leftrightarrow z_0$  ist hebbare Singularität von  $g$  nach Satz 5.4,

d.h.  $g$  ist auf  $D_\delta(z_0)$  holomorph fortsetzbar.

$\Leftrightarrow z_0$  ist hebbare Singularität oder Pol von  $f(z) = w_0 + 1/g(z)$ .  $\checkmark$

q.e.d.

**Definition 5.3** („Meromorphe Funktion“)

Sei  $G$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$  und  $P_f \subset G$  eine diskrete Teilmenge. Eine Funktion  $f : G \setminus P_f \rightarrow \mathbb{C}$  heißt „meromorph“ auf  $G$ , wenn  $f$  auf  $G \setminus P_f$  holomorph ist und an Punkten  $z \in P_f$  höchstens Polstellen hat.

### 5.3 Residuensatz

**Definition 5.4** („Residuum“)

Sei  $f : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf dem „punktierten Gebiet“  $G \setminus \{z_0\}$  und  $\overline{D_\epsilon(z_0)} \subset G$ . Dann heißt

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_\epsilon(z_0)} dz f(z) \quad (5.14)$$

das „Residuum“ von  $f$  in  $z_0$ .

**Anmerkungen:**

- Zur Berechnung von  $\operatorname{Res}_{z_0}(f)$  kann jeder Weg in  $G$  genommen werden, der  $z_0$  genau einmal positiv umläuft, da  $f$  auf  $G \setminus \{z_0\}$  holomorph ist.
- $\operatorname{Res}_{z_0}(f) = a_{-1}$ , wenn  $a_k$  die Koeffizienten der Laurent-Reihe um  $z_0$  sind, d.h.

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = 0, \quad \text{falls } f \text{ holomorph in } z_0, \quad (5.15)$$

$$\operatorname{Res}_{z_0}((z - z_0)^{-1}) = 1, \quad (5.16)$$

$$\operatorname{Res}_{z_0}((z - z_0)^k) = 0, \quad \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \quad (5.17)$$

$$\operatorname{Res}_{z_0}\left(\frac{g(z)}{z - z_0}\right) = g(z_0), \quad \text{falls } g(z) \text{ in } z_0 \text{ holomorph.} \quad (5.18)$$

**Satz 5.7** („Residuensatz“)

Sei  $f$  im Gebiet  $G$  holomorph bis auf endlich viele isolierte Singularitäten  $z_1, \dots, z_n$  und  $\alpha \subset G \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$  ein Integrationsweg, der das Gebiet  $G_\alpha \subset G$  einmal positiv umrandet. Dann gilt:

$$\oint_\alpha dz f(z) = 2\pi i \sum_{\substack{\nu=1 \\ z_\nu \in G_\alpha}}^n \operatorname{Res}_{z_\nu}(f). \quad (5.19)$$

**Beweis:**

Definiere Umgebungen  $D_\epsilon(z_\nu) \forall z_\nu \in G_\alpha$ , so dass:

$$\overline{D_\epsilon(z_\nu)} \subset G_\alpha \quad \text{und} \quad D_\epsilon(z_\nu) \cap D_\epsilon(z_\mu) = \emptyset.$$

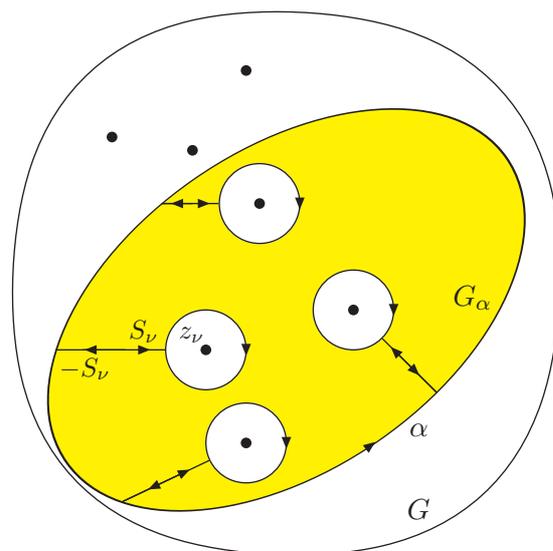
Führe Verbindungswege  $S_\nu$  von  $\alpha$  nach  $K_\epsilon(z_\nu)$  ein, die ganz in  $G_\alpha \setminus \bigcup_\nu D_\epsilon(z_\nu)$  liegen.

$\Leftrightarrow$  Geschlossener Weg:

$$\alpha_0 = \alpha + \sum_{\substack{\nu=1 \\ z_\nu \in G_\alpha}}^n (S_\nu - K_\epsilon(z_\nu) - S_\nu).$$

$f$  im Innern von  $\alpha_0$  holomorph.

$$\Rightarrow 0 = \oint_{\alpha_0} dz f(z) = \oint_\alpha dz f(z) - \sum_{\substack{\nu=1 \\ z_\nu \in G_\alpha}}^n \oint_{K_\epsilon(z_\nu)} dz f(z) = \oint_\alpha dz f(z) - 2\pi i \sum_{\substack{\nu=1 \\ z_\nu \in G_\alpha}}^n \operatorname{Res}_{z_\nu}(f). \quad \text{q.e.d.}$$



**Anwendungsbeispiele zur Berechnung bestimmter Integrale:**

a) Integrale der Form  $I = \int_{-\infty}^{\infty} dz R(z)$ , wobei  $R =$  rationale Funktion.

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad Q(z) = \sum_{l=0}^m b_l z^l \neq 0 \text{ f\"ur } z \in \mathbb{R}.$$

$\Leftrightarrow R$  hat  $m_0 \leq m$  Pole  $z_\mu$  (=Nullstellen von  $Q$ ), wobei  $\text{Im}(z_\mu) \neq 0$ .

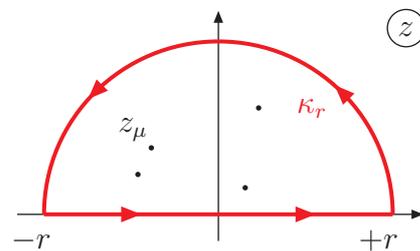
Es seien  $a_n, b_m \neq 0$  und  $m \geq n + 2$ , so dass:

$$|R(z)| \leq \frac{M_1 |a_n| |z|^n}{M_2 |b_m| |z|^m} =: M |z|^{n-m} \leq M |z|^{-2} \quad \forall |z| \geq r \text{ f\"ur ein } r > 0.$$

$\Rightarrow$  Wähle Integrationsweg:

$$\alpha = [-r, +r] + \kappa_r.$$

$$\Rightarrow 2\pi i \sum_{\substack{\mu=1 \\ \text{Im}(z_\mu) > 0}}^{m_0} \text{Res}_{z_\mu}(R) = \oint_{\alpha} dz R(z)$$



$$= \int_{-r}^r dz R(z) + \underbrace{\int_{\kappa_r} dz R(z)}_{= I_{\kappa_r} \rightarrow 0 \text{ f\"ur } r \rightarrow \infty,}$$

$$\text{da: } |I_{\kappa_r}| \leq \frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{2\pi M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dz R(z) = 2\pi i \sum_{\substack{\mu=1 \\ \text{Im}(z_\mu) > 0}}^{m_0} \text{Res}_{z_\mu}(R). \tag{5.20}$$

Einfache Beispiele:

- $f(z) = \frac{1}{1+z^2}, \quad z_{1,2} = \pm i, \quad \text{Res}_{z=i}(f) = -\frac{i}{2}, \quad \text{siehe (5.10).}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \text{Res}_{z=i}(f) = 2\pi i \cdot \frac{-i}{2} = \pi. \tag{5.21}$$

- $f(z) = \frac{1}{1+z^4}, \quad Q(z) = (z+\zeta)(z-\zeta)(z+i\zeta)(z-i\zeta), \quad \zeta = e^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}.$

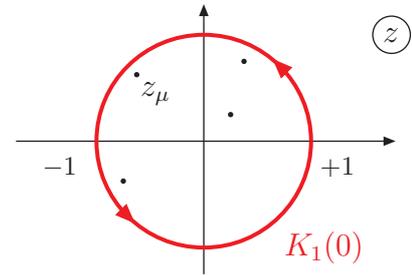
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Relevante Pole: } \quad z_1 = \zeta, \quad \text{Res}_{z_1}(f) &= \frac{1}{(\zeta+\zeta)(\zeta+i\zeta)(\zeta-i\zeta)} = \frac{1}{4\zeta^3}, \\ z_2 = i\zeta, \quad \text{Res}_{z_2}(f) &= \frac{1}{(i\zeta+\zeta)(i\zeta-\zeta)(i\zeta+i\zeta)} = \frac{i}{4\zeta^3}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i [\text{Res}_{z_1}(f) + \text{Res}_{z_2}(f)] = 2\pi i \cdot \frac{1+i}{4\zeta^3} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \tag{5.22}$$

b) Integrale der Form  $I = \int_0^{2\pi} dt R(\cos t, \sin t)$ , wobei  $R =$  rationale Funktion.

Integrationsweg = Einheitskreis:

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi \\ dz &= iz dt, \\ \cos t &= \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad \sin t = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= -i \oint_{K_1(0)} dz \underbrace{\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right)}_{=: \tilde{R}(z)} = -i \oint_{K_1(0)} dz \tilde{R}(z) \\ &= 2\pi \sum_{\mu=0}^m \operatorname{Res}_{z_\mu}(\tilde{R}), \end{aligned} \tag{5.23}$$

wobei  $\{z_\mu\} =$  Menge aller Polstellen  $z_\mu$  von  $\tilde{R}(z)$  mit  $|z_\mu| < 1$ .

c) Integrale der Form  $I(a) = \int_0^\infty dz z^{a-1} f(z)$ , wobei  $f$  meromorph und

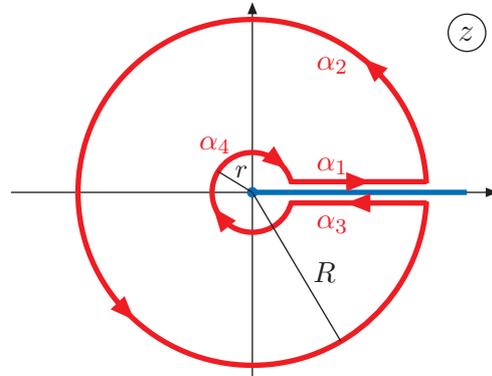
$$\lim_{z \rightarrow 0} z^a f(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^a f(z) = 0, \quad (5.24)$$

d.h. für  $a \notin \mathbb{Z}$  hat der Integrand einen Verzweigungspunkt bei 0.

Wähle Verzweigungsschnitt  $[0, +\infty)$ ,  
d.h. Definitionsbereich des Integranden:

$$D = \mathbb{C} \setminus ([0, +\infty) \cup P_f),$$

$$P_f = \text{diskrete Menge der Polstellen von } f.$$



Auswertung des Integrals auf Weg

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

$$\Rightarrow I_\alpha(a) = \oint_\alpha dz z^{a-1} f(z) = 2\pi i \sum_\nu \text{Res}_{z_\nu} (z^{a-1} f(z)), \quad z_\nu \in P_f.$$

Auswertung auf Teilwegen:

- $\alpha_1$ :  $z_{\alpha_1}(t) = t + i0, \quad 0 < r \leq t \leq R.$   
 $\Rightarrow I_{\alpha_1}(a) \rightarrow I(a) \quad \text{für } r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty.$
- $\alpha_2$ :  $z_{\alpha_2}(t) = Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$   
 $\Rightarrow |I_{\alpha_2}(a)| \leq 2\pi R \max_{z \in \alpha_2} |z^{a-1} f(z)| = 2\pi \max_{z \in \alpha_2} |z^a f(z)| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \text{nach (5.24).}$
- $\alpha_3$ :  $z_{\alpha_3}(t) = t - i0 = \bar{z}_{\alpha_1}(t), \quad 0 < r \leq t \leq R.$   
 Beachte:  $z_{\alpha_3}(t)^{a-1} = \exp \left\{ (a-1) \underbrace{\log(z_{\alpha_3}(t))}_{= \log(z_{\alpha_1}(t)) + 2\pi i} \right\} = e^{2\pi i a} z_{\alpha_1}(t)^{a-1}.$   
 $\Rightarrow I_{\alpha_3}(a) \rightarrow -e^{2\pi i a} I(a) \quad \text{für } r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty.$
- $\alpha_4$ :  $z_{\alpha_4}(t) = re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$   
 $\Rightarrow |I_{\alpha_4}(a)| \leq 2\pi r \max_{z \in \alpha_4} |z^{a-1} f(z)| = 2\pi \max_{z \in \alpha_4} |z^a f(z)| \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \quad \text{nach (5.24).}$

$\Rightarrow$  Resultat für  $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ :

$$I(a) = \frac{1}{1 - e^{2\pi i a}} I_\alpha(a) = -\frac{\pi e^{-\pi i a}}{\sin(\pi a)} \sum_\nu \text{Res}_{z_\nu} (z^{a-1} f(z)), \quad z_\nu \in P_f. \quad (5.25)$$

$$= -2i e^{\pi i a} \sin(\pi a)$$

Explizites Beispiel:  $0 < \text{Re}(a) < 1.$

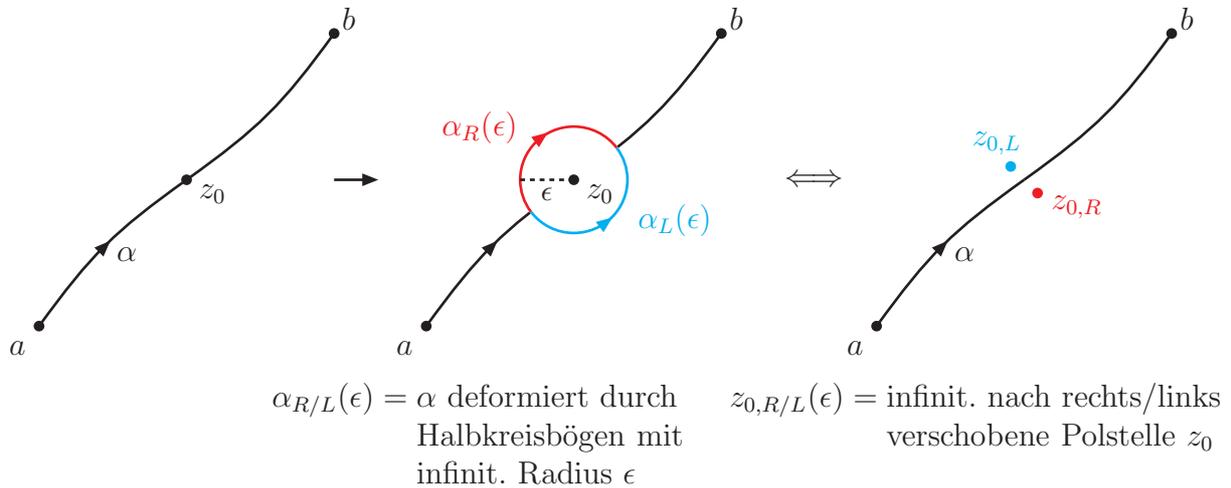
$$I(a) = \int_0^\infty dz \frac{z^{a-1}}{z+1} = -\frac{\pi e^{-\pi i a}}{\sin(\pi a)} \underbrace{\text{Res}_{z=e^{i\pi}} \left( \frac{z^{a-1}}{z+1} \right)}_{= e^{\pi i(a-1)}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}. \quad (5.26)$$

## 5.4 Cauchyscher Hauptwert

Situation in der Praxis:

Pole 1. Ordnung liegen nahe am Integrationsweg oder durch Idealisierung sogar darauf.

Systematische Behandlung? → Wegdeformation: bzw. Verschiebung des Poles:



Beachte: Äquivalenz beider Behandlungen nach Cauchyschem Integralsatz!

**Definition 5.5** („Rechtswert“, „Linkswert“, „Cauchyscher Hauptwert“)

Sei  $\alpha$  ein Integrationsweg im Gebiet  $G$  und  $f$  eine Funktion, die auf  $G \setminus \{z_0\}$  holomorph ist, wobei  $z_0 \in \alpha$ . Dann heißen

$$\mathcal{R} \int_{\alpha} dz f(z) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_R(\epsilon)} dz f(z), \quad (5.27)$$

$$\mathcal{L} \int_{\alpha} dz f(z) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_L(\epsilon)} dz f(z), \quad (5.28)$$

$$\mathcal{P} \int_{\alpha} dz f(z) := \frac{1}{2} \left[ \mathcal{R} \int_{\alpha} dz f(z) + \mathcal{L} \int_{\alpha} dz f(z) \right]. \quad (5.29)$$

„Rechtswert“, „Linkswert“ bzw. „Cauchyscher Hauptwert“ des Integrals  $\int_{\alpha} dz f(z)$ .

**Satz 5.8**

Sei  $\alpha$  ein Integrationsweg im Gebiet  $G$  und  $f$  eine Funktion, die auf  $G \setminus \{z_0\}$  holomorph ist, wobei  $z_0 \in \alpha$ . Dann gilt:

$$\mathcal{R} \int_{\alpha} dz f(z) = \mathcal{P} \int_{\alpha} dz f(z) - i\pi \operatorname{Res}_{z_0}(f), \quad (5.30)$$

$$\mathcal{L} \int_{\alpha} dz f(z) = \mathcal{P} \int_{\alpha} dz f(z) + i\pi \operatorname{Res}_{z_0}(f). \quad (5.31)$$

**Beweis:**

Dies folgt unmittelbar aus der Definition von  $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{P}$  und

$$\mathcal{L} \int_{\alpha} dz f(z) - \mathcal{R} \int_{\alpha} dz f(z) = \oint_{K_{\epsilon}(z_0)} dz f(z) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0}(f).$$

q.e.d.

**Folgerungen:**

- Sei  $\alpha = [a, b] \subset \mathbb{R}$  mit  $a < 0 < b$  und  $f(x)$  analytisch in  $\alpha \setminus \{0\}$ . Dann gilt:

$$\mathcal{P} \int_a^b dz f(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_a^{-\epsilon} dz f(z) + \int_{\epsilon}^b dz f(z) \right]. \quad (5.32)$$

(Beweis als Übung!)

Gleichung (5.32) dient als Definition des Hauptwertes für stetige, reelle  $f$ .

- Aus der Äquivalenz der Polverschiebung folgt ferner, falls  $f$  analytisch auf  $\alpha$ :

$$\mathcal{R}/\mathcal{L} \int_a^b dz \frac{f(z)}{z} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b dz \frac{f(z)}{z \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \int_a^b dz f(z) \mp i\pi f(0). \quad (5.33)$$

$\Rightarrow$  „Dirac-Identität“ der  $\delta$ -Distribution:

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.34)$$

Der Hauptwert  $\mathcal{P}$  erlaubt die Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel für den Fall, dass  $z_0 \in$  Integrationsweg:

**Satz 5.9**

Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf dem Gebiet  $G$  und  $\alpha \subset G$  eine geschlossene, positiv orientierte Kurve. Für  $z_0 \in \alpha$  gilt dann:

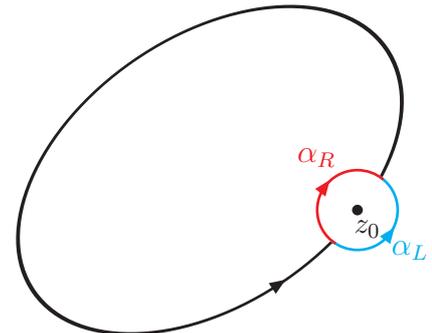
$$\frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \oint_{\alpha} dz \frac{f(z)}{z - z_0} = f(z_0). \quad (5.35)$$

**Beweis:**

Anwendung des Residuensatzes liefert:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \int_{\alpha} dz \frac{f(z)}{z - z_0} &= 0, \\ \mathcal{L} \int_{\alpha} dz \frac{f(z)}{z - z_0} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} \left( \frac{f(z)}{z - z_0} \right) = 2\pi i f(z_0). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  (5.35) folgt unmittelbar aus (5.29).



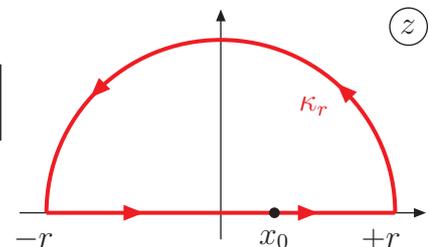
q.e.d.

**Folgerung:**

Sei  $f(z)$  holomorph für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Im}(z) \geq 0$  und  $z \neq x_0 \in \mathbb{R}$ . Ferner gelte  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$ .

Aus (5.35) folgt:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-r}^{+r} dz \frac{f(z)}{z - x_0} + \underbrace{\frac{1}{i\pi} \int_{\kappa_r} dz \frac{f(z)}{z - x_0}}_{\rightarrow 0} \right] \\ &= \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{f(z)}{z - x_0}. \end{aligned}$$



$\Rightarrow$  „Kramers-Kronig-Relationen“:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{f(x_0)\} &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\operatorname{Im}\{f(x)\}}{x - x_0}, \\ \operatorname{Im}\{f(x_0)\} &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\operatorname{Re}\{f(x)\}}{x - x_0}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

d.h.  $\operatorname{Re}(f)$  auf reeller Achse kann aus  $\operatorname{Im}(f)$  auf reeller Achse berechnet werden und umgekehrt.

$\leftrightarrow$  Wichtige Anwendungen in Optik, Elektrodynamik, Quantenmechanik, etc.

## Teil II

# Gewöhnliche Differentialgleichungen



# Kapitel 6

## Grundbegriffe und elementare Methoden

### 6.1 Grundbegriffe

Grundlegende Bezeichnungen:

- Eine Relation zwischen einer Funktion  $y(x)$  einer unabhängigen Variablen  $x$  und deren Ableitungen  $y', \dots, y^{(n)}$ ,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (6.1)$$

heißt „gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ . Ordnung“. Die Dgl. heißt „explizit“, wenn sie in der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (6.2)$$

vorliegt; ansonsten heißt sie „implizit“.

- Eine „allgemeine Lösung“  $y$  einer gewöhnliche Dgl. (6.1) ist eine Funktion  $y(x, \{c_k\})$ , die (6.1) erfüllt und von freien Parametern  $\{c_k\}$  abhängt, so dass jede Lösung durch Wahl geeigneter  $\{c_k\}$  erhalten wird.
- Relationen zwischen einer (vektorwertigen) Funktion  $\mathbf{y}(x) \in \mathbb{R}^N$  einer unabhängigen Variablen  $x$  und deren Ableitungen  $\mathbf{y}', \dots, \mathbf{y}^{(n)}$ ,

$$F_k(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \dots, \mathbf{y}^{(n)}) = 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad (6.3)$$

definieren ein „System gewöhnlicher Differentialgleichung  $n$ . Ordnung“.

- Eine Relation zwischen einer Funktion  $u(x_1, \dots, x_N)$  mehrerer unabhängiger Variablen  $x_k$  und deren partiellen Ableitungen  $u_{x_{i_1} \dots x_{i_n}} \equiv \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}$ ,

$$F(x, u_{x_1}, \dots, u_{x_N \dots x_N}) = 0, \quad (6.4)$$

heißt „partielle Differentialgleichung  $n$ . Ordnung“.

↔ Nicht Gegenstand dieser Vorlesung.

**Spezielle Fragestellungen (bei gewöhnlichen Dglen.):**

- Existenz von Lösungen?
- Welche Zusatzbedingungen legen allgemeine Lösung eindeutig fest?
- Anfangswertprobleme:  
 $y(x)$  und einige Ableitungen  $y^{(k)}(x)$  bei  $x = x_0$  vorgegeben.  
 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen in Intervallen  $I$  mit  $x_0 \in I$ ?
- Randwertprobleme:  
 $y(x)$  und einige Ableitungen  $y^{(k)}(x)$  bei  $x = x_0$  und  $x = x_1$  vorgegeben.  
 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für  $x \in [x_0, x_1]$ ?

**Dgl. 1. Ordnung – Linienelement und Richtungsfeld:**

Gegeben:  $y' = f(x, y) =$  Steigung des Graphen  $(x, y(x))$ .

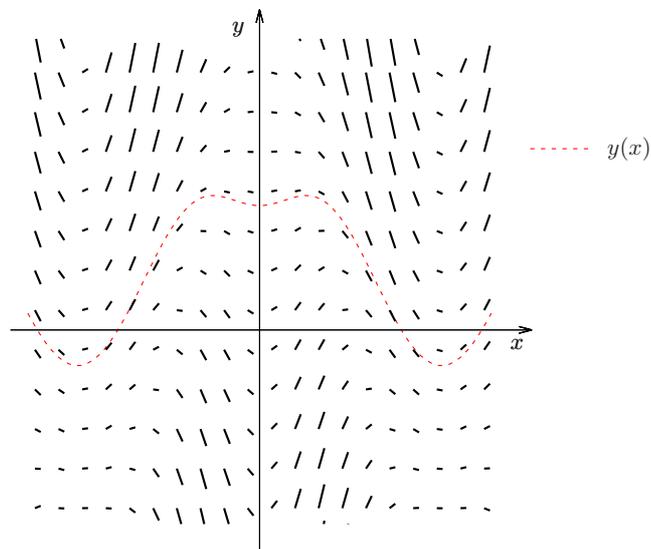
**Def.:**  $(x, y, f(x, y)) =:$  „Linienelement“ bei  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  
 „Richtungsfeld“ := Gesamtheit aller Linienelemente.

Beispiel:

$$y' = -y \sin x + \sin(2x).$$

Spezielle Lösung:

$$y(x) = 2 + 2 \cos x - e^{\cos x}.$$



Anschaulich: „Lösung muss ins Richtungsfeld passen“.

## 6.2 Elementare Differentialgleichungen 1. Ordnung

a) Dgl. mit getrennten Variablen:

$$y' = f(x)g(y). \quad (6.5)$$

Lösung durch Trennung der Variablen und Integration:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{y'}{g(y)}. \\ \Leftrightarrow \int_{x_0}^x d\xi f(\xi) &= \int_{x_0}^x d\xi \frac{y'(\xi)}{g(y(\xi))} = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)}, \quad \eta = y(\xi). \end{aligned} \quad (6.6)$$

### Satz 6.1

Ist  $f(x)$  im offenen Intervall  $I_x$  und  $g(y)$  im offenen Intervall  $I_y$  stetig, und gilt  $g(y) \neq 0 \forall y \in I_y$ , dann besitzt das Anfangswertproblem  $y(x_0) = y_0$  der Dgl. (6.5) mit  $x_0 \in I_x$  und  $y_0 \in I_y$  in einer Umgebung von  $x_0$  genau eine Lösung  $y(x)$ .

#### Beweis:

Nach der Voraussetzung  $\exists$  Stammfunktionen  $F(x)$  und  $G(y)$  von  $f(x)$  und  $1/g(y)$ , d.h.  $F' = f$  und  $G' = 1/g$  in  $I_x$  bzw.  $I_y$ .

Wähle konstanten Anteil in  $G$ , so dass  $F(x_0) = G(y_0)$  für gegebenes  $y_0 \in I_y$ .

$\Leftrightarrow$  (6.6) lautet  $F(x) = G(y(x))$  mit  $y(x_0) = y_0$ .

$G$  ist in einer Umgebung  $I$  von  $y_0$  invertierbar, da  $G'(y) = 1/g(y) \neq 0 \forall y \in I_y$ .

$$\Rightarrow y(x) = G^{-1}(F(x)), \quad y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(G(y_0)) = y_0.$$

Auf Grund der Äquivalenz von (6.5) und (6.6) und der Eindeutigkeit des Inversen  $G^{-1}$  ist  $y(x)$  eindeutige Lösung. q.e.d.

#### Beispiel:

Anfangswertproblem:

$$y' = e^y \sin x, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int_0^x d\xi f(\xi) &= \int_0^x d\xi \sin \xi = 1 - \cos x \\ &= \int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{y_0}^{y(x)} d\eta e^{-\eta} = e^{-y_0} - e^{-y(x)}. \\ \Leftrightarrow y(x) &= -\ln(e^{-y_0} - 1 + \cos x). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Beachte: Die Lösung existiert  $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ , ist aber nicht immer  $\forall x \in \mathbb{R}$  definiert!

b) Dgl. der Form:

$$y' = f(ax + by + c), \quad b \neq 0. \quad (6.9)$$

Lösung durch Transformation der abhängigen Variablen  $y$  gemäß

$$u(x) := ax + by(x) + c, \quad (6.10)$$

so dass (6.9) äquivalent wird zu

$$u' = a + by' = a + bf(u). \quad (6.11)$$

⇒ Zurückführung von (6.9) auf Fall a)!

**Beispiel:**

$$y' = (x + y)^2. \quad (6.12)$$

$$\Leftrightarrow u' = 1 + u^2, \quad u = x + y.$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x &= \int dx \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2} = \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan(u) + \text{const.} \\ &= \arctan(x + y) + \text{const.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Allgemeine Lösung: } y(x) = \tan(x + c) - x, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (6.13)$$

c) Dgl. der Form:

$$y' = f(y/x). \quad (6.14)$$

Lösung durch Transformation der abhängigen Variablen  $y$  gemäß

$$u(x) := y(x)/x, \quad (6.15)$$

so dass (6.14) äquivalent wird zu

$$u' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{f(u) - u}{x}. \quad (6.16)$$

⇒ Zurückführung von (6.14) auf Fall a)!

**Beispiel:**

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}. \quad (6.17)$$

$$\Leftrightarrow u' = \frac{1}{x} \left( u - \frac{1}{u^2} - u \right) = -\frac{1}{xu^2}, \quad u = \frac{y}{x}.$$

$$\Leftrightarrow \int du u^2 = \frac{u^3}{3} + \text{const.} = -\int \frac{dx}{x} = -\ln(x) + \text{const.}'$$

$$\Rightarrow \text{Allgemeine Lösung: } y(x) = x \sqrt[3]{c - 3 \ln(x)}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (6.18)$$

d) „Lineare Dgl.“:

$$y' + f(x)y = h(x). \quad (6.19)$$

Analogie zu linearen Gleichungssystemen der linearen Algebra:

Allgemeine Lsg. von (6.19) = Allgemeine Lsg. der homogenen Dgl.  $y' + f(x)y = 0$   
+ spezielle Lsg. von (6.19).

- Lsg. der homogenen Gleichung wie in a):  $y' = -f(x)y$ ,  $g(y) = -y$ .

$$\begin{aligned} \hookrightarrow F(x) &= \int dx f(x), \\ G(y) &= -\int \frac{dy}{y} = -\ln y + \text{const.}, \quad G^{-1}(x) = ce^{-x}. \\ \Rightarrow y(x) &= G^{-1}(F(x)) = c \exp\{-F(x)\}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

- Lsg. der inhomogenen Gleichung (6.19) durch „Variation der Konstanten“:

Ansatz:  $y(x) = C(x) \exp\{-F(x)\}$ .

Einsetzen in (6.19) ergibt Dgl. für  $C(x)$ :

$$y'(x) + f(x)y(x) = C'(x) \exp\{-F(x)\} \underbrace{- y(x)F'(x) + f(x)y(x)}_{=0} \stackrel{!}{=} h(x).$$

$$C'(x) = \exp\{F(x)\} h(x).$$

$$C(x) = \int dx \exp\{F(x)\} h(x).$$

$\Rightarrow$  Allgemeine Lsg. von (6.19):

$$y(x) = \exp\{-F(x)\} \left( c + \int dx \exp\{F(x)\} h(x) \right), \quad c \in \mathbb{R}. \quad (6.21)$$

### Anmerkung:

Nach Satz 6.1 ist die Lsg. des zugehörigen Anfangswertproblems lokal eindeutig, falls  $f, h$  stetig.

### Beispiel:

$$y' + y \sin x = \sin^3 x. \quad (6.22)$$

Lsg. der homogenen Dgl.  $y' + f(x)y = y' + y \sin x = 0$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int dx \sin x = -\cos x + \text{const.} \\ \Rightarrow y(x) &= c \exp\{\cos x\}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

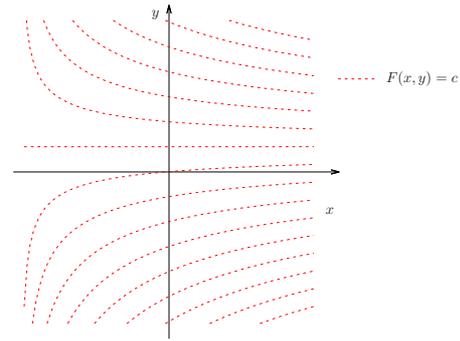
Lsg. der Dgl. (6.22):

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp\{\cos x\} \int dx \exp\{-\cos x\} \sin^3 x, \quad t := \cos x \\ &= -\exp\{\cos x\} \underbrace{\int^{\cos x} dt e^{-t}(1-t^2)}_{= \exp\{-\cos x\}(1+\cos x)^2 + \text{const.}} \\ &= -(1 + \cos x)^2 + c \exp\{\cos x\}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

e) „Exakte Dgl.“:

Vorüberlegung:

Eindeutige Lsgen. der Dgl.  $y' = f(x, y)$  definieren eine Kurvenschar, die einen Teil von  $\mathbb{R}^2$  überdeckt.



Standardform der Kurvenschar:

$$F(x, y) = c = \text{const.} \quad \Leftrightarrow \quad F_x(x, y) + F_y(x, y) y' = 0. \quad (6.25)$$

Vergleich mit alternativer Form der Dgl.:

$$g(x, y) + h(x, y) y' = 0. \quad (6.26)$$

Frage: Wann gilt  $g = F_x, h = F_y$ , d.h. wann ist  $(g, h)^T$  ein Gradientenfeld  $\nabla F$ ?

Bekannte Antwort:

- Notwendige und hinreichende Bedingung:  $\text{rot}(g, h, 0)^T = (0, 0, h_x - g_y)^T = 0$ .
- Explizite Lsg.: Kurvenintegral in  $\mathbb{R}^2$  über beliebigen Weg  $\alpha(x, y)$  nach  $(x, y)$ ,

$$F(x, y) = \int_{\alpha(x, y)} d\xi \cdot (g(\xi), h(\xi)). \quad (6.27)$$

**Definition 6.1** „Exakte Dgl.“

Die Dgl. (6.26) heißt „exakt“, falls  $g, h$  in einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  stetig sind und eine „Stammfunktion“  $F$  existiert mit  $(g, h)^T = \nabla F$  gilt.

**Satz 6.2**

Eine Dgl. (6.26) mit Funktionen  $g, h$ , die in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  stetig diff'bar sind, ist genau dann exakt, wenn  $h_x = g_y$  auf  $G$  gilt. Die Lsgen.  $y(x)$  der Dgl. sind dann gegeben durch  $F(x, y(x)) = c$  mit der Stammfunktion (6.27) mit geeigneten Konstanten  $c \in \mathbb{R}$ .

Verallgemeinerung:

Form (6.26) der Dgl. nicht eindeutig. Äquivalente Form für  $\phi \neq 0$ :

$$\phi(x, y)g(x, y) + \phi(x, y)h(x, y) y' = 0. \quad (6.28)$$

$\Leftrightarrow$  Falls  $(g, h)^T \neq \nabla F$ , suche „integrierenden Faktor“  $\phi$ , so dass  $(\phi g, \phi h)^T = \nabla F$ .

**Anmerkung:**

In einfachen Fällen lassen sich integrierende Faktoren oft erraten bzw. durch geschickte Ansätze finden.

Im allgemeinen Fall ist das Finden von  $\phi$  so kompliziert wie die Dgl. selbst.

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} y + 2xy' &= 0, & g &= y, & h &= 2x, \\ g_y &= 1 \neq h_x = 2. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Integrierender Faktor:  $\phi = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \frac{y}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{xy}' &= 0, & g &= \frac{y}{\sqrt{x}}, & h &= 2\sqrt{x}, \\ g_y &= \frac{1}{\sqrt{x}} = h_x. \end{aligned} \quad (6.30)$$

$\Rightarrow$  Dgl. (6.30) exakt mit Stammfunktion  $F(x, y) = 2\sqrt{xy}$ .

Allgemeine Lösung der Dgl. für  $x > 0$ :

$$y(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (6.31)$$



# Kapitel 7

## Anfangswertprobleme

Zur Behandlung der Frage nach Existenz und Eindeutigkeit werden zunächst einige Begriffe aus der Funktionalanalysis eingeführt.

### 7.1 Banach-Raum und Fixpunktsatz

**Definition 7.1** „Normierter Raum“

Ein „normierter Raum“ ist ein Vektorraum  $V$  über dem Körper  $K = \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ , auf dem  $\forall a \in V$  eine „Norm“  $\|a\| \in \mathbb{R}$  definiert ist mit den Eigenschaften:

a) Definitheit:

$$\|a\| \geq 0, \quad \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0. \quad (7.1)$$

b) Homogenität:

$$\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|, \quad \lambda \in K. \quad (7.2)$$

c) Dreiecksungleichung:

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad \forall a, b \in V. \quad (7.3)$$

**Folgerung:**

Ein norm. Raum  $V$  ist insbesondere ein metrischer Raum mit Abstand  $d(a, b) = \|a - b\|$ .

$\Leftrightarrow$  Auf  $V$  sind folgende Begriffe wie üblich definiert:

Umgebung, offene und geschlossene Mengen, Konvergenz, Häufungspunkt, Cauchy-Folge, Grenzwert, etc.

**Definition 7.2** „Banach-Raum“

Ein *vollständiger* normierter Raum heißt „Banach-Raum“ (d.h. dort hat jede Cauchy-Folge einen Grenzwert).

**Beispiele:**

a)  $V = \mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  ist Banach-Raum mit „ $p$ -Norm“  $\|\cdot\|_p$ , wobei  $1 \leq p \leq \infty$ :

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in V. \quad (7.4)$$

Spezialfälle:

$$\text{Summennorm:} \quad \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad (7.5)$$

$$\text{Euklidische Norm:} \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} = |\mathbf{x}|, \quad (7.6)$$

$$\text{Maximumsnorm:} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_k |x_k|. \quad (7.7)$$

b)  $V = C^0(K) =$  Menge aller stetigen Funktionen  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt.  
 $V$  ist Banach-Raum mit Maximumsnorm:

$$\|f\|_\infty = \max_{\mathbf{x} \in K} |f(\mathbf{x})|. \quad (7.8)$$

Beachte:

Kompaktheit von  $K$  entscheidend, da dann gleichmäßige Stetigkeit vorliegt und Funktionenfolgen gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergieren.

c)  $V = H^\infty(G) =$  Menge aller beschränkten, holomorphen Funktionen  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet.

$V$  ist Banach-Raum mit Supremumsnorm:

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in G} |f(z)|. \quad (7.9)$$

Beachte:

Beschränktheit sichert  $\|f\|_\infty < \infty \forall f \in V$ , Satz 4.5 (formuliert für Funktionenfolgen) sichert Existenz und Holomorphie der Grenzfunktion. Letztere ist beschränkt, da Cauchy-Folgen generell beschränkt sind.

**Definition 7.3** „Äquivalenz von Normen“

Zwei Normen  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  eines Banach-Raumes  $V$  heißen äquivalent, falls es zwei reelle Zahlen  $\alpha, \beta > 0$  gibt, so dass

$$\alpha \|a\|' \leq \|a\| \leq \beta \|a\|' \quad \forall a \in V. \quad (7.10)$$

**Anmerkungen:**

- Der Konvergenzbegriff zweier äquivalenter Normen ist identisch.
- Alle  $p$ -Normen in  $V = \mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  sind äquivalent.

**Definition 7.4** „Operator, Funktional, Stetigkeit, Lipschitz-Bedingung“

Ein „Operator“ ist eine Abbildung  $T : D \rightarrow W$  mit  $D \subset V$  zwischen den normierten Räumen  $V, W$ . Falls  $W = \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ , heißt  $T$  auch „Funktional“.

- a)  $T$  heißt „stetig“ in  $a \in D$ , falls aus  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  auch  $T(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(a_n)$  folgt, d.h. zu jedem  $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass  $\|T(a) - T(b)\| < \epsilon \forall b \in D$  mit  $\|a - b\| < \delta$ .
- b)  $T$  genügt einer „Lipschitz-Bedingung“ in  $D$ , falls

$$\|T(a) - T(b)\| \leq L\|a - b\| \quad \forall a, b \in D. \quad (7.11)$$

Die Konstante  $L \in \mathbb{R}$  heißt „Lipschitz-Konstante“.

**Anmerkungen:**

- Genügt  $T$  in  $D$  einer Lipschitz-Bedingung, ist  $T$  in  $D$  auch stetig.
- $\exists$  stets eine kleinste Lipschitz-Konstante:  $L_0 = \inf \{L \mid L = \text{Lipschitz-Konstante}\}$ .

**Definition 7.5** „Linearer Operator, Operatornorm“

Ein Operator  $T : V \rightarrow W$  heißt „linear“, falls  $V, W$  Vektorräume über dem Körper  $K = \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  sind, und

$$T(\alpha a + \beta b) = \alpha T(a) + \beta T(b) \quad \forall a, b \in V, \quad \alpha, \beta \in K. \quad (7.12)$$

Falls auf  $V \neq \{0\}$ ,  $W$  Normen  $\|\cdot\|_V$  und  $\|\cdot\|_W$  definiert sind, so definiert

$$\|T\| := \sup_{a \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(a)\|_W}{\|a\|_V} = \sup_{\substack{a \in V \\ \|a\|_V = 1}} \|T(a)\|_W \quad (7.13)$$

die „Operatornorm“ von  $T$ , d.h.  $\|T\|$  ist die kleinste Lipschitz-Konstante von  $T$  in  $V$ .

**Satz 7.1** Seien  $T_1 : V \rightarrow W_1$  und  $T_2 : W_1 \rightarrow W_2$  lineare Operatoren zwischen normierten Räumen. Dann gilt:

$$\|T_2 T_1\| \leq \|T_2\| \|T_1\|. \quad (7.14)$$

**Beweis:**

Der Fall  $\|T_1\| = 0$  ist trivial, da dann  $T_1 \equiv 0$  und somit  $\|T_2 T_1\| = 0$ .

Für  $\|T_1\| \neq 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \|T_2 T_1\| &= \sup_{a \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T_2(T_1(a))\|_{W_2}}{\|a\|_V} = \sup_{\substack{a \in V \setminus \{0\} \\ T_1(a) \neq 0}} \frac{\|T_2(T_1(a))\|_{W_2}}{\|T_1(a)\|_{W_1}} \frac{\|T_1(a)\|_{W_1}}{\|a\|_V} \\ &\leq \sup_{b \in W_1 \setminus \{0\}} \frac{\|T_2(b)\|_{W_2}}{\|b\|_{W_1}} \cdot \sup_{a \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T_1(a)\|_{W_1}}{\|a\|_V} = \|T_2\| \|T_1\|. \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

**Beispiele:**

- a) Ist  $V = \mathbb{C}^n$  und  $W = \mathbb{C}^m$  und  $T$  durch die  $m \times n$ -Matrix  $A = (a_{kl})$  repräsentiert, so induzieren die Normen  $\|\cdot\|_p$  mit  $p = 1, 2, \infty$  verschiedene „Matrixnormen“, z.B.:

$$\text{Zeilensummennorm: } \|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{k=1,\dots,m} \sum_{l=1}^n |a_{kl}|, \quad (7.15)$$

- b) Sei  $V = C^0(I)$  mit  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  und  $W = \mathbb{R}$ . Dann ist

$$T(f) = \int_a^b dt f(t) \quad (7.16)$$

ein lineares Funktional. Falls  $\|\cdot\|_V = \text{Maximumsnorm}$  und  $\|\cdot\|_W = |\cdot|$ , dann ist  $\|T\| = |b - a|$ , da

$$|T(f)| = \left| \int_a^b dt f(t) \right| \leq |b - a| \max_{t \in I} |f(t)| = |b - a| \|f\| \quad (7.17)$$

und  $|T(f)| = |b - a| \|f\|$  für  $f = \text{const.}$  erfüllt ist.

**Satz 7.2** „Banachscher Fixpunktsatz“

Sei  $B$  ein Banach-Raum und  $T : D \rightarrow B$  ein Operator mit  $T(D) \subset D \subset B$ , wobei  $D$  abgeschlossen ist. Falls  $T$  eine „Kontraktion“ ist, d.h. einer Lipschitz-Bedingung mit  $L < 1$  genügt, dann hat  $T$  in  $D$  genau einen Fixpunkt, d.h. die Gleichung  $T(a) = a$  hat genau eine Lösung  $a = \hat{a} \in D$ . Ausgehend von irgendeinem  $a_0 \in D$ , ergibt sich  $\hat{a}$  als Grenzwert der Folge  $(a_k)_{k=0}^\infty$ , wobei  $a_{k+1} = T(a_k)$ , d.h.  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \hat{a}$ . Dabei gilt:

$$\|a_k - \hat{a}\| \leq \frac{1}{1-L} \|a_{k+1} - a_k\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|a_1 - a_0\|. \quad (7.18)$$

**Beweis:**

- Als Hilfsmittel beweist man zunächst die „Defektungleichung“:

$$\|a - b\| \leq \frac{1}{1-L} \left( \underbrace{\|a - T(a)\|}_{\text{„Defekt“ von } a} + \|b - T(b)\| \right) \quad \forall a, b \in D. \quad (7.19)$$

Diese folgt unmittelbar aus:

$$\begin{aligned} \|a - b\| &= \|(a - T(a)) + (T(a) - T(b)) + (T(b) - b)\| \\ &\leq \|a - T(a)\| + \|T(a) - T(b)\| + \|T(b) - b\| \\ &\leq \|a - T(a)\| + L\|a - b\| + \|b - T(b)\|. \end{aligned}$$

- Nachweis der 2. Ungleichung in (7.18):

$$\|a_{k+1} - a_k\| = \|T(a_k) - T(a_{k-1})\| \leq L\|a_k - a_{k-1}\| \leq \dots \leq L^k \|a_1 - a_0\|. \quad (7.20)$$

- Nachweis, dass  $(a_k)$  Cauchy-Folge und somit konvergent gegen ein  $\hat{a} \in B$ , so dass auch  $\hat{a} \in D$  auf Grund der Abgeschlossenheit von  $D$ .

Abschätzung für  $l = k + m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ):

$$\begin{aligned} \|a_k - a_l\| &\leq \frac{1}{1-L} \left( \underbrace{\|a_k - T(a_k)\|}_{=\|a_k - a_{k+1}\|} + \underbrace{\|a_l - T(a_l)\|}_{=\|a_l - a_{l+1}\|} \right) \quad \text{nach (7.19)} \\ &\leq \frac{1}{1-L} (L^k + L^l) \|a_1 - a_0\| \quad \text{nach (7.20)} \\ &= \frac{L^k}{1-L} (1 + L^m) \|a_1 - a_0\| < \frac{2L^k}{1-L} \|a_1 - a_0\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

- Nachweis, dass  $\hat{a}$  Fixpunkt durch Stetigkeit von  $T$ :

$$T(\hat{a}) = T\left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} T(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = \hat{a}.$$

- Eindeutigkeit: Seien  $\hat{a}$  und  $\hat{b}$  beide Fixpunkte, dann folgt aus (7.19) für  $a = \hat{a}$  und  $b = \hat{b}$  sofort  $\|\hat{a} - \hat{b}\| = 0$ , d.h.  $\hat{a} = \hat{b}$ .
- Die 1. Ungleichung in (7.18) folgt aus (7.19) mit  $a = a_k$  und  $b = \hat{a}$ .

q.e.d.

## 7.2 Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Dglen. 1. Ordnung

**Ziel:** Untersuchung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (7.21)$$

bzgl. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen.

Strategie:

Suche äquivalentes Problem  $y = T(y)$  in Banach-Raum und verwende Fixpunktsatz.

### Satz 7.3

Sei  $x_0 \in I = [a, b]$  ( $I$  = kompakt!) und  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $S = I \times \mathbb{R}$  stetig. Dann ist das Anfangswertproblem (7.21) äquivalent zu  $y = Ty$ , wobei  $T : C^0(I) \rightarrow C^0(I)$  der Operator

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x dt f(t, y(t)) \quad (7.22)$$

auf dem Banach-Raum  $C^0(I)$  der auf  $I$  stetigen Funktionen ist ( $\|\cdot\|$  = Maximumsnorm).

**Beweis:**

Da  $f$  stetig, ist  $(Ty)(x)$  auf  $I$  stetig diff'bar, also insbesondere auf  $C^0(I)$  definiert.

- (7.21)  $\Rightarrow Ty = y$ :

Einsetzen von (7.21) in  $Ty$  liefert:

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x dt y'(t) = y_0 + y(x) - y(x_0) = y(x).$$

- $Ty = y \Rightarrow$  (7.21):

$$(Ty)'(x) = f(x, y(x)) = y'(x).$$

Nach der Definition von  $Ty$  gilt auch  $(Ty)(x_0) = y_0$ .

q.e.d.

**Satz 7.4** (Satz von Picard-Lindelöf)

Sei  $x_0 \in I = [a, b]$ ,  $y_0 \in J = [y_0 - r, y_0 + r]$  ( $r > 0$ ) und  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  genüge auf  $S = I \times J$  einer Lipschitz-Bedingung bzgl.  $y$ ,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|. \quad (7.23)$$

Dann hat das Anfangswertproblem (7.21) genau eine Lösung  $y(x)$  im Intervall  $I_d = I \cap [x_0 - d, x_0 + d] =: [\alpha, \beta] \neq \emptyset$ , wobei  $M = \max_{(x,y) \in S} |f(x, y)| < \infty$  und  $d = r/M > 0$ .

**Beweis:**

- Für  $x \in I_d$  und  $y \in D = \{f \in C^0(I_d) \mid y(x_0) = y_0, y(x) \in J \forall x \in I\} \subset C^0(I_d)$  gilt:

$$|(Ty)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x dt f(t, y(t)) \right| \leq M|x - x_0| \leq Md = r.$$

$$\Rightarrow Ty \in D.$$

- (7.23) impliziert Lipschitz-Bedingung für  $T$  auf  $D$ , d.h. für  $y_1, y_2 \in D$  und  $x \in I_d$  gilt:

$$\begin{aligned} |(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x dt [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))] \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x dt |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x dt |y_1(t) - y_2(t)| \right| \leq L \|y_1 - y_2\| |x - x_0|. \\ \Rightarrow \|Ty_1 - Ty_2\| &\leq L_D \|y_1 - y_2\|, \quad L_D = L|\beta - \alpha|. \end{aligned}$$

Aber: Lipschitz-Konstante  $L_D$  könnte  $\geq 1$  sein!

- Zunächst Einschränkung auf Intervall  $I_\Delta = [x_0 - \Delta\alpha, x_0 + \Delta\beta]$  mit  $\Delta\alpha = \frac{x_0 - \alpha}{n}$ ,  $\Delta\beta = \frac{\beta - x_0}{n}$  und  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $L_\Delta = L \frac{\beta - \alpha}{n} < 1$ .

$\Rightarrow \exists$  eindeutiges  $y \in C^0(I_\Delta)$  mit  $Ty = y$  nach Banachschem Fixpunktsatz 7.2.

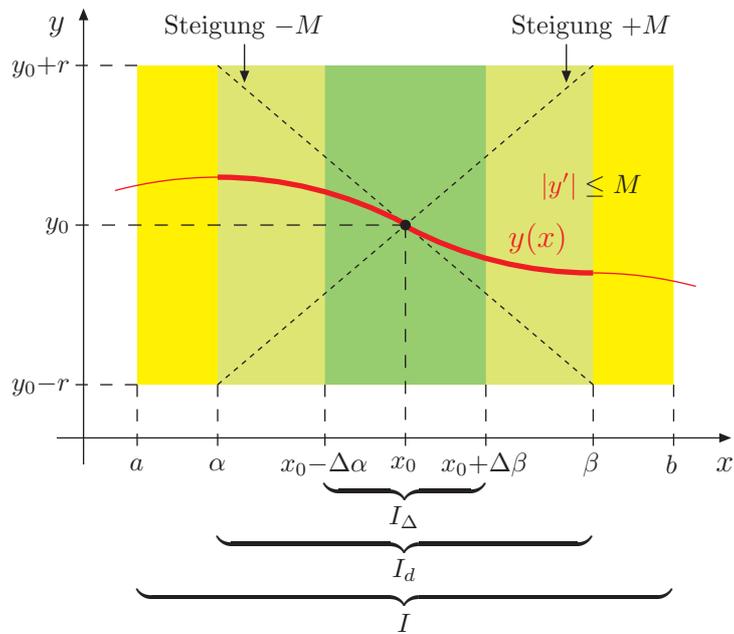
- Sukzessive Fortsetzung der Lösung zu Intervallen  $[x_0 - 2\Delta\alpha, x_0 - \Delta\alpha]$ ,  $[x_0 - 3\Delta\alpha, x_0 - 2\Delta\alpha]$ ,  $\dots$ ,  $[\alpha, \alpha + \Delta\alpha]$  und  $[x_0 + \Delta\beta, x_0 + 2\Delta\beta]$ ,  $[x_0 + 2\Delta\beta, x_0 + 3\Delta\beta]$ ,  $\dots$ ,  $[\beta - \Delta\beta, \beta]$ , in denen überall die Lipschitz-Bedingung für  $T$  mit  $L_\Delta < 1$  gilt.

$\Rightarrow$  Eindeutige Lösung  $y(x)$  in ganz  $I_d = [\alpha, \beta]$ .

q.e.d.

Beachte: Hierarchie von Intervallen:

$$\begin{array}{ccccc}
 I & \supseteq & I_d & \supseteq & I_\Delta \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Lipschitz-Bed. } L & & \& Ty \in D & \& \text{Lipschitz-Bed. } L_\Delta < 1
 \end{array}$$



**Anmerkungen:**

- Falls  $f$  auf  $S$  stetig partiell nach  $y$  diff'bar, gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f_y(x, \eta)| |y_1 - y_2| \quad \text{für ein } \eta \in (y_1, y_2). \quad (7.24)$$

⇒ Die Lipschitz-Bedingung (7.23) gilt mit  $L = \max_S |f_y|$ .

- Der konstruktive Beweis sichert sukzessive Approximation durch „Picard-Iteration“:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x dt f(t, y_0) \quad \text{bzw. irgendein } y_1 \in D, \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x dt f(t, y_1(x)), \\ &\vdots \\ y_{k+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x dt f(t, y_k(x)), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Normkonvergenz von  $(y_k)$  garantiert gleichmäßige Konvergenz auf  $I_\Delta$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) = y(x). \quad (7.25)$$

**Satz 7.5** (Abschätzung für Picard-Iteration)

Unter den in Satz 7.4 gegebenen Voraussetzungen genügt die  $k$ . Picard-Iteration  $y_k(x) := (T^k y_0)(x)$  für  $x \in I_d$  der Abschätzung

$$|y(x) - y_k(x)| \leq M L^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad (7.26)$$

wobei  $y(x)$  die exakte Lösung des Anfangswertproblems (7.21) ist.

**Beweis:**

$x \in I_d$  sichert, dass alle  $y_k(x) \in J$  bleiben.

Beweis von (7.26) durch Induktion in  $k$ :

- $k = 0$ :

$$|y(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x dt f(t, y_0) \right| \leq M |x - x_0|. \quad \checkmark$$

- $(k-1) \rightarrow k$ : Annahme:  $x > x_0$  ( $x < x_0$  analog)

$$\begin{aligned} |y(x) - y_k(x)| &= \left| \int_{x_0}^x dt [f(t, y(t)) - f(t, y_{k-1}(t))] \right| \\ &\leq L \int_{x_0}^x dt |y(t) - y_{k-1}(t)| \quad \leftarrow \text{verwende Induktionsannahme!} \\ &\leq L \cdot M L^{k-1} \int_{x_0}^x dt \frac{(t - x_0)^k}{k!} \\ &= M L^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}. \quad \checkmark \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

**Beispiele:**

- $y' = f(x, y) = 2xy$ ,  $y(0) = 1$ ,  $x \in [-a, a]$ ,  $a > 0$ .

$f$  erfüllt Lipschitz-Bedingung:  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = 2|x||y_1 - y_2| \leq 2a|y_1 - y_2|$ .

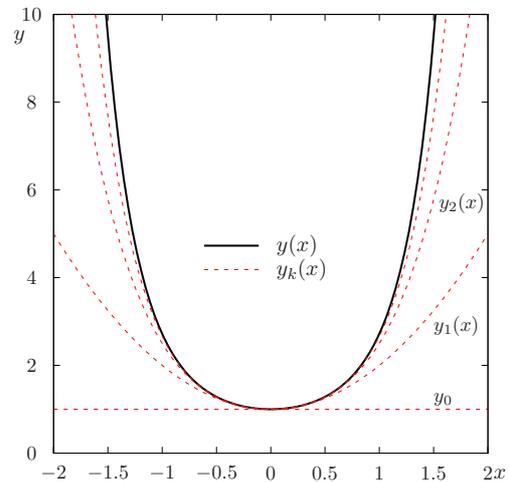
Picard-Iteration:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ y_1(x) &= 1 + \int_0^x dt \, 2t = 1 + x^2, \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x dt \, 2t(1 + t^2) \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}, \\ y_3(x) &= 1 + \int_0^x dt \, 2t \left( 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} \right) \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}, \end{aligned}$$

$$y_k(x) \stackrel{?}{=} \sum_{m=0}^k \frac{x^{2m}}{m!}, \quad \text{Nachweis durch vollständige Induktion!}$$

$$y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x dt \, 2t \sum_{m=0}^k \frac{t^{2m}}{m!} = 1 + \sum_{m=0}^k \frac{x^{2m+2}}{m! \cdot (m+1)} = \sum_{m=0}^{k+1} \frac{x^{2m}}{m!}. \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{m!} = e^{x^2}.$$



- $y' = f(x, y) = -2x + 5\sqrt{|y|}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $x \in [-r, r]$ ,  $r > 0$ .

$f$  erfüllt bei  $y = 0$  keine Lipschitz-Bedingung:

$$|f(x, y) - f(x, 0)| = 5\sqrt{|y|} > c|y| \quad \text{für hinreichend kleine } |y| \text{ und all } c \in \mathbb{R}.$$

Zwei mögliche Lösungen des Anfangswertproblems:

$$y_a(x) = 4x^2, \quad y_b(x) = \frac{x^2}{4}.$$

Anmerkung: Es gibt noch andere (kompliziertere) Lösungen.

Wichtige Frage in der Praxis:

Abhängigkeit der Lösung von Anfangsbedingungen bzw. Unsicherheiten in  $f$ ?

**Satz 7.6** (Abstandskontrolle von Lösungen)

Seien  $y(x)$  und  $\hat{y}(x)$  mit  $x \in [a, b]$  Lösungen der Anfangswertprobleme

$$y' = f(x, y), \quad y_0 = y(x_0), \quad \hat{y}' = \hat{f}(x, \hat{y}), \quad \hat{y}_0 = \hat{y}(\hat{x}_0). \quad (7.27)$$

Ferner sollen die Graphen  $(x, y(x))$  und  $(x, \hat{y}(x))$  innerhalb der kompakten Menge  $K \subset \mathbb{R}^2$  verlaufen. Wenn  $\hat{f}$  auf  $K$  der Lipschitz-Bedingung

$$|\hat{f}(x, y_1) - \hat{f}(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (7.28)$$

genügt, dann erfüllt der Abstand  $\rho(x) = |y(x) - \hat{y}(x)|$  die Ungleichung

$$\rho(x) \leq \epsilon_0 e^{L|x-x_0|} + \frac{\epsilon_1}{L} (e^{L|x-x_0|} - 1), \quad (7.29)$$

wobei die Konstanten  $\epsilon_0, \epsilon_1 > 0$  gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= |y_0 - \hat{y}_0| + M|x_0 - \hat{x}_0|, \quad M = \max_K |\hat{f}(x, y)|, \\ \epsilon_1 &= \max_K |f(x, y) - \hat{f}(x, y)|. \end{aligned} \quad (7.30)$$

**Beweis:**

- Aus den Integralgleichungen für  $y$  und  $\hat{y}$  (siehe Satz 7.3) folgt:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \left| y_0 - \hat{y}_0 + \int_{x_0}^x dt f(t, y(t)) - \int_{\hat{x}_0}^x dt \hat{f}(t, \hat{y}(t)) \right| \\ &= \left| y_0 - \hat{y}_0 + \int_{x_0}^x dt [f(t, y(t)) - \hat{f}(t, y(t))] \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0}^x dt [\hat{f}(t, y(t)) - \hat{f}(t, \hat{y}(t))] - \int_{\hat{x}_0}^{x_0} dt \hat{f}(t, \hat{y}(t)) \right| \\ &\leq |y_0 - \hat{y}_0| + \epsilon_1 |x - x_0| + L \left| \int_{x_0}^x dt |y(t) - \hat{y}(t)| \right| + M|x_0 - \hat{x}_0| \\ &\leq \epsilon_0 + \left| \int_{x_0}^x dt (L\rho(t) + \epsilon_1) \right| =: h(x). \end{aligned}$$

- $h(x)$  ist stetig und für  $x > x_0$  und  $x < x_0$  diff'bar (nicht bei  $x_0$ ).

Für  $x > x_0$  gilt (analoges Vorgehen für  $x < x_0$ ):

$$\begin{aligned} h'(x) &= L\rho(x) + \epsilon_1 \leq Lh(x) + \epsilon_1, \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (e^{-Lt} h(t)) &= -Le^{-Lt} h(t) + e^{-Lt} h'(t) \leq \epsilon_1 e^{-Lt}. \end{aligned}$$

Integration  $\int_{x_0}^x dt$  ergibt:

$$\begin{aligned} e^{-Lx} h(x) - e^{-Lx_0} \underbrace{h(x_0)}_{=\epsilon_0} &\leq -\frac{\epsilon_1}{L} (e^{-Lx} - e^{-Lx_0}). \\ \Rightarrow h(x) &\leq \epsilon_0 e^{L(x-x_0)} + \frac{\epsilon_1}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  (7.29) folgt aus  $\rho(x) \leq h(x)$ .

q.e.d.

Weiterführende Sätze ohne Beweis:

**Satz 7.7** (Fortsetzbarkeit von Lösungen)

Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  stetig, und  $f(x, y)$  genüge dort einer „lokalen Lipschitz-Bedingung“ bzgl.  $y$  (d.h.  $f$  genügt einer Lipschitz-Bedingung in jeder Umgebung  $U \subset G$  eines Punktes  $(x, y) \in G$ , wobei  $L = L(U)$ ). Dann hat das Anfangswertproblem (7.21) genau eine Lösung  $y(x)$  in  $G$ , die dem Rand  $\partial G$  von  $G$  beliebig nahe kommt und in  $G$  nicht fortgesetzt werden kann.

**Beweis:**

Siehe z.B. [11].

**Anmerkung:**

Der Satz impliziert, dass jede Lösung über den Rand einer kompakten Menge  $K \subset G$  hinaus fortgesetzt werden kann.

**Satz 7.8** (Existenzsatz von Peano)

Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  stetig, dann hat die Dgl.  $y' = f(x, y)$  mit  $y_0 = y(x_0)$  mindestens eine Lösung, die durch den Punkt  $(x_0, y_0) \in G$  geht. Jede Lösung  $y(x)$  lässt sich bis zum Rand von  $G$  fortsetzen.

**Beweis:**

Siehe z.B. [11].

**Anmerkung:**

Beweise des Satzes von Peano sind typischerweise nicht konstruktiv, d.h. geben kein Berechnungsverfahren für eine Lösung.

## 7.3 Systeme von Differentialgleichungen

Verallgemeinerung des Anfangswertproblems auf vektorwertige Funktionen

$$\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T \in \mathbb{R}^n:$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(x_0) \quad (7.31)$$

$\leftrightarrow$   $n$  Gleichungen für  $n$  unbekannte Funktionen  $y_k(x)$ .

Im Folgenden:

Problemlose Übertragung der bekannten Sätze für einfache Funktionen ( $n = 1$ )!

**Vorbereitung:** Räume und Normen

- In  $\mathbb{R}^n$  (bzw.  $\mathbb{C}^n$ ) sind alle  $p$ -Normen  $\|\cdot\|_p$  äquivalent gemäß Definition 7.3.  
 $\leftrightarrow$   $\|\mathbf{a}\|_p$  für  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  kann in Praxis z.B. ersetzt werden durch Euklidische Norm  $\|\mathbf{a}\|_2 \equiv |\mathbf{a}|$  oder Maximumnorm  $\|\mathbf{a}\|_\infty = \max_k |a_k|$ .
- Im Banach-Raum  $C^0(K) =$  Menge aller stetigen Funktionen  $\mathbf{f} : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $K \subset \mathbb{R}$  kompakt, wird die Maximumnorm bzgl. der  $x$ -Abhängigkeit vereinbart:

$$\|\mathbf{f}\| = \max_{x \in K} \|\mathbf{f}(x)\|_p. \quad (7.32)$$

### Satz 7.9

Sei  $x_0 \in I = [a, b]$  ( $I =$  kompakt!) und  $\mathbf{f} : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf  $S = I \times \mathbb{R}^n$  stetig. Dann ist das Anfangswertproblem (7.31) äquivalent zu  $\mathbf{y} = T\mathbf{y}$ , wobei  $T : C^0(I) \rightarrow C^0(I)$  der Operator

$$(T\mathbf{y})(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x dt \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \quad (7.33)$$

auf dem Banach-Raum  $C^0(I)$  ist.

**Beweis:**

Völlig analog zu Satz 7.3!

### Satz 7.10 (Satz von Picard-Lindelöf)

Sei  $x_0 \in I = [a, b]$ ,  $J = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|_p \leq r\}$  und  $\mathbf{f} : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  genüge auf  $S = I \times J$  einer Lipschitz-Bedingung bzgl.  $\mathbf{y}$ ,

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})\|_p \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_p. \quad (7.34)$$

Dann hat das Anfangswertproblem (7.31) genau eine Lösung  $\mathbf{y}(x)$  im Intervall  $I_d = I \cap [x_0 - d, x_0 + d] =: [\alpha, \beta] \neq \emptyset$ , wobei  $M = \max_{(x, \mathbf{y}) \in S} \|\mathbf{f}(x, \mathbf{y})\|_p < \infty$  und  $d = r/M > 0$ .

Die  $k$ . Picard-Iteration  $\mathbf{y}_k(x) := (T^k \mathbf{y}_0)(x)$  genügt für  $x \in I_d$  der Abschätzung

$$\|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_k(x)\|_p \leq M L^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (7.35)$$

**Beweis:**

Völlig analog zu Sätzen 7.4 und 7.5!

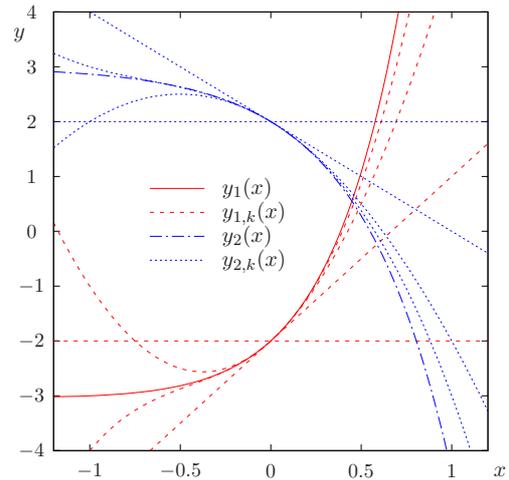
**Beispiel:**

Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 + 9, & y_1(0) &= -2, \\ y_2' &= 2y_2 - 6, & y_2(0) &= 2. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Lipschitz-Bedingung erfüllt auf ganz  $\mathbb{R}^2$ .Picard-Iteration für  $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0 &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_1(x) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \int_0^x dt \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 + 3x \\ 2 - 2x \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_2(x) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \int_0^x dt \begin{pmatrix} 3 + 8t \\ -2 - 4t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 + 3x + 4x^2 \\ 2 - 2x - 2x^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_3(x) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \int_0^x dt \begin{pmatrix} 3 + 8t + 10t^2 \\ -2 - 4t - 4t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 3x + 4x^2 + \frac{10}{3}x^3 \\ 2 - 2x - 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 \end{pmatrix}, \\ &\vdots \\ \mathbf{y}(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k(x) = \begin{pmatrix} -3 + (1+x)e^{2x} \\ 3 - e^{2x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Die Sätze 7.7 und 7.8 zur Fortsetzbarkeit bzw. zur Existenz einer Lösung gelten analog zum Fall  $n = 1$  (Beweise siehe z.B. [11]):

**Satz 7.11** (Fortsetzbarkeit von Lösungen)

Sei  $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf dem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  stetig, und  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  genüge dort einer „lokalen Lipschitz-Bedingung“ bzgl.  $\mathbf{y}$ . Dann hat das Anfangswertproblem (7.31) genau eine Lösung  $\mathbf{y}(x)$  in  $G$ , die dem Rand  $\partial G$  von  $G$  beliebig nahe kommt und in  $G$  nicht fortgesetzt werden kann.

**Satz 7.12** (Existenzsatz von Peano)

Ist  $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf dem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  stetig, dann hat die Dgl.  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  mit  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(x_0)$  mindestens eine Lösung, die durch den Punkt  $(x_0, \mathbf{y}_0) \in G$  geht. Jede Lösung  $\mathbf{y}(x)$  lässt sich bis zum Rand von  $G$  fortsetzen.

## 7.4 Differentialgleichungen n. Ordnung

**Ziel:** Lösung der expliziten Dgl.  $n$ . Ordnung:

$$u^{(n)} = g(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) \quad (7.37)$$

mit geeigneten Anfangswerten, die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen sichern.

↔ Zurückführung auf Dgl.-System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow \mathbf{y}'(x) &= \begin{pmatrix} u'(x) \\ u''(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \\ u^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_3(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \\ g(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{pmatrix} =: \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Dies impliziert:

### Satz 7.13

Das Anfangswertproblem für eine Dgl.  $n$ . Ordnung

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= g(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}), \\ u(x_0) &= u_0, \quad u'(x_0) = u'_0, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{(n-1)} \end{aligned} \quad (7.39)$$

ist äquivalent zum Dgl.-System 1. Ordnung (7.38) für  $\mathbf{y}(x)$  mit dem Anfangswert  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 = (u_0, u'_0, \dots, u_0^{(n-1)})^T$ .

↔ Anwendung der Sätze von Picard-Lindelöf und Peano zum Beweis von Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen.

**Satz 7.14** (Existenz und Eindeutigkeit)

Sei  $x_0 \in I = [a, b]$ ,  $J = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid |y_k - y_{0,k}| \leq r, k = 1, \dots, n\}$  und  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  genüge auf  $S = I \times J$  einer Lipschitz-Bedingung bzgl.  $\mathbf{y}$ ,

$$|g(x, \mathbf{y}) - g(x, \mathbf{z})| \leq L \max_k |y_k - z_k|. \quad (7.40)$$

Dann hat das Anfangswertproblem (7.39) mit  $y_{0,1} = u_0, y_{0,2} = u'_0, \dots$  genau eine Lösung  $u(x)$  im Intervall  $I_d = I \cap [x_0 - d, x_0 + d] =: [\alpha, \beta] \neq \emptyset$ , wobei  $d = r/M > 0$  und

$$M = \max \left\{ r + \max_{k>1} |y_{0,k}|, \max_{(x,\mathbf{y}) \in S} |g(x, \mathbf{y})| \right\}. \quad (7.41)$$

**Beweis:**

Anwendung des Satzes 7.10 von Picard-Lindelöf auf äquivalentes Dgl.-System!

Wähle dabei Maximumsnorm für  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $\|\mathbf{y}\|_p \rightarrow \|\mathbf{y}\|_\infty = \max_k |y_k|$ :

- Lipschitz-Bedingung bzgl.  $\mathbf{y}$  für  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})\|_\infty &\leq \max \left\{ \max_{k>1} |y_k - z_k|, |g(x, \mathbf{y}) - g(x, \mathbf{z})| \right\} \\ &\leq \max\{1, L\} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_\infty, \end{aligned}$$

wenn  $g$  der Lipschitz-Bedingung (7.40) genügt.

- Maximum von  $\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y})\|_\infty$ :

$$M = \max_{(x,\mathbf{y}) \in S} \|\mathbf{f}(x, \mathbf{y})\|_\infty = \max \left\{ r + \max_{k>1} |y_{0,k}|, \max_{(x,\mathbf{y}) \in S} |g(x, \mathbf{y})| \right\}.$$

$\Rightarrow$  Behauptung folgt direkt aus Satz 7.10.

q.e.d.

Übertragung der Sätze zur Fortsetzbarkeit und Existenz von Lösungen offensichtlich:

**Satz 7.15** (Fortsetzbarkeit)

Sei  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  stetig, und  $g(x, \mathbf{y})$  genüge dort einer „lokalen Lipschitz-Bedingung“ bzgl.  $\mathbf{y}$ . Dann hat das Anfangswertproblem (7.39) genau eine Lösung  $u(x)$  in  $G$ , die dem Rand  $\partial G$  von  $G$  beliebig nahe kommt und in  $G$  nicht fortgesetzt werden kann.

**Satz 7.16** (Existenz)

Ist  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  stetig, dann hat das Anfangswertproblem (7.39) mindestens eine Lösung, die durch den Punkt  $(x_0, u_0, \dots, u_0^{(n-1)}) \in G$  geht. Jede Lösung  $u(x)$  lässt sich bis zum Rand von  $G$  fortsetzen.

# Kapitel 8

## Lineare Differentialgleichungen

### 8.1 Lineare Dgl.-Systeme

**Ziel:** Untersuchung des Anfangswertproblems für Dgl.-System

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1(x) + \cdots + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x), & y_1(x_0) &= y_{0,1}, \\ \vdots & & \vdots & \\ y_n'(x) &= a_{n1}(x)y_1(x) + \cdots + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x), & y_n(x_0) &= y_{0,n} \end{aligned} \quad (8.1)$$

bzgl. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für  $x \in I =$  kompaktes Intervall.

Matrixschreibweise:  $A = (a_{kl}), \quad \mathbf{y} = (y_k), \quad \mathbf{b} = (b_k),$

$$\mathbf{y}'(x) = \underbrace{A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)}_{=\mathbf{f}(x,\mathbf{y})}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \quad (8.2)$$

**Vorbereitung:** Analysiere Lipschitz-Bedingung für  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  bzgl.  $\mathbf{y}$ :

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})\|_p = \|A(x)(\mathbf{y} - \mathbf{z})\|_p \leq \underbrace{\|A(x)\|_p}_{\text{Matrixnorm von } A(x)} \|(\mathbf{y} - \mathbf{z})\|_p. \quad (8.3)$$

Zur Erinnerung (Def. 7.5 und Beispiel danach):

$$\|A(x)\|_p = \max_{\mathbf{y}} \frac{\|A(x)\mathbf{y}\|_p}{\|\mathbf{y}\|_p} = \max_{\|\mathbf{y}\|_p=1} \|A(x)\mathbf{y}\|_p,$$

z.B.:  $\|A(x)\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} \sum_{l=1}^n |a_{kl}(x)|. \quad (\text{Zeilensummennorm}) \quad (8.4)$

$\Rightarrow$  Definiere Normen von Vektoren bzw. Matrizen für Funktionen von  $x \in I$ :

$$\|\mathbf{y}\| := \max_{x \in I} \|\mathbf{y}(x)\|_p,$$
$$\|A\| := \max_{x \in I} \|A(x)\|_p \quad \text{für } A : \mathbf{y}(x) \mapsto A(x)\mathbf{y}(x), \quad (8.5)$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})\|_p \leq \|A\| \|(\mathbf{y} - \mathbf{z})\|_p \quad \forall x \in I, \quad (8.6)$$

d.h.  $\|A\|$  ist globale Lipschitz-Konstante auf  $I \times \mathbb{R}^n$ , falls  $I =$  kompakt.

**Satz 8.1** (Existenz und Eindeutigkeit)

Das Anfangswertproblem (8.2) mit Funktionen  $A(x)$  und  $\mathbf{b}(x)$ , die auf dem kompakten Intervall  $I$  mit  $x_0 \in I$  stetig sind, hat genau eine Lösung  $\mathbf{y}(x)$  im Intervall  $I_d = I \cap [x_0 - d, x_0 + d] \neq \emptyset$  mit  $\mathbf{y}(x) \in J = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|_p \leq r\}$ , wobei  $M = \|A\| (\|\mathbf{y}_0\|_p + r) + \|\mathbf{b}\|$  und  $d = r/M > 0$ .

Die  $k$ . Picard-Iteration  $\mathbf{y}_k(x) := (T^k \mathbf{y}_0)(x)$  genügt für  $x \in I_d$  der Abschätzung

$$\|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_k(x)\|_p \leq M \|A\|^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (8.7)$$

Es existiert eine eindeutige Fortsetzung der Lösung auf dem maximalen offenen Intervall  $I' \supset I \supset I_d$ , auf dem  $A(x)$  und  $\mathbf{b}(x)$  stetig sind.

**Beweis:**

- Existenz und Eindeutigkeit auf  $I_d$  durch Anwendung von Satz 7.10:
  - Lipschitz-Bedingung erfüllt auf  $I$  mit  $L = \|A\|$  (siehe oben).
  - Berechnung von  $M$  auf  $S = I \times J$ : (Obergrenze ausreichend)

$$\begin{aligned} \max_{(x, \mathbf{y}) \in S} \|\mathbf{f}(x, \mathbf{y})\|_p &= \max_{(x, \mathbf{y}) \in S} \|A(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)\|_p \\ &\leq \underbrace{\max_{(x, \mathbf{y}) \in S} \|A(x)\mathbf{y}\|_p}_{\leq \|A\| (\|\mathbf{y}_0\|_p + r)} + \underbrace{\max_{x \in I} \|\mathbf{b}(x)\|_p}_{=\|\mathbf{b}\|} \\ &\leq \|A\| (\|\mathbf{y}_0\|_p + r) + \|\mathbf{b}\| =: M < \infty. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Existenz, Eindeutigkeit sowie Abschätzung 8.7 folgen direkt aus Satz 7.10.

- Existenz einer lokalen Lipschitz-Bedingung für jede kompakte Menge  $K = \tilde{I} \times \tilde{J} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , wenn  $A(x)$  und  $\mathbf{b}(x)$  stetig für  $x \in \tilde{I}$ .
  - $\Leftrightarrow \mathbf{y}(x)$  ist ausgehend von  $I_d \times J$  stets über den Rand von  $K$  eindeutig fortsetzbar.
  - $\Leftrightarrow \mathbf{y}(x)$  existiert eindeutig auf dem maximalen offenen Intervall  $I' \supset I \supset I_d$ , auf dem  $A(x)$  und  $\mathbf{b}(x)$  stetig sind.

q.e.d.

**Satz 8.2** (Lösungen des homogenen Dgl.-Systems)

Die Lösungen des homogenen linearen Dgl.-Systems

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) \quad (8.8)$$

spannen auf jedem Stetigkeitsintervall  $I$  von  $A(x)$  einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum auf, d.h. es gibt dort genau  $n$  linear unabhängige Lösungen  $\mathbf{y}_\nu(x)$  mit  $\nu = 1, \dots, n$ , und die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{\nu=1}^n c_\nu \mathbf{y}_\nu(x) \quad (8.9)$$

mit frei wählbaren Konstanten  $c_\nu \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:**

Wähle  $n$  linear unabhängige Vektoren  $\mathbf{y}_{0,\nu} \in \mathbb{R}^n$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ), d.h. eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ .

Jeder Anfangswert  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  ist entwickelbar in  $\{\mathbf{y}_{0,\nu}\}$ , d.h.  $\mathbf{y}_0 = \sum_{\nu=1}^n c_\nu \mathbf{y}_{0,\nu}$ .

Nach Satz 8.1 existiert zu jedem  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  auf  $I$  genau eine Lösung  $\mathbf{y}(x)$  mit  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ ; offensichtlich ist diese Lösung gegeben durch (8.9).

q.e.d.

**Definition 8.1** („Fundamentalsystem, Lösungsmatrix, Wronski-Determinante“)

$n$  linear unabhängige Lösungen  $\mathbf{y}_\nu(x)$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) des homogenen linearen Dgl.-Systems (8.9) bilden ein „Fundamentalsystem“. Die aus dem Fundamentalsystem gebildete Matrix

$$Y(x) = (\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)) \quad (8.10)$$

heißt „Lösungsmatrix“ und  $W(x) = \det Y(x)$  heißt „Wronski-Determinante“.

**Satz 8.3**

Eine Lösungsmatrix  $Y(x)$  von (8.9) genügt der Dgl.  $Y'(x) = A(x)Y(x)$ , und das Anfangswertproblem  $\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x)$  mit  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$  hat die Lösung

$$\mathbf{y}(x) = Y(x) C \mathbf{y}_0, \quad C = Y(x_0)^{-1}. \quad (8.11)$$

**Beweis:**

Die Dgl.  $Y'(x) = A(x)Y(x)$  folgt direkt aus der Tatsache, dass jede Spalte  $\mathbf{y}_\nu(x)$  die Dgl.  $\mathbf{y}'_\nu(x) = A(x)\mathbf{y}_\nu(x)$  erfüllt.

⇒ Für  $\mathbf{y}(x)$  aus (8.11) gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(x) &= Y'(x) C \mathbf{y}_0 = A(x) \underbrace{Y(x) C \mathbf{y}_0}_{=\mathbf{y}(x)} = A(x)\mathbf{y}(x), \\ \mathbf{y}(x_0) &= \underbrace{Y(x_0) C}_{=\mathbf{1}} \mathbf{y}_0. \end{aligned}$$

q.e.d.

**Satz 8.4**

Die Wronski-Determinante  $W(x)$  einer Lösungsmatrix  $Y(x)$  von (8.9) genügt der Dgl.

$$W'(x) = \operatorname{Tr}(A(x)) W(x), \quad (8.12)$$

so dass

$$W(x) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x dt \operatorname{Tr}(A(t)) \right\} W(x_0). \quad (8.13)$$

**Beweis:**

Erinnerung: Berechnung von  $\det$  und  $\operatorname{Tr}$  („Spur“) einer Matrix  $M = (m_{kl})$ :

$$\det(M) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \epsilon_{i_1, \dots, i_n} m_{1i_1} \cdots m_{ni_n}, \quad (8.14)$$

$$\epsilon_{i_1, \dots, i_n} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (i_1, \dots, i_n) = \text{gerade Permutation von } (1, \dots, n), \\ -1, & \text{falls } (i_1, \dots, i_n) = \text{ungerade Permutation von } (1, \dots, n), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\operatorname{Tr}(M) = \sum_{k=1}^n m_{kk}. \quad (8.15)$$

Anwendung auf  $W(x)$ :

$$\begin{aligned} W'(x) &= (\det Y)' = \left( \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \epsilon_{i_1, \dots, i_n} y_{1,i_1} \cdots y_{n,i_n} \right)' \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \epsilon_{i_1, \dots, i_n} \left[ \underbrace{y'_{1,i_1} \cdots y_{n,i_n}}_{= \sum_k a_{i_1 k} y_{1,k}} + \cdots + y_{1,i_1} \cdots \underbrace{y'_{n,i_n}}_{= \sum_k a_{i_n k} y_{n,k}} \right] \\ &\quad \text{Beiträge nur für:} \quad i_1 = k \quad \quad \quad i_n = k \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \epsilon_{i_1, \dots, i_n} \left[ a_{i_1 i_1} y_{1,i_1} \cdots y_{n,i_n} + \cdots + y_{1,i_1} \cdots a_{i_n i_n} y_{n,i_n} \right] \\ &= \left( \sum_{k=1}^n a_{kk} \right) \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \epsilon_{i_1, \dots, i_n} y_{1,i_1} \cdots y_{n,i_n} = \operatorname{Tr}(A(x)) W(x). \end{aligned}$$

Lösung der Dgl. ist elementar (siehe Kap. 6.2).

q.e.d.

**Anmerkung:**

$W(x) = \det Y(x) \neq 0 \quad \forall x \in I =$  Stetigkeitsintervall von  $A(x)$ , da alle  $\mathbf{y}_\nu(x)$  linear unabhängig sind und damit die Matrix  $Y(x)$  nicht singular ist, im Einklang mit (8.13).

**Anwendung:** Reduktionsverfahren von d'Alembert

Sei  $\mathbf{y}_n(x)$  eine bekannte Lösung von  $\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x)$ .

$\leftrightarrow$  Reduktion auf  $(n-1)$ -dim. Dgl.-System!

Ansatz:

$$\mathbf{y}(x) = \phi(x)\mathbf{y}_n(x) + \mathbf{z}(x), \quad \mathbf{z}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{falls } y_{n,n}(x) \neq 0, \quad (8.16)$$

wobei  $\mathbf{z}(x)$  und  $\phi(x)$  noch zu bestimmen sind.

Einsetzen in Dgl.:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(x) &= \phi' \mathbf{y}_n + \phi \mathbf{y}'_n + \mathbf{z}' \stackrel{!}{=} A \phi \mathbf{y}_n + A \mathbf{z}. \\ \Leftrightarrow \mathbf{z}' &= A \mathbf{z} - \phi' \mathbf{y}_n. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Reduktion auf  $(n-1)$ -dim. Größen:

$$\hat{\mathbf{z}}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}}_n(x) = \begin{pmatrix} y_{n,1}(x) \\ \vdots \\ y_{n,n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad \hat{A}(x) = (a_{kl}(x)), \quad k, l = 1, \dots, n-1. \quad (8.18)$$

$\Rightarrow$  (8.17) ist äquivalent zu:

$$\hat{\mathbf{z}}' = \hat{A} \hat{\mathbf{z}} - \phi' \hat{\mathbf{y}}_n, \quad 0 = \sum_{l=1}^{n-1} a_{nl} z_l - \phi' y_{n,n}. \quad (8.19)$$

Elimination von  $\phi'$  liefert  $(n-1)$ -dim. Dgl.-System:

$$\hat{\mathbf{z}}' = \hat{A} \hat{\mathbf{z}} - \frac{\sum_{l=1}^{n-1} a_{nl} z_l}{y_{n,n}} \hat{\mathbf{y}}_n =: \hat{B} \hat{\mathbf{z}}, \quad \hat{B} = (b_{kl}), \quad b_{kl} = a_{kl} - \frac{y_{n,k}}{y_{n,n}} a_{nl}. \quad (8.20)$$

Bestimmung von  $\phi(x)$  nach Berechnung von  $\hat{\mathbf{z}}(x)$ :

$$\phi' = \frac{\sum_{l=1}^{n-1} a_{nl} z_l}{y_{n,n}}, \quad \phi(x) = \int dx \frac{\sum_{l=1}^{n-1} a_{nl}(x) z_l(x)}{y_{n,n}(x)}. \quad (8.21)$$

Beachte:

Die Lösungen  $\mathbf{y}_n(x)$  und  $\mathbf{y}(x)$  aus (8.16) sind linear unabhängig. (Beweis als Übung!)

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{y_1}{x} - y_2, \\ y_2' &= \frac{y_1}{x^2} + \frac{2y_2}{x}, \end{aligned} \quad A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix}, \quad x \in I = (0, \infty). \quad (8.22)$$

Offensichtliche Lösung von (8.22):

$$\mathbf{y}_2(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}. \quad (8.23)$$

Berechnung von  $\hat{z} = z_1$ :

$$\begin{aligned} \hat{z}'_1 &= \hat{B}z_1, \quad \hat{B} = b_{11} = \frac{1}{x} - \frac{x^2}{-x} \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x}. \\ \Rightarrow \frac{z'_1}{z_1} &= \frac{2}{x}, \quad \text{d.h. } z_1(x) = x^2 \text{ spezielle Lösung.} \end{aligned} \quad (8.24)$$

Berechnung von  $\phi(x)$ :

$$\phi' = \frac{x^2}{x^2(-x)} = -\frac{1}{x}, \quad \phi(x) = -\ln x \text{ spezielle Lösung.} \quad (8.25)$$

$\Rightarrow$  2. linear unabhängige Lösung  $\mathbf{y}_1(x)$  von (8.22):

$$\mathbf{y}_1(x) = \phi(x)\mathbf{y}_2(x) + \mathbf{z}(x) = -\ln x \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2(1 - \ln x) \\ x \ln x \end{pmatrix}. \quad (8.26)$$

$\Rightarrow$  Lösungsmatrix  $Y(x)$ :

$$Y(x) = \begin{pmatrix} x^2(1 - \ln x) & x^2 \\ x \ln x & -x \end{pmatrix}, \quad W(x) = -x^3. \quad (8.27)$$

$\Rightarrow$  Allgemeine Lösung von (8.22):

$$\mathbf{y}(x) = Y(x) \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2 \quad (2 \text{ freie Konstanten } c_k!). \quad (8.28)$$

Anwendung auf Anfangswertproblem  $\mathbf{y}(1) = \mathbf{y}_0$ :

$$\begin{aligned} Y(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \Rightarrow C = Y(1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \\ \Rightarrow \mathbf{y}(x) &= Y(x) C \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} x^2(1 - \ln x) & -x^2 \ln x \\ x \ln x & x(1 + \ln x) \end{pmatrix} \mathbf{y}_0. \end{aligned} \quad (8.29)$$

**Satz 8.5** (Lösung der inhomogenen Gleichung)

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Dgl.-Systems

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x) \quad (8.30)$$

ist gegeben durch

$$\mathbf{y}(x) = Y(x)\mathbf{c} + \hat{\mathbf{y}}(x), \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \quad (8.31)$$

wobei  $Y(x)$  eine Lösungsmatrix der zugehörigen homogenen Gleichung und  $\hat{\mathbf{y}}(x)$  eine feste Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

**Beweis:**

Wenn  $\hat{\mathbf{y}}(x)$  und  $\hat{\mathbf{z}}(x)$  zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung sind, dann erfüllt  $\hat{\mathbf{y}}(x) - \hat{\mathbf{z}}(x)$  die homogene Gleichung, d.h.  $\hat{\mathbf{z}}(x) = \hat{\mathbf{y}}(x) + Y(x)\mathbf{c}$  für ein  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ .

⇒ Jede Lösung des inhomogenen Dgl.-Systems ist von der Form (8.31). q.e.d.

**Berechnungsverfahren:** „Variation der Konstanten“

Ansatz für spezielle Lösung  $\hat{\mathbf{y}}(x)$  des inhomogenen Dgl.-Systems:

$$\hat{\mathbf{y}}(x) = Y(x)\mathbf{c}(x). \quad (8.32)$$

Einsetzen in Dgl.-System (8.30):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(x)' &= Y'(x)\mathbf{c}(x) + Y(x)\mathbf{c}'(x) = A(x)Y(x)\mathbf{c}(x) + Y(x)\mathbf{c}'(x) \\ &\stackrel{!}{=} A(x)\hat{\mathbf{y}}(x) + \mathbf{b}(x) = A(x)Y(x)\mathbf{c}(x) + \mathbf{b}(x). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{c}'(x) = \underbrace{Y(x)^{-1}}_{\text{existiert, da } W(x) = \det Y(x) \neq 0} \mathbf{b}(x).$$

$$\Rightarrow \mathbf{c}(x) = \int^x dt Y(t)^{-1} \mathbf{b}(t).$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{y}}(x) = Y(x) \int_{x_0}^x dt Y(t)^{-1} \mathbf{b}(t) \quad \text{ist Lösung mit } \hat{\mathbf{y}}(x_0) = 0. \quad (8.33)$$

**Beispiel:**

Fortführung von oben!

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{y_1}{x} - y_2 + x, \\ y_2' &= \frac{y_1}{x^2} + \frac{2y_2}{x} + x^2, \end{aligned} \quad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad x \in I = (0, \infty). \quad (8.34)$$

$Y(x)$  bekannt von oben:

$$\begin{aligned} Y(x) &= \begin{pmatrix} x^2(1 - \ln x) & x^2 \\ x \ln x & -x \end{pmatrix}. \quad \Rightarrow Y(x)^{-1} = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} 1 & x \\ \ln x & x(\ln x - 1) \end{pmatrix}. \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{y}}(x) &= Y(x) \int_1^x dt \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ \ln t & t(\ln t - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x^2(1 - x^2 + 6 \ln x - 2 \ln^2 x) \\ x(-3 + 3x^2 - 2 \ln x + 2 \ln^2 x) \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}}(1) = 0. \end{aligned} \quad (8.35)$$

## 8.2 Lineare Dgl.-Systeme mit konstanten Koeffizienten

Anfangswertproblem:

$$\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x) \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \quad (8.36)$$

wobei  $A = n \times n$ -Matrix  $\in \mathbb{R}^{n^2}$  konstant und  $\mathbf{b}(x) \in \mathbb{R}^n$ .

### Vorüberlegung:

Der bekannte Fall  $n = 1$  suggeriert folgende Lösung der homogenen Gleichung  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y}(x) = \exp\{A(x - x_0)\} \mathbf{y}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (x - x_0)^k}{k!} \mathbf{y}_0. \quad (8.37)$$

$\hookrightarrow$  Eigenschaften der Exponentialreihe  $e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$  beliebiger  $n \times n$ -Matrizen  $A$ ?

### Satz 8.6 (Exponentialreihe für Matrizen)

Für jede  $n \times n$ -Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n^2}$  (bzw.  $\mathbb{C}^{n^2}$ ) konvergiert die Reihe  $e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$  komponentenweise absolut und gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall  $-\tau \leq t \leq \tau$ . Ferner ist  $e^{At}$  nach  $t$  differenzierbar, und es gilt  $(e^{At})' = Ae^{At}$ .

### Beweis:

- Jeder Koeffizient  $c_{\alpha\beta}$  der Matrix  $(c_{\alpha\beta}) = e^{At}$  hat eine konvergente Majorante:

$$\begin{aligned} |c_{\alpha\beta}| &\leq \|C\|_p = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right\|_p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k t^k}{k!} \right\|_p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|_p |t|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|_p^k |t|^k}{k!} = e^{\|A\|_p |t|} \leq e^{\|A\|_p \tau} < \infty \quad \forall t \in [-\tau, +\tau]. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Glm. Konvergenz der Reihe für  $c_{\alpha\beta}$  nach Satz 1.11.

- Nach Satz 4.6 kann die Potenzreihe gliedweise differenziert werden:

$$(e^{At})' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{A^k t^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = Ae^{At}.$$

q.e.d.

**Satz 8.7** (Eigenschaften von Exponentialreihen)

Seien  $A, B$   $n \times n$ -Matrizen  $\in \mathbb{R}^{n^2}$  (bzw.  $\mathbb{C}^{n^2}$ ). Dann gilt:

$$\text{a) } e^{A+B} = e^A \cdot e^B, \quad \text{falls } [A, B] = AB - BA = 0; \quad (8.38)$$

$$\text{b) } (e^A)^{-1} = e^{-A}; \quad (8.39)$$

$$\text{c) } e^{B^{-1}AB} = B^{-1}e^A B, \quad \text{falls } \det B \neq 0; \quad (8.40)$$

$$\text{d) } e^{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}). \quad (8.41)$$

**Beweis:**

a) folgt aus Cauchy-Produkt für Reihen wie für  $n = 1$ .

Alternativ aus Dgl.: Sei  $[A, B] = 0$ .

$\Leftrightarrow$  2 Lösungen  $U_1(t)$  und  $U_2(t)$  der Dgl.  $U' = (A + B)U$  mit  $U(0) = \mathbf{1}$ :

$$\begin{aligned} U_1 &= e^{(A+B)t}, & U_1' &= (A+B)U_1, \\ U_2 &= e^{At}e^{Bt}, & U_2' &= Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = (A+B)U_2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow U_1(t) = U_2(t)$  nach Eindeigkeitssatz für lineare Dgl.-Systeme.

b) folgt aus a) mit  $B = -A$ .

c) folgt aus Gültigkeit für Partialsummen und  $N \rightarrow \infty$ :

$$\sum_{k=0}^N \frac{(B^{-1}AB)^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^N B^{-1} \frac{A^k t^k}{k!} B = B^{-1} \left( \sum_{k=0}^N \frac{A^k t^k}{k!} \right) B.$$

d) folgt aus  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$  und  $\sum_k$ . q.e.d.

**Satz 8.8**

Die homogene lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten  $\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x)$  hat die allgemeine Lösung  $\mathbf{y}(x) = e^{Ax}\mathbf{c}$  mit  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ , d.h.  $Y(x) = e^{Ax}$  ist eine Lösungsmatrix.

Das Anfangswertproblem (8.36) hat die Lösung

$$\mathbf{y}(x) = \exp\{A(x-x_0)\}\mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x dt e^{A(x-t)}\mathbf{b}(t). \quad (8.42)$$

**Beweis:**

Satz 8.6 zeigt die homogene Dgl., Satz 8.7 zeigt  $\text{Rang}(e^{Ax}) = n$ , da  $(e^{Ax})^{-1}$  existiert.

$\mathbf{y}(x)$  aus (8.42) erfüllt  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$  sowie Dgl.:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(x) &= A \exp\{A(x-x_0)\}\mathbf{y}_0 + e^{A(x-x)}\mathbf{b}(x) + \int_{x_0}^x dt A e^{A(x-t)}\mathbf{b}(t) \\ &= A\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x). \end{aligned}$$

q.e.d.

**Berechnung von  $Y(x) = e^{Ax}$ :**

a) Transformation von  $A$  auf Jordansche Normalform (siehe Lineare Algebra!):

Für jede  $n \times n$ -Matrix existiert eine Ähnlichkeitstransformation der Form

$$C^{-1}AC = J = \left( \begin{array}{c|c} J_1 & 0 \\ \hline 0 & J_2 \\ & \ddots \\ & & J_{N-1} & 0 \\ \hline & & 0 & J_N \end{array} \right), \quad (8.43)$$

so dass  $J$  blockdiagonal mit  $n_\nu \times n_\nu$ -„Jordan-Blöcken“ der Form

$$J_\nu = \begin{pmatrix} \lambda_\nu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_\nu & 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \lambda_\nu & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_\nu \end{pmatrix}, \quad \nu = 1, \dots, N, \quad (8.44)$$

wobei  $\lambda_\nu$  ein Eigenwert von  $A$  ist.

Anmerkungen:

- $C$  und  $J$  können auch für reelle  $A$  komplex sein.
- $A$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn alle  $n_\nu = 1$ .
- Mögliches Berechnungsverfahren: (Ausnutzen von  $AC = CJ$ )
  1. Bestimme alle Eigenwerte  $\lambda_{(k)}$  von  $A$  als Nullstellen des „charakteristischen Polynoms“  $\chi(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbf{1} - A)$ .
  2. Bestimme alle Eigenvektoren  $\mathbf{v}_\nu^{(1)}$  mit zugehörigen Eigenwerten  $\lambda_\nu$ .  
(Gleiche  $\lambda_\nu$  sind möglich!)  
 $\Leftrightarrow$  Jeder Eigenvektor  $\mathbf{v}_\nu^{(1)}$  induziert einen Jordan-Block.
  3. Bestimme weitere Vektoren  $\mathbf{v}_\nu^{(\alpha)}$  durch rekursives Lösen von

$$(A - \lambda_\nu \mathbf{1}) \mathbf{v}_\nu^{(\alpha+1)} = \mathbf{v}_\nu^{(\alpha)}. \quad (8.45)$$

$\Leftrightarrow n_\nu$  ist das maximale  $\alpha$ , für das ein  $\mathbf{v}_\nu^{(\alpha)}$  existiert.

4. Die Matrix  $C$  ist gegeben durch

$$C = (\mathbf{v}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_1^{(n_1)}, \mathbf{v}_2^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_N^{(n_N)}). \quad (8.46)$$

b) Berechnung von  $e^{Jx}$ : Blockweise (Jordan-Blöcke mischen nicht)!

$$\varepsilon_0 := \mathbf{1}, \quad \varepsilon_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \text{etc.} \quad (8.47)$$

$$J_\nu = \lambda_\nu \cdot \mathbf{1} + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1^k = \begin{cases} \varepsilon_k, & k = 1, \dots, n_\nu - 1, \\ 0, & k \geq n_\nu. \end{cases} \quad (8.48)$$

$$\Rightarrow e^{J_\nu x} = e^{\lambda_\nu x \cdot \mathbf{1} + \varepsilon_1 x} = e^{\lambda_\nu x \cdot \mathbf{1}} \cdot e^{\varepsilon_1 x}, \quad \text{da } [\mathbf{1}, \varepsilon_1] = 0.$$

$$= e^{\lambda_\nu x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_1^k x^k}{k!} = e^{\lambda_\nu x} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x^1}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n_\nu-1}}{(n_\nu-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{x^1}{1!} & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ \vdots & & 0 & 1 & \frac{x^1}{1!} \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.49)$$

c) Berechnung von  $Y(x)$ :

$$Y(x) = e^{Ax} = C e^{Jx} C^{-1}. \quad (8.50)$$

### Anmerkungen:

- Zur Lösungsstruktur:

Wenn der Eigenwert  $l$ -fache Nullstelle von  $\chi(\lambda)$  ist ( $l=$ „algebraische Vielfachheit“), gibt es  $l$  linear unabhängige Lsgen.:

$$\mathbf{y}_{\lambda,1}(x) = \mathbf{p}_{\lambda,0}(x) e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad \mathbf{y}_{\lambda,l}(x) = \mathbf{p}_{\lambda,l-1}(x) e^{\lambda x}, \quad (8.51)$$

wobei die Komponenten von  $\mathbf{p}_{\lambda,k}(x)$  Polynome vom Grad  $\leq k$  sind.

$\Rightarrow$  Alternatives Lösungsverfahren:

1. Bestimme Eigenwerte  $\lambda$  und deren Vielfachheit  $l$ .
2. Bestimme alle Eigenvektoren  $\mathbf{a}_k$  zu  $\lambda$ .  $\Rightarrow$  Lsgen.  $\mathbf{a}_k e^{\lambda x}$ .
3. Bestimme alle weiteren Lösungen  $\propto e^{\lambda x}$  sukzessive aus den Ansätzen:  
 $(x \mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k) e^{\lambda x}, \quad \left(\frac{x^2}{2!} \mathbf{a}_k + x \mathbf{b}'_k + \mathbf{c}_k\right) e^{\lambda x}, \quad \dots$   
bis  $l$  linear unabhängige Lösungen  $\propto e^{\lambda x}$  gefunden sind.  
(Aus Konsistenzgründen ergibt sich  $\mathbf{b}'_k = \mathbf{b}_k, \dots$ )

- Zum Fall komplexer Eigenwerte  $\lambda = \alpha + i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ):

Wenn  $A$  reell, dann hat  $\chi(\lambda)$  reelle Koeffizienten.

$\Rightarrow \bar{\lambda}$  ebenfalls Eigenwert von  $A$  mit komplex konjugierten Lsgen.  $\bar{\mathbf{y}}_{\lambda,k}(x)$  zu (8.51):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\lambda,k}(x) &= \mathbf{p}_{\lambda,k}(x) e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)], \\ \bar{\mathbf{y}}_{\lambda,k}(x) &= \bar{\mathbf{p}}_{\lambda,k}(x) e^{\alpha x} [\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)] \end{aligned} \quad (8.52)$$

$\Rightarrow 2l$  reelle Lsgen. durch Bilden von  $\text{Re}(\cdot)$  und  $\text{Im}(\cdot)$  der  $\mathbf{y}_{\lambda,k}$  und  $\bar{\mathbf{y}}_{\lambda,k}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\lambda,k}(x) &= [\text{Re}\{\mathbf{p}_{\lambda,k}(x)\} \cos(\beta x) - \text{Im}\{\mathbf{p}_{\lambda,k}(x)\} \sin(\beta x)] e^{\alpha x}, \\ \mathbf{v}_{\lambda,k}(x) &= [\text{Im}\{\mathbf{p}_{\lambda,k}(x)\} \cos(\beta x) + \text{Re}\{\mathbf{p}_{\lambda,k}(x)\} \sin(\beta x)] e^{\alpha x}. \end{aligned} \quad (8.53)$$

$\Rightarrow$  Konstruktion einer reellen Lösungsmatrix  $Y$  aus Spaltenvektoren  $\mathbf{u}_{\lambda,k}$  und  $\mathbf{v}_{\lambda,k}$ !

**Beispiel:**

$$\mathbf{y}'(x) = A \mathbf{y}(x), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \quad (8.54)$$

- Berechnung der Eigenwerte:

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbf{1} - A) = -27 + 27\lambda - 9\lambda^2 + \lambda^3 = (\lambda - 3)^3, \quad (8.55)$$

d.h.  $\lambda = 3$  ist Eigenwert der algebraischen Vielfachheit 3.

- Berechnung der Eigenvektoren:

$$0 = (A - 3 \cdot \mathbf{1}) \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}.$$

$\hookrightarrow$  2 linear unabhängige Eigenvektoren, d.h. 2 Lsgen.  $\mathbf{y}_k(x) = e^{3x} \mathbf{v}_k$ :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (8.56)$$

- Dritte Lsg. durch Ansatz  $(x\mathbf{v}_k + \mathbf{v})e^{3x}$ :

$$[(x\mathbf{v}_k + \mathbf{v})e^{3x}]' = [\mathbf{v}_k + 3(x\mathbf{v}_k + \mathbf{v})]e^{3x} \stackrel{!}{=} A(x\mathbf{v}_k + \mathbf{v})e^{3x} = (3x\mathbf{v}_k + A\mathbf{v})e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{v}_k = (A - 3 \cdot \mathbf{1}) \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}.$$

$$\Rightarrow \quad k = 1: \quad \text{keine Lsg.}, \quad k = 2: \quad \text{Lsg. } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.57)$$

$\Rightarrow$  Mögliches Fundamentalsystem:

$$\hat{\mathbf{y}}_1(x) = e^{3x} \mathbf{v}_1, \quad \hat{\mathbf{y}}_2(x) = e^{3x} \mathbf{v}_2, \quad \hat{\mathbf{y}}_3(x) = e^{3x} (x \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3). \quad (8.58)$$

- Aufbau von  $Y$  über Jordan-Zerlegung:

$$C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = C^{-1} A C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} Y(x) &= e^{Ax} = C e^{Jx} C^{-1} = e^{3x} C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= e^{3x} \begin{pmatrix} 1 - 2x & -x & -x \\ 2x & 1 + x & x \\ 2x & x & 1 + x \end{pmatrix} =: (\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \mathbf{y}_3(x)). \end{aligned} \quad (8.59)$$

Beachte: Lsgen.  $\hat{\mathbf{y}}_k(x)$  und  $\mathbf{y}_k(x)$  nicht identisch, aber äquivalent!

### 8.3 Lineare Dglen. n. Ordnung

**Ziel:** Untersuchung des Anfangswertproblems für die Dgl.  $n$ . Ordnung:

$$\begin{aligned} L[u] &:= u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)u = b(x), \\ u(x_0) &= u_0, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Dgl. (8.60) ist äquivalent zum Dgl.-System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ &\vdots \\ y_n' &= -(a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)u) + b(x). \end{aligned} \quad (8.61)$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 := \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \\ \vdots \\ u_0^{(n-1)} \end{pmatrix}, \\ A(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}. \\ \Rightarrow \mathbf{y}'(x) &= A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \end{aligned} \quad (8.62)$$

$\Rightarrow$  Übertragung der Existenz- und Eindeutigkeitsätze sowie der Lösungsverfahren für lineare Dgl.-Systeme!

**Satz 8.9** (Existenz, Eindeutigkeit und Struktur der Lösungen)

Das Anfangswertproblem (8.60) mit Funktionen  $a_k(x)$  und  $b(x)$ , die auf jedem kompakten Teilintervall des Intervalls  $I$  stetig sind, hat genau eine Lösung  $u(x)$  auf  $I$ .

Die Lösungen der homogenen Dgl.  $L[u] = 0$  spannen auf  $I$  einen  $n$ -dim. Vektorraum auf, wobei jede Basis  $\{u_k\}_{k=1}^n$  ein „Fundamentalsystem“ der homogenen Dgl. definiert.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. (8.60) ist gegeben durch die Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Dgl. und der allgemeinen Lösung der homogenen Dgl..

**Beweis:**

Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (8.60) folgen unmittelbar aus Satz 8.1.

Die Lösungsstruktur der homogenen bzw. inhomogenen Dgl. folgt unmittelbar aus Satz 8.2 bzw. Satz 8.5.

q.e.d.

**Satz 8.10**

Die Wronski-Determinante  $W(x) = \det Y(x)$  zur Lösungsmatrix

$$Y(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (8.63)$$

eines Fundamentalsystems  $\{u_k\}_{k=1}^n$  der homogenen Dgl.  $L[u] = 0$  erfüllt die Relationen:

$$W'(x) = -a_{n-1}(x)W(x), \quad W(x) = \exp\left\{-\int_{x_0}^x dt a_{n-1}(t)\right\} W(x_0). \quad (8.64)$$

**Beweis:**

Folgt direkt aus Satz 8.4.

q.e.d.

Übertragung von Lösungsverfahren:

**Reduktionsverfahren von d'Alembert:**

Ziel: Reduktion der Ordnung der Dgl., wenn eine Lösung der homogenen Dgl. bekannt.

Siehe Dgl.-System, aber Modifikation nötig, um Form der ursprünglichen Dgl. beizubehalten.

Verfahren:

Sei  $v(x)$  eine Lösung der homogenen Dgl., d.h.  $L[v] = 0$ .

$\hookrightarrow$  Ansatz:  $u(x) = v(x)w(x)$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 = L[u] &= L[vw] = \sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}(vw) \quad (a_n := 1) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k(x) \underbrace{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} v^{(k-l)} w^{(l)}}_{= L[v]w + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} v^{(k-l)} w^{(l)}} \\ &= \sum_{l=1}^n w^{(l)} \underbrace{\sum_{k=l}^n a_k(x) \binom{k}{l} v^{(k-l)}}_{=: v \hat{a}_{l-1}(x)} = v \sum_{l=0}^{n-1} \hat{a}_l(x) w^{(l+1)} =: v \hat{L}[w']. \quad (8.65) \end{aligned}$$

$\Rightarrow w'$  genügt der homogenen linearen Dgl.  $(n-1)$ . Ordnung:  $\hat{L}[u] = 0$ .

Sei  $w'_1, \dots, w'_{n-1}$  Fundamentalsystem von  $\hat{L}[u] = 0$  mit Stammfunktionen  $w_1, \dots, w_{n-1}$ .

$\Rightarrow$  Fundamentalsystem von  $L[u] = 0$ :  $v, v w_1, \dots, v w_{n-1}$ .

(Beweis der linearen Unabhängigkeit als Übung!)

**Beispiel:**  $n = 2$ .

Ursprüngliche Dgl.:

$$L[u] = u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0. \quad (8.66)$$

Sei  $v$  Lsg. von  $L[u] = 0$ .

$\hookrightarrow$  Ansatz  $u = v w$  liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= 2v'w' + vw'' + a_1(x)vw' = v \left[ w'' + \left( a_1(x) + \frac{2v'}{v} \right) w' \right], \\ 0 &= w'' + \left( a_1(x) + \frac{2v'}{v} \right) w' = \hat{L}[w']. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Konkretes Beispiel:

$$L[u] = u'' - u' \cos x + u \sin x = 0. \quad (8.68)$$

Offensichtliche Lösung:  $v = u_1 = e^{\sin x}$ .

$\hookrightarrow$  Dgl. für  $w'$ :

$$w'' + w' \cos x = 0, \quad \text{d.h. } w' = e^{-\sin x} \cdot \text{const.} \quad (8.69)$$

$\Rightarrow$  2. Lösung für  $L[u] = 0$ :

$$u_2(x) = v(x) \int_0^x dt e^{-\sin t} = e^{\sin x} \int_0^x dt e^{-\sin t}. \quad (8.70)$$

### Lösung der inhomogenen Dgl. durch Variation der Konstanten:

Sei  $\{u_k\}_{k=1}^n$  ein Fundamentalsystem der homogenen Dgl.  $L[u] = 0$ .

Ansatz zur Lösung der inhomogenen Dgl.  $L[u] = b(x)$ :

$$u(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) u_k(x). \quad (8.71)$$

$\hookrightarrow$  Einsetzen liefert Dgl.-System 1. Ordnung für  $c_k(x)$ .

**Alternativ:** direkte Benutzung des Resultates von Kap. 8.1 für Dgl.-System.

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{y}}(x) = Y(x) \int_{x_0}^x dt Y(t)^{-1} \mathbf{b}(t) \quad \text{ist Lösung von (8.62) mit } \hat{\mathbf{y}}(x_0) = 0. \quad (8.72)$$

$\hookrightarrow$  Vereinfachungen, da nur  $\hat{u} = \hat{y}_1$  benötigt und  $\mathbf{b} = (0, \dots, 0, b)^T$ :

$$\hat{u}(x) = \hat{y}_1(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) (-1)^{n+k} \int_{x_0}^x dt \frac{W_k(t)}{W(t)} b(t), \quad (8.73)$$

wobei  $W_k =$  Wronski-Determinante zu  $\{u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ .

(Nachweis als Übung!)

**Beispiel:**  $n = 2$ .

Weitere Vereinfachung, da  $W_1(x) = u_2(x)$  und  $W_2(x) = u_1(x)$ :

$$\hat{u}(x) = -u_1(x) \int_{x_0}^x dt \frac{u_2(t)}{W(t)} b(t) + u_2(x) \int_{x_0}^x dt \frac{u_1(t)}{W(t)} b(t). \quad (8.74)$$

Fortführung von Beispiel (8.68):

$$L[u] = u'' - u' \cos x + u \sin x = \sin x = b(x). \quad (8.75)$$

Fundamentalsystem:

$$u_1(x) = e^{\sin x}, \quad u_2(x) = e^{\sin x} \int_0^x dt e^{-\sin t}. \quad (8.76)$$

Wronski-Determinante:

$$W(x) = e^{\sin x} = u_1(x). \quad (8.77)$$

⇒ Spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &= -u_1(x) \underbrace{\int_0^x dt \sin t \int_0^t dt' e^{-\sin t'}}_{= \int_0^x dt' e^{-\sin t'} \int_{t'}^x dt \sin t} + u_2(x) \int_0^x dt \sin t \\ &= u_1(x) \int_0^x dt' e^{-\sin t'} [\cos x - \cos t'] + u_2(x) (1 - \cos x) \\ &= u_1(x) \cos x \int_0^x dt e^{-\sin t} + u_1(x) (e^{-\sin x} - 1) + u_2(x) (1 - \cos x) \\ &= 1 - u_1(x) + u_2(x), \end{aligned} \quad (8.78)$$

d.h.  $u \equiv 1$  ist ebenfalls spezielle Lösung der inhomogenen Dgl..

## 8.4 Lineare Dglen. n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Betrachtete Dgl.:

$$\begin{aligned} L[u] &:= u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_0u = b(x), \\ u(x_0) &= u_0, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (8.79)$$

Äquivalentes Dgl.-System wie in (8.62):

$$\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \quad (8.80)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \text{const.} \in \mathbb{R}^{n^2}. \quad (8.81)$$

$\Rightarrow$  Vereinfachung der Ergebnisse aus Kap. 8.2, z.B.:

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbf{1} - A) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k. \quad (a_n = 1) \quad (8.82)$$

### Satz 8.11

Ein Fundamentalsystem von  $L[u] = 0$  aus (8.79) ist gegeben durch

$$e^{\lambda_\nu x}, x e^{\lambda_\nu x}, x^2 e^{\lambda_\nu x}, \dots, x^{n_\nu-1} e^{\lambda_\nu x}, \quad \nu = 1, \dots, N, \quad (8.83)$$

wobei  $\lambda_\nu$  alle verschiedenen Eigenwerte von  $A$  mit Vielfachheit  $n_\nu$  darstellen.

Falls  $\lambda_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$  komplex, ist auch  $\bar{\lambda}_\nu$  Eigenwert von  $A$ , und die zu  $\lambda_\nu, \bar{\lambda}_\nu$  gehörigen Lösungen können ersetzt werden durch die reellen Funktionen

$$x^l e^{\alpha_\nu x} \cos(\beta_\nu x), \quad x^l e^{\alpha_\nu x} \sin(\beta_\nu x), \quad l = 0, \dots, n_\nu - 1. \quad (8.84)$$

**Beweis:**

- (8.83) erfüllt  $L[u] = 0$ :

$$\text{Charakteristisches Polynom:} \quad \chi(\lambda) = \prod_{\nu=1}^N (\lambda - \lambda_\nu)^{n_\nu}.$$

Da  $(e^{\lambda x})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$ , gilt  $L[e^{\lambda x}] = \chi(\lambda) e^{\lambda x} = 0$  für  $\lambda = \lambda_\nu$ .

Verallgemeinerung auf  $x^l e^{\lambda x}$  durch Trick:  $x^l e^{\lambda x} = \frac{d^l}{d\lambda^l} e^{\lambda x}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow L[x^l e^{\lambda x}] &= L\left[\frac{d^l}{d\lambda^l} e^{\lambda x}\right] = \frac{d^l}{d\lambda^l} L[e^{\lambda x}] = \frac{d^l}{d\lambda^l} [\chi(\lambda) e^{\lambda x}] \\ &= 0 \quad \text{für } \lambda = \lambda_\nu, \quad \text{da } \chi^{(k)}(\lambda_\nu) = 0, \quad k = 1, \dots, n_\nu - 1. \end{aligned}$$

- Lineare Unabhängigkeit des Systems (8.83):

Annahme:  $\exists$  Polynome  $p_\nu(x)$  mit  $\text{Grad} \leq n_\nu - 1$ , so dass

$$0 = \sum_{\nu=1}^N p_\nu(x) e^{\lambda_\nu x}. \quad (8.85)$$

Induktionsbeweis in  $N$ , dass  $p_\nu(x) \equiv 0 \forall \nu$ :

- $N = 1$ : klar, da Potenzen  $x^l$  linear unabhängig.
- $N - 1 \rightarrow N$ : Aus (8.85) folgt:

$$p_N(x) = - \sum_{\nu=1}^{N-1} p_\nu(x) e^{(\lambda_\nu - \lambda_N)x} = \text{Polynom vom Grad } n_N - 1.$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d^{n_N}}{dx^{n_N}} p_N(x) = - \sum_{\nu=1}^{N-1} \underbrace{q_\nu(x)}_{=\text{Polynom vom Grad } n_\nu - 1} e^{(\lambda_\nu - \lambda_N)x}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow q_\nu(x) &\equiv 0 \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ \Rightarrow p_\nu(x) &\equiv 0 \quad \text{für } \nu = 1, \dots, N-1, \\ &\quad \text{da führende Terme } \propto x^{n_\nu-1} \text{ in } q_\nu \text{ und } p_\nu \text{ gleich} \\ &\quad \text{bis auf Faktor } (\lambda_\nu - \lambda_N)^{n_N} \neq 0 \\ \Rightarrow p_N(x) &\equiv 0, \quad \text{d.h. } p_\nu \equiv 0 \forall \nu. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Funktionen in (8.83) linear unabhängig und Basis, da  $\sum_{\nu=1}^N n_\nu = n$ .

- Form (8.84) für  $\lambda_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$  folgt aus (8.83) für  $\lambda_\nu, \bar{\lambda}_\nu$  durch  $\text{Re}(\cdot), \text{Im}(\cdot)$ .

q.e.d.

# Kapitel 9

## Lineare Differentialgleichungen im Komplexen

Für die kompletten Beweise zu Sätzen dieses Kapitels siehe Kap. V in [11]!

### 9.1 Dgl.-Systeme 1. Ordnung

**Ziel:** Lösung des Dgl.-Systems

$$\mathbf{w}'(z) = A(z) \mathbf{w}(z), \quad \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n, \quad z \in G = \text{Gebiet} \subset \mathbb{C}, \quad (9.1)$$

wobei  $A(z)$  = komplexe  $n \times n$ -Matrix mit holomorphen Koeffizienten.

**Anmerkungen:**

- Vorteil im Komplexen: Isolierte Singularitäten in Koeffizienten von  $A(z)$  teilen  $\mathbb{R}$  in verschiedene Bereiche, aber nicht in  $\mathbb{C}$ .  
⇒ Einheitliche Behandlung von Lösungen um Singularitäten in  $\mathbb{C}$ !
- Lösung der inhomogenen Dgl. durch Variation der Konstanten wie im Reellen.
- Problem für  $A = \text{const.}$  in Kap. 8.2 bereits gelöst.

**Satz 9.1** (Existenz und Eindeutigkeit von Lsgen.)

Das Anfangswertproblem  $\mathbf{w}(z_0) = \mathbf{w}_0$  der Dgl. (9.1) mit  $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{C}^n$ ,  $z_0 \in G$  hat für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  genau eine auf  $G$  holomorphe Lösung, falls alle Koeffizienten von  $A(z)$  auf  $G$  holomorph sind.

Die allgemeine Lösung bildet einen komplexen  $n$ -dimensionalen Vektorraum, dessen Basis  $\{\mathbf{w}_\nu(z)\}_{\nu=1}^n$  ein „Fundamentalsystem“  $W(z) = (\mathbf{w}_1(z), \dots, \mathbf{w}_n)$  bildet.

**Beweis:**

Analog zum Reellen über Fixpunktsatz im Banach-Raum der beschränkten holomorphen Funktionen in kompakten Bereichen von  $G$  und Fortsetzung zum Rand (siehe Kap. 8.1).

**Definition 9.1** („Isolierte Singularitäten“ bei Dgl.-Systemen)

Ein Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  des Dgl.-Systems (9.1) heißt:

- a) „regulär“, falls  $A(z)$  in  $z_0$  (komponentenweise) holomorph ist,
- b) „schwach singulär“, falls  $A(z)$  (d.h. eine oder mehrere Komponenten) in  $z_0$  einen Pol 1. Ordnung hat,
- c) „stark singulär“ sonst.

Im Folgenden werden nur schwache Singularitäten untersucht:

O.B.d.A. setze  $z_0 = 0$ .

(Für  $z_0 \neq 0$  schiebe  $z \rightarrow z + z_0$ , für  $z_0 = \infty$  transformiere  $z \rightarrow 1/z$ .)

Notation:

$$A(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k, \quad A_k = \text{komplexe, konstante } n \times n\text{-Matrix}, \quad (9.2)$$

d.h.  $A$  ist regulär  $\Leftrightarrow A_0 = 0$ .

Für die allgemeine Form der Lsgen. bei schwachen Singularitäten gilt:

**Satz 9.2**

Sei  $A(z)$  für  $z \in D_r(0) \setminus \{0\}$  holomorph ( $r > 0$ ) und  $z_0 = 0$  eine schwache Singularität des Dgl.-Systems (9.1). Dann ist jedes Fundamentalsystem von der Form

$$W(z) = U(z) z^B, \quad (9.3)$$

wobei  $U(z)$  eine in  $D_r(0)$  holomorphe und  $B$  eine konstante  $n \times n$ -Matrix ist.

**Beweis:**

Siehe [11].

**Anmerkungen:**

- $z^B$  ist definiert durch:

$$z^B := e^{B \log(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \log^k(z). \quad (9.4)$$

- Die Form (9.3) ist nicht eindeutig. Äquivalente Formen:

$$W(z) = (U(z) z^l) z^{B-l\mathbf{1}}, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (9.5)$$

In der Physik wichtig sind v.a.

**Definition 9.2** (Dgl.-Systeme vom „Fuchs’schen Typ“)

Ein Dgl.-System (9.1) heißt vom „Fuchs’schen Typ“, wenn  $A(z)$  nur endlich viele schwache Singularitäten in  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  besitzt und sonst regulär ist.

**Satz 9.3**

Das Dgl.-System (9.1) ist genau dann vom Fuchs’schen Typ mit schwachen Singularitäten an den (paarweise verschiedenen) Stellen  $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{C}$ , wenn

$$A(z) = \sum_{j=1}^p \frac{R_j}{z - z_j}, \quad (9.6)$$

wobei  $R_j \neq 0$  konstante  $n \times n$ -Matrizen sind. Der Punkt  $\infty$  ist genau dann eine schwach singuläre Stelle, falls  $\sum_{j=1}^p R_j \neq 0$ .

**Beweis:**

Siehe Übung.

**Beispiele:** 2-dim. Dgl.-Systeme mit schwacher Singularität bei  $z = 0$ .

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

$$\text{a) } A(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}. \Rightarrow \mathbf{w}(z) = \frac{c_1}{z} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{c_2}{z} \begin{pmatrix} \log(z) \\ 1 - \log(z) \end{pmatrix}. \quad (9.8)$$

$$\text{b) } A(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z^2 & -1 \end{pmatrix}. \Rightarrow \mathbf{w}(z) = c_1 \frac{e^{-z}}{z} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - z \end{pmatrix} + c_2 \frac{e^z}{2z} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + z \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

Beachte:

Ein- und mehrdeutige Lsgen. möglich!

Systematische Berechnungsverfahren?  $\rightarrow$  Reihenansätze!



**Allgemeinerer Reihenansatz:**

Variablen-Transformation (motiviert durch Satz 9.2):

$$z =: e^s, \quad s = \log(z), \quad \mathbf{v}(s) := \mathbf{w}(e^s). \quad (9.12)$$

$\Leftrightarrow$  Dgl. für  $\mathbf{v}(s)$ :

$$\mathbf{v}'(s) = \mathbf{w}'(e^s) e^s = \left( \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{ks} \right) \mathbf{v}(s). \quad (9.13)$$

Ansatz für  $\mathbf{v}(s)$  mit polynomialen Koeffizienten (max. Grad  $q$ ):

$$\mathbf{v}(s) = e^{\lambda s} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{v}_k(s) e^{ks}, \quad \mathbf{v}_k(s) = \sum_{l=0}^q \mathbf{c}_{kl} s^l = \text{Polynom in } s. \quad (9.14)$$

Einsetzen in (9.13) und Koeffizientenvergleich von  $e^{(\lambda+k)s}$  liefert:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{v}'_k + (\lambda + k)\mathbf{v}_k) e^{(\lambda+k)s} \stackrel{!}{=} \left( \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{ks} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{v}_l e^{(\lambda+l)s} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k A_{k-l} \mathbf{v}_l e^{(\lambda+k)s} \\ \Rightarrow \mathbf{v}'_k + (\lambda + k)\mathbf{v}_k &\stackrel{!}{=} \sum_{l=0}^k A_{k-l} \mathbf{v}_l, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (9.15)$$

Rekursionsgleichungen:

$$\begin{aligned} \text{(R.1)} \quad & \mathbf{v}'_0 + (\lambda \cdot \mathbf{1} - A_0) \mathbf{v}_0 = 0, \\ \text{(R.2)} \quad & \mathbf{v}'_1 + ((\lambda + 1) \cdot \mathbf{1} - A_0) \mathbf{v}_1 = A_1 \mathbf{v}_0, \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ \text{(R.k)} \quad & \mathbf{v}'_k + ((\lambda + k) \cdot \mathbf{1} - A_0) \mathbf{v}_k = A_k \mathbf{v}_0 + \dots + A_1 \mathbf{v}_{k-1}. \end{aligned}$$

Rekursive Lösung des Systems:

a) Gl. (R.1) sagt, dass  $e^{\lambda s} \mathbf{v}_0(s)$  ist Lsg. der Dgl.  $\mathbf{y}'(s) = A_0 \mathbf{y}(s)$ .

Nach Kap. 8.2  $\exists$  Fundamentalsystem von  $\mathbf{y}'(s) = A_0 \mathbf{y}(s)$  aus Funktionen der Form  $e^{\lambda s} \mathbf{v}_0(s)$ , wobei  $\lambda$  alle Eigenwerte durchläuft und  $\mathbf{v}_0(s)$  Polynome sind.

b) Für jede der  $n$  unabh. Funktion  $e^{\lambda s} \mathbf{v}_0(s)$  können alle  $\mathbf{v}_k$  rekursiv berechnet werden.

Beachte: Falls  $\lambda + k$  ebenfalls Eigenwert von  $A_0$  entsteht kein Problem!

$((\lambda+k) \cdot \mathbf{1} - A_0)$  ist dann nicht invertierbar, aber  $\mathbf{v}'_k$  trotzdem berechenbar.

Ergebnis:

Fundamentalsystem von  $n$  Lösungen der Form:

$$\mathbf{w}(z) = \mathbf{v}(\log z) = z^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{v}_k(\log z) z^k = z^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^q \mathbf{c}_{kl} z^k \log^l(z). \quad (9.16)$$

Die Reihen konvergieren absolut und kompakt (Beweis siehe [11]).

Anwendung auf allgemeine 2-dim. Dgl.-Systeme:

$$\mathbf{w}'(z) = A(z) \mathbf{w}(z), \quad A(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k. \quad (9.17)$$

Bestimmung der Eigenwerte von  $A_0$ :  $\lambda_1, \lambda_2$ , Konvention:  $\operatorname{Re}(\lambda_1) \geq \operatorname{Re}(\lambda_2)$ .

Struktur des Fundamentalsystems:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1(z) &= z^{\lambda_1} \mathbf{h}_1(z), \\ \mathbf{w}_2(z) &= z^{\lambda_2} [\mathbf{h}_2(z) + \log(z) \mathbf{h}_3(z)], \end{aligned} \quad (9.18)$$

wobei  $\mathbf{h}_\nu(z)$  = holomorph bei  $z = 0$  und  $\mathbf{h}_3(z) \equiv 0$  für  $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}_0$ .

Weitere Vereinfachung möglich, da  $z^{\lambda_2} \mathbf{h}_3(z)$  die Dgl. erfüllt. Nachweis:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_2(z) &= \lambda_2 z^{\lambda_2-1} [\mathbf{h}_2(z) + \log(z) \mathbf{h}_3(z)] + z^{\lambda_2} \left[ \mathbf{h}'_2(z) + \frac{1}{z} \mathbf{h}_3(z) + \log(z) \mathbf{h}'_3(z) \right] \\ &\stackrel{!}{=} A(z) z^{\lambda_2} [\mathbf{h}_2(z) + \log(z) \mathbf{h}_3(z)]. \\ \Leftrightarrow 0 &= \underbrace{\lambda_2 \mathbf{h}_2(z) + z \mathbf{h}'_2(z) + \mathbf{h}_3(z) - A(z) z \mathbf{h}_2(z)}_{\text{Potenzreihe}} \\ &\quad + \log(z) \underbrace{[\lambda_2 \mathbf{h}_3(z) + z \mathbf{h}'_3(z) - z A(z) \mathbf{h}_3(z)]}_{\text{Potenzreihe} \stackrel{!}{=} 0 \quad (*)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (z^{\lambda_2} \mathbf{h}_3(z))' = z^{\lambda_2-1} (\lambda_2 \mathbf{h}_3(z) + z \mathbf{h}'_3(z)) \stackrel{(*)}{=} A(z) z^{\lambda_2} \mathbf{h}_3(z).$$

Folgerung: Falls  $\mathbf{h}_3(z) \not\equiv 0$ , gilt  $\lambda_1 = \lambda_2 + k$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$ .

D.h.  $\mathbf{w}_1(z)$  und  $z^{\lambda_2} \mathbf{h}_3(z)$  sind log-freie Lösungen  $\propto z^{\lambda_2} \times$  Potenzreihe.

$\Rightarrow z^{\lambda_2} \mathbf{h}_3(z) = \gamma \mathbf{w}_1(z)$  mit  $\gamma \in \mathbb{C}$ .

$\Rightarrow$  Vereinfachte Struktur des Fundamentalsystems:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1(z) &= z^{\lambda_1} \mathbf{h}_1(z), \\ \mathbf{w}_2(z) &= z^{\lambda_2} \mathbf{h}_2(z) + \gamma \log(z) \mathbf{w}_1(z), \quad \text{wobei } \gamma = 0, \text{ falls } \lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (9.19)$$

## 9.2 Differentialgleichung 2. Ordnung

**Ziel:** Klassifizierung von Singularitäten und singulären Lsgen. der Dgl.  
(Dgl. 2. Ordnung v.a. in Physik wichtig)

$$u'' + a_1(z)u' + a_0(z)u = 0. \quad (9.20)$$

Beachte: Die Transformation  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$  würde nur Pole 1. Ordnung in  $a_0, a_1$  als schwache Singularität zulassen.

Bessere Zuordnung bei singulärer Stelle  $z_0$ :

$$\mathbf{w}(z) := \begin{pmatrix} u(z) \\ (z - z_0)u'(z) \end{pmatrix}. \quad (9.21)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{w}'(z) &= \begin{pmatrix} u' \\ u' + (z - z_0)u'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{w_2}{z - z_0} \\ \frac{w_2}{z - z_0} - a_1(z)w_2 - (z - z_0)a_0(z)w_1 \end{pmatrix} \\ &= A(z)\mathbf{w}(z), \quad A(z) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z - z_0} \\ -(z - z_0)a_0(z) & \frac{1}{z - z_0} - a_1(z) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Dies impliziert:

**Definition 9.3** („Isolierte Singularitäten“, „Fuchs’scher Typ“ bei Dgl. 2. Ordnung)

Ein Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  der Dgl. (9.20) heißt:

- „regulär“, falls  $a_0(z)$  und  $a_1(z)$  in  $z_0$  holomorph sind.
- „schwach singulär“, falls  $a_1(z)$  einen Pol 1. Ordnung oder  $a_0(z)$  einen Pol 1. oder 2. Ordnung in  $z_0$  hat.
- „stark singulär“ sonst.

Die Dgl. (9.20) heißt vom „Fuchs’schen Typ“, wenn sie nur endlich viele schwache Singularitäten in  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  besitzt und sonst regulär ist.

### Satz 9.4

Die Dgl. (9.20) ist genau dann vom Fuchs’schen Typ mit schwachen Singularitäten an den (paarweise verschiedenen) Stellen  $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{C}$ , wenn

$$a_0(z) = \sum_{j=1}^p \left( \frac{s_j}{(z - z_j)^2} + \frac{t_j}{z - z_j} \right), \quad a_1(z) = \sum_{j=1}^p \frac{r_j}{z - z_j} \quad (9.23)$$

mit Konstanten  $r_j, s_j, t_j \in \mathbb{C}$ , wobei  $|r_j| + |s_j| + |t_j| \neq 0$  und  $\sum_{j=1}^p t_j = 0$ .

**Beweis:**

Analog zum Beweis von Satz 9.3 in Übungen.

**Lösungsverfahren durch Reihenentwicklungen:**

Betrachte schwache Singularität bei  $z_0 = 0$ , d.h.  $z \in D_r(0) \setminus \{0\}$ :

$$a_0(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} z^k, \quad a_1(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} z^k. \quad (9.24)$$

Zugehörige Matrizen:

$$A(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -z^2 a_0(z) & 1 - z a_1(z) \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_{00} & 1 - a_{10} \end{pmatrix}. \quad (9.25)$$

Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  von  $A_0$  aus „Indexgleichung“ für charakteristisches Polynom  $\chi(\lambda)$ :

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbf{1} - A_0) = \lambda^2 + \lambda(a_{10} - 1) + a_{00} \stackrel{!}{=} 0. \quad (9.26)$$

$\Rightarrow$  Struktur der Lösungen mit  $\operatorname{Re}(\lambda_1) \geq \operatorname{Re}(\lambda_2)$ :

$$u_1(z) = z^{\lambda_1} h_1(z), \quad u_2(z) = z^{\lambda_2} h_2(z) + \gamma \log(z) u_1(z), \quad (9.27)$$

wobei  $\gamma \in \mathbb{C}$  und  $h_l(z)$  holomorph für  $z \in D_r(0)$ ,

$$h_l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{lk} z^k, \quad \gamma = 0, \quad \text{falls } \lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}_0. \quad (9.28)$$

Praktischer Tipp:

Direktes Einsetzen dieser Ansätze ist einfacher als das Matrizenverfahren in Kap. 9.1!

**Beispiel:** „Hypergeometrische Differentialgleichung“

Jede Fuchs'sche Dgl. 2. Ordnung mit 3 schwachen Singularitäten kann auf die Standardform der hypergeometrischen Dgl. transformiert werden:

$$z(1-z)u'' + (c - (1+a+b)z)u' - abu = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}. \quad (9.29)$$

Schwache Singularitäten bei  $z = 0, 1, \infty$ .

Indexgleichung:  $\chi(\lambda) = \lambda(\lambda + c - 1) = 0. \Rightarrow$  Exponenten:  $\lambda = 0, 1 - c$ .

Konstruktion von Lsgen.:

a) Reguläre Lsg. durch Potenzreihenansatz:  $u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k.$

$\hookrightarrow$  Einsetzen in Dgl. liefert Rekursion:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)(k+1)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (9.30)$$

Normierung  $\alpha_0 := 1$  definiert die „hypergeometrische Funktion“

$${}_2F_1(a, b, c; z) \equiv F(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k, \quad |z| < 1, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \quad (9.31)$$

mit dem „Pochhammer-Symbol“  $(x)_k := x(x+1) \cdots (x+k-1)$ .

b) Weitere Lösung durch Ansatz:  $u(z) = z^{1-c} v(z).$

$\hookrightarrow$  Hypergeom. Dgl. mit neuen  $a, b, c$  und Lsg.:

$$z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z), \quad c \neq 2, 3, 4, \dots$$

c) Ergänzung zu Fundamentalsystemen:

- $c \notin \mathbb{Z}$ :

$$u_1(z) = F(a, b, c; z), \quad u_2(z) = z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z). \quad (9.32)$$

- $c = 1 + l, l \in \mathbb{N}_0$  (d.h.  $0 \geq 1 - c$ ):

$$u_1(z) = F(a, b, c; z), \quad u_2(z) = \log(z) F(a, b, c; z) + \sum_{k=-l}^{\infty} \beta_k z^k. \quad (9.33)$$

- $c = 1 - l, l \in \mathbb{N}_0$  (d.h.  $1 - c \geq 0$ ):

$$\begin{aligned} u_1(z) &= z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z) = z^l F(a+l, b+l; 1+l; z), \\ u_2(z) &= \log(z) z^l F(a+l, b+l; 1+l; z) + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Rekursive Bestimmung der  $\beta_k, \gamma_k$ ; Ergebnis kompliziert!

d) Fundamentalsysteme in Umgebung von  $z = 1, \infty$  durch Permutation der schwach singulären Punkte  $\{0, 1, \infty\}$  durch Möbius-Transformationen:

$$z \mapsto 1-z, 1/z, z/(z-1), (z-1)/z, 1/(1-z). \quad \dots \text{ siehe Literatur!}$$



# Kapitel 10

## Randwertaufgaben für lineare Dglen.

Dieses Kapitel ordnet einige häufig in der Physik auftretende spezielle Funktionen in einen gemeinsamen mathematischen Rahmen ein, hat aber nur den Charakter eines Ausblicks, der hoffentlich Appetit auf mehr macht. Für tiefere Details bzw. einige Beweise siehe z.B. [11] und weiter führende Literatur zu partiellen Dglen. bzw. Funktionalanalysis.

### 10.1 Sturm-Liouville-Problem

**Beispiel zur Problemstellung:** schwingende Saite.

1-dim. Wellengleichung: (lineare partielle Dgl. 2. Ordnung)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u = u(x, t), \quad c = \text{Wellengeschwindigkeit in Saite.} \quad (10.1)$$

Randbedingungen: Saite der Länge  $L$ , an beiden Enden eingespannt,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (10.2)$$

Anfangsbedingungen: Anfangsort ( $\phi$ ) und Anfangsgeschwindigkeit ( $\psi$ ) bei  $t = 0$ ,

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (10.3)$$

„Separationsansatz“ für spezielle Lösung:

$$u(x, t) = f(x) g(t). \quad (10.4)$$

$\hookrightarrow$  Einsetzen in Dgl. ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) \ddot{g}(t) - c^2 f''(x) g(t). \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}}_{\text{Funktion von } t} &= c^2 \underbrace{\frac{f''(x)}{f(x)}}_{\text{Funktion von } x} = \text{const.} =: -\omega^2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

⇒ Getrennte Dglen. für  $t$ - und  $x$ -Abhängigkeit:

a)  $t$ -Abhängigkeit:

$$\ddot{g} + \omega^2 g = 0. \quad \Rightarrow g(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t). \quad (10.6)$$

Lösung existiert  $\forall \omega^2 \in \mathbb{R}$ ; Konstanten  $c_{1,2}$  durch Anfangsbedingungen festgelegt.

b)  $x$ -Abhängigkeit:

$$c^2 f'' + \omega^2 f = 0, \quad f(0) = f(L) = 0. \quad (10.7)$$

Frage: Für welche  $\omega^2$  existieren Lösungen mit gegebenen Randbedingungen?

↔ „Eigenwertproblem“ für Differentialoperator  $-c^2 d^2/dx^2$  !

Allgemeine Lösung der Dgl.:

$$f(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx), \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (10.8)$$

Verwendung der Randbedingungen:

$$f(0) = C_2 \stackrel{!}{=} 0, \quad (10.9)$$

$$f(L) = C_1 \sin(kL) \stackrel{!}{=} 0, \quad \text{d.h. } kL = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10.10)$$

⇒ Unabhängige spezielle Lsgen.:

$$f_n(x) = \sin(k_n x), \quad k_n = \frac{\omega_n}{c} = n \frac{\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10.11)$$

D.h.  $\exists$  nur abzählbar viele, nach unten beschränkte „Eigenwerte“  $\omega_n^2 > 0$ .

Beachte ferner „Orthogonalität“ der Lsgen.  $f_n$ :

$$\int_0^L dx f_m(x) f_n(x) = \frac{L}{2} \delta_{mn}. \quad (10.12)$$

Allgemeine Lösung von (10.1) durch Superposition der speziellen Lsgen.:  
(Fourierreihe in  $x$  mit zeitabhängigen Koeffizienten)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [c_{n1} \sin(\omega_n t) + c_{n2} \cos(\omega_n t)] \sin(k_n x). \quad (10.13)$$

Koeffizienten  $c_{nl}$  aus Anfangsbedingungen bestimmbar:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n2} \sin(k_n x) = \phi(x), \quad c_{n2} = \frac{2}{L} \int_0^L dx \phi(x) \sin(k_n x),$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n1} \omega_n \sin(k_n x) = \psi(x), \quad c_{n1} = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L dx \psi(x) \sin(k_n x). \quad (10.14)$$

Bemerkung:

Die Allgemeinheit der Lösung (10.13) (Eindeutigkeit des Anfangswertproblems) lässt sich hier leicht über den Energiesatz zeigen.

Eigenwertprobleme von Differentialoperatoren 2. Ordnung sind typisch für Separationsansätze für partielle Dglen. der Physik (Laplace-, Wellen-, Schrödinger-Gleichung, etc.).

↔ Standardform des Problems:

**Definition 10.1** („Sturm-Liouville(SL)-Probleme“)

- a) Ein reeller linearer Differentialoperator  $L$  heißt „SL-Operator“, wenn er von folgender Form ist:

$$Lu := -(p(x)u')' + q(x)u, \quad p \in C^1(I), \quad q \in C^0(I). \quad (10.15)$$

- b) Ein „reguläres SL Eigenwertproblem“ besteht in der Suche nach nicht-trivialen reellen Lösungen („Eigenfunktionen“  $u$  und „Eigenwerte“  $\lambda$ ) von

$$Lu = \lambda r(x)u, \quad r \in C^0(I) \quad (10.16)$$

mit  $p(x), r(x) > 0 \forall x \in I$  für ein kompaktes Intervall  $I = [a, b]$  mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} 0 = R_a u &:= A_1 u(a) + A_2 p(a)u'(a), & A_1^2 + A_2^2 &\neq 0, \\ 0 = R_b u &:= B_1 u(b) + B_2 p(b)u'(b), & B_1^2 + B_2^2 &\neq 0. \end{aligned} \quad (10.17)$$

- c) Ein SL-Problem (10.16) heißt „periodisch“, wenn  $x \in I = [a, b]$  und  $p(a) = p(b)$  ist und periodische Randbedingungen gefordert werden:

$$u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b). \quad (10.18)$$

- d) Ein SL-Problem (10.16) heißt „singulär“, falls  $I$  offen bzw. halboffen ist. Für einen singulären Randpunkt  $a$  bedeutet das  $I = (a, b]$  mit  $-\infty \leq a < b < \infty$  (d.h.  $p(a) = 0$  ist erlaubt); als Randbedingung wird gefordert, dass

- $u(x)|_{x \rightarrow a+}$  beschränkt und  $p(x)u'(x)|_{x \rightarrow a+} = 0$ , falls  $a$  endlich;
- $\int_a^b dx |u(x)|^2 < \infty$ , falls  $a = -\infty$ .

Analoges gilt für eine singuläre obere Grenze  $b$ .

**Anmerkung:**

Jede Differentialgleichung

$$a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u + \lambda u = 0, \quad a_0, a_1, a_2 \in C^0(I) \quad (10.19)$$

lässt sich durch Anwendung eines „integrierenden Faktors“ auf die Standardform (10.16) bringen:

$$p(x) = \exp\left(\int^x dt \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\right), \quad q = -\frac{pa_0}{a_2}, \quad r = \frac{p}{a_2}. \quad (10.20)$$

(Nachweis durch einfaches Einsetzen in Dgl.)

**Satz 10.1** (Lösung des regulären SL-Problems)

Eigenschaften der Eigenfunktionen  $u$  und Eigenwerte  $\lambda$  des regulären SL-Problems:

- a) Alle Eigenwerte  $\lambda$  sind reell und nicht entartet, d.h. sind  $u$  und  $v$  Eigenfunktionen zu  $\lambda$ , dann gilt  $v = cu$ ,  $c \in \mathbb{R}$  (bzw.  $\mathbb{C}$ ).
- b) Eigenfunktionen  $u$  und  $v$  zu verschiedenen Eigenwerten  $\lambda \neq \lambda'$  sind „orthogonal“ bzgl. des „Skalarproduktes mit Gewichtsfunktion  $r$ “

$$(f, g)_r := \int_a^b dx \bar{f}(x) g(x) r(x) \quad (10.21)$$

d.h.  $(u, v)_r = 0$ . Jede Eigenfunktion ist normierbar, d.h.  $u$  kann so gewählt werden, dass  $(u, u)_r = 1$ .

- c) Es gibt abzählbar unendlich viele Eigenwerte  $\lambda_n$ , die nach unten beschränkt sind und sich im Endlichen nicht häufen:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lambda_n \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (10.22)$$

- d) „Oszillationseigenschaft“:

Die Eigenfunktion  $u_n$  zum Eigenwert  $\lambda_n$  hat genau  $n$  Nullstellen in  $(a, b)$ . Die  $n + 1$  Nullstellen von  $u_{n+1}$  werden durch die  $n$  Nullstellen von  $u_n$  voneinander getrennt.

**Beweis:** (z.T. nur skizziert!)

Vorbereitung:

„Lagrange-Identität“ für beliebige  $f, g \in C^2(I)$ :

$$\begin{aligned} \bar{f}(Lg) - (L\bar{f})g &= \bar{f} \left( -(pg')' + qg \right) - \left( -(p\bar{f}')' + q\bar{f} \right) g \\ &= -\bar{f} (p'g' + pg'') + (p'\bar{f}' + p\bar{f}'') g \\ &= (p(\bar{f}'g - \bar{f}g'))'. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Integration, falls  $f, g$  die Randbedingungen (10.17) erfüllen:

$$\underbrace{\int_a^b dx \bar{f}(Lg)}_{=:(f, Lg)_1} - \underbrace{\int_a^b dx (L\bar{f})g}_{=:(L\bar{f}, g)_1} = \underbrace{p(x)(\bar{f}'(x)g(x) - \bar{f}(x)g'(x)) \Big|_a^b}_{= 0 \text{ nach Randbedingungen}} = 0,$$

d.h.  $(f, Lg)_1 = (L\bar{f}, g)_1$  und  $L$  ist „formal selbstadjungiert“ bzgl. des Skalarproduktes  $(\cdot, \cdot)_1$  mit  $r \equiv 1$  („formal“, da Definitionsbereich noch zu klären ist). Die Integrale existieren, da die Integranden stetig auf kompaktem Intervall  $I$ .

a) Sei  $u$  Eigenfunktion mit Eigenwert  $\lambda$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= (u, Lu)_1 - (Lu, u)_1 = (u, \lambda u)_r - (\lambda u, u)_r = (\lambda - \bar{\lambda}) \underbrace{(u, u)_r}_{= \int_a^b dx |u|^2 r > 0} \\ &\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} = \text{reell.} \end{aligned}$$

Seien  $u$  und  $v$  Eigenfunktionen zum Eigenwert  $\lambda$ .

$u, v$  erfüllen  $R_a u = R_a v = 0$ , d.h.

$$0 = \underbrace{(A_1, p(a)A_2)}_{\neq (0,0)} \underbrace{\begin{pmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{pmatrix}}_{= \text{Wronski-Matrix } W} \Rightarrow \det(W) = 0.$$

$$\Rightarrow v(a) = c u(a), \quad v'(a) = c u'(a).$$

$$\Rightarrow v(x) = c u(x) \quad \forall x \in I \quad \text{nach Eindeutigkeitsatz f\u00fcr lineare Dglen. 2. Ord.}$$

b) Da Eigenfunktionen  $u \neq 0$  stetig auf  $I$ , gilt  $0 < (u, u)_r = c < \infty$ .

$\Leftrightarrow (u, u)_r = 1$  nach Redefinition  $u \rightarrow u/\sqrt{c} =$  ebenfalls Eigenfunktion.

Seien  $u$  und  $v$  Eigenfunktionen zu Eigenwerten  $\lambda \neq \lambda'$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= (u, Lv)_1 - (Lu, v)_1 = (u, \lambda' v)_r - (\lambda u, v)_r = \underbrace{(\lambda' - \lambda)}_{\neq 0} (u, v)_r \\ &\Rightarrow (u, v)_r = 0. \end{aligned}$$

c) Dieser Teil ist aufw\u00e4ndig (wenn auch elementar durchf\u00fchrbar).

Beweisidee:

1. Schritt: „Pr\u00fcfer-Transformation“.

$\Leftrightarrow$  Polarkoordinaten  $(\rho, \phi)$  f\u00fcr den „Phasenvektor“  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T := (p u', u)^T$ :

$$y_1(x) := p(x)u'(x) =: \rho(x) \cos \phi(x), \quad y_2(x) := u(x) =: \rho(x) \sin \phi(x).$$

Eigenschaften:

- Da  $u \neq 0$ , ist auf Grund des Eindeutigkeitsatzes  $\mathbf{y} \neq 0$ , d.h.  $\rho \neq 0$ .
- $\rho, \phi \in C^1(I)$ , da  $u, p \in C^1(I)$ .
- Umkehrtransformation:

$$\rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad \rho e^{i\phi} = y_1 + iy_2.$$

Die Dgl.  $Lu = \lambda r u$  ist \u00e4quivalent zu: (einfaches Einsetzen!)

$$\phi' = \frac{\cos^2 \phi}{p} + (\lambda r - q) \sin^2 \phi, \quad \rho' = \left( \frac{1}{p} + q - \lambda r \right) \rho \cos \phi \sin \phi.$$

$\Leftrightarrow$  Entkopplung! D.h. l\u00f6se erst Dgl. f\u00fcr  $\phi$ , dann f\u00fcr  $\rho$ .

2. Schritt: Eigenschaften der „Argumentfunktion“  $\phi(x, \lambda)$ .

Definiere  $u(x, \lambda)$  als Lsg. der Dgl.  $Lu = \lambda ru$  mit  $R_a = 0$  als Anfangsbedingung. Dann gilt für das zugehörige  $\phi(x, \lambda)$ :

- $\phi(x, \lambda)$  ist streng monoton wachsend in  $\lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I$ .
- Definiere Startwert für  $\phi$ :  $\phi(a, \lambda) =: \alpha$  mit  $0 \leq \alpha < \pi$ .  
 $\hookrightarrow$  Dann gilt:  $\phi(b, \lambda) \rightarrow 0$  für  $\lambda \rightarrow -\infty$ ,  
 $\phi(b, \lambda) \rightarrow \infty$  für  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Beachte:

Beweise benötigten Aussagen über Lsgen. verschiedener Dglen. (verschiedene  $\lambda$ ).

3. Schritt: Argumentation für Eigenwerte.

Randbedingungen  $R_a, R_b$  definieren eindeutige (!) Winkel  $\alpha, \beta$ :

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \end{pmatrix} =: \text{const.} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha < \pi, \quad (\alpha \text{ wie oben})$$

$$\begin{pmatrix} B_2 \\ B_1 \end{pmatrix} =: \text{const.} \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}, \quad 0 < \beta \leq \pi.$$

$\Rightarrow u(x, \lambda)$  erfüllt 2. Randbedingung  $R_b u = 0$  genau dann, wenn:

$$0 = (-\sin \beta, \cos \beta)^T \begin{pmatrix} \cos \phi(b, \lambda) \\ \sin \phi(b, \lambda) \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow R_b u = 0$  genau dann, wenn  $\lambda = \lambda_n$  mit  $\phi(b, \lambda_n) = \beta + n\pi$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ .

Folgerungen:

- $\lambda_n$  sind die gesuchten Eigenwerte mit Eigenfunktionen  $u_n(x) := u(x, \lambda_n)$ .
- Für  $n < 0$  existiert kein  $\lambda_n$  auf Grund der strengen Monotonie von  $\phi(b, \lambda)$  in  $\lambda$  und  $\phi(b, \lambda \rightarrow -\infty) = 0$ .
- Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  existiert genau ein  $\lambda_n$  durch strenge Monotonie von  $\phi(b, \lambda)$  in  $\lambda$  und  $\phi(b, \lambda \rightarrow \infty) = \infty$ .

d) Eigenschaften der Nullstellen von  $u_n(x) := u(x, \lambda_n)$ :  $(\phi_n(x) := \phi(x, \lambda_n))$

$$u(x_0, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x_0, \lambda) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ferner gilt:

$$0 \leq \phi_n(a) = \alpha < \pi, \quad n\pi < \phi_n(b) = \beta + n\pi \leq (n+1)\pi.$$

$\Rightarrow \phi_n(x)$  nimmt für  $a < x < b$  die Werte  $\pi, 2\pi, \dots, n\pi$  genau einmal an, aber keine anderen Werte der Form  $k\pi$ , d.h.  $u_n(x)$  hat genau  $n$  Nullstellen.

Für den Beweis der Trennungseigenschaft der Nullstellen siehe [11] (Satz von Sturm-Picone).

„q.e.d.“

**Beispiel:** Illustration bei Saitenschwingung.

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0, \tag{10.23}$$

d.h.  $p \equiv r \equiv 1, q \equiv 0$  und  $A_1 = B_1 = 1, A_2 = B_2 = 0. \Rightarrow \alpha = 0, \beta = \pi.$

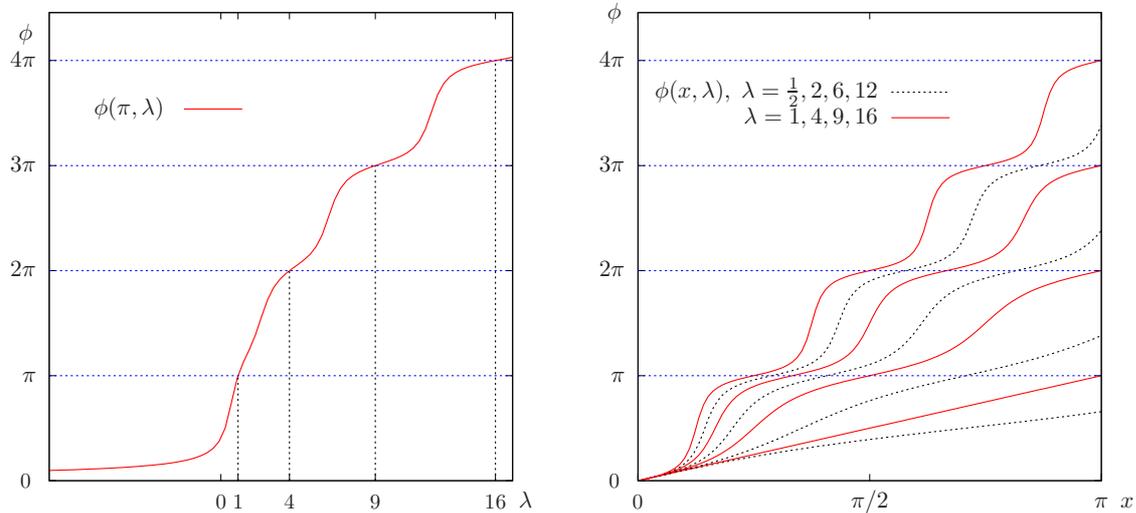
Dgl. der Argumentfunktion:

$$\phi' = \cos^2 \phi + \lambda \sin^2 \phi, \quad \phi(0, \lambda) = \alpha = 0. \tag{10.24}$$

$\Rightarrow$  Lösung:

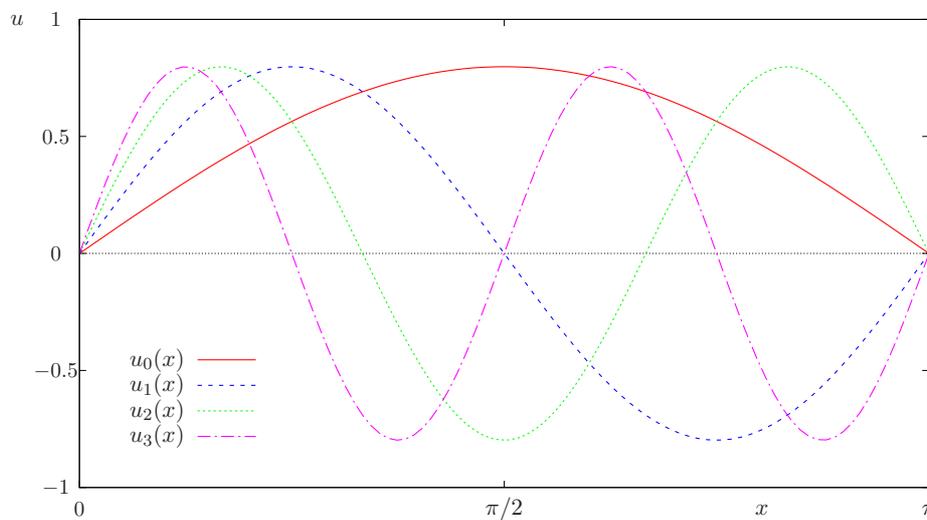
$$\phi(x, \lambda) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\tan \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}\right), & \lambda > 0, \\ \arctan(x), & \lambda = 0, \\ \arctan\left(\frac{\tanh \sqrt{-\lambda} x}{\sqrt{-\lambda}}\right), & \lambda < 0, \end{cases} \tag{10.25}$$

wobei die Funktion bei  $\cos(\sqrt{\lambda} x) = 0$  stetig fortzusetzen ist.



Eigenwerte und Eigenfunktionen:

$$\lambda_n = (n + 1)^2, \quad u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin((n + 1)x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{10.26}$$



**Anmerkungen zu nicht-regulären SL-Problemen:**

- Beweise meist schwieriger.  
↔ Typischerweise für Einzelfälle bzw. Unterklassen.
- Orthogonalität von Eigenfunktionen stets vorhanden  
(durch Lagrange-Identität und Verschwinden der Randterme nach Integration).
- Zweifache Entartung von Eigenwerten möglich.  
Beispiel:  
 $u'' + \lambda u = 0$  mit periodischen Randbedingungen  $u(0) = u(2\pi)$ ,  $u'(0) = u'(2\pi)$ .  
↔ Eigenwerte und Eigenfunktionen:
  - ◇  $\lambda < 0$ : keine Eigenfunktionen.
  - ◇  $\lambda = 0$ :  $u_0 = c = \text{const.}$ .
  - ◇  $\lambda > 0$ : zweifache Entartung für  $\lambda = k^2$ ,  $k > 0$ :  $u_{\pm k}(x) = e^{\pm ikx}$ .
- Falls  $a = -\infty$  oder  $b = \infty$ , kann das Eigenwertspektrum kontinuierliche Teile enthalten. Die Eigenfunktionen zu Eigenwerten im kontinuierlichen Spektrum sind meist nicht mehr normierbar und existieren als „Distributionen“.

## 10.2 Vollständige Orthogonalsysteme

**Satz 10.2** („Entwicklungssatz“ für reguläre SL-Probleme)

Die Eigenfunktionen  $u_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) eines reguläre SL-Problems lassen sich orthonormieren:

$$(u_m, u_n)_r = \int_a^b dx \bar{u}_m(x) u_n(x) r(x) = \delta_{mn}. \quad (10.27)$$

Die so normierten Eigenfunktionen bilden ein „vollständiges Orthonormalsystem“:

- a) Jede Funktion  $f \in C^2(I)$ , die den Randbedingungen  $R_a f = R_b f = 0$  genügt, lässt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente „Fourier-Reihe“ entwickeln:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x), \quad c_n = (u_n, f)_r. \quad (10.28)$$

- b) Jede „quadratintegrale“ Funktion  $f \in L^2(I)$ , d.h. falls  $\|f\| := (f, f)_1 < \infty$ , ist im Sinne der Konvergenz bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_1$  in eine Fourier-Reihe (10.28) entwickelbar, d.h. es gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \sum_{n=0}^N c_n u_n(x) \right\|_1 = 0. \quad (10.29)$$

(Die Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_r$  sind in  $L^2(I)$  äquivalent.)

### Anmerkungen:

- Der vollständige Beweis zu Satz 10.2 erfolgt meist im Rahmen der Funktionalanalysis (Theorie der kompakten selbstadjungierten Operatoren im Hilbert-Raum).
- Die Orthonormierbarkeit der  $u_n$  folgt bereits aus Satz 10.1.
- Ist die Vertauschbarkeit von  $\sum_n$  und  $\int_a^b$  gezeigt (z.B. durch glm. Konvergenz der Reihe), sind die Koeffizienten  $c_n$  leicht berechenbar:

$$(u_m, f)_r = \left( u_m, \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n \right)_r = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \underbrace{(u_m, u_n)_r}_{=\delta_{mn}} = c_m. \quad (10.30)$$

- Für singuläre SL-Probleme gelten ähnliche Entwicklungssätze, die aber schwieriger zu beweisen sind. Bei kontinuierlichen Eigenwertspektren wird aus der Fourier-Reihe ein Fourier-Integral.  
 $\Leftrightarrow$  Funktionalanalysis und Theorie der Distributionen!

**Wichtige Beispiele orthogonaler Funktionensysteme:**

a) Trigonometrisches System:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin((n+1)x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.31)$$

$$\text{Dgl.:} \quad 0 = u'' + \lambda u. \quad (10.32)$$

$$\text{SL-Problem (regulär):} \quad p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad r(x) = 1. \quad (10.33)$$

$$\text{Randbedingungen:} \quad u_n(0) = u_n(\pi) = 0. \quad (10.34)$$

$$\text{Eigenwerte:} \quad \lambda_n = (n+1)^2. \quad (10.35)$$

Anwendungen:

Laplace- bzw. Wellengleichung in kartesischen Koordinaten

(Stehende Wellen in Elektrodynamik, Kastenpotential in Quantenmechanik, etc.).

b) Legendre-Polynome:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (10.36)$$

$$\text{Legendresche Dgl.:} \quad 0 = (1 - x^2)u'' - 2xu' + l(l+1)u. \quad (10.37)$$

$$\text{SL-Problem (singulär):} \quad p(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = 0, \quad r(x) = 1. \quad (10.38)$$

$$\text{Randbedingungen:} \quad |P_l(\pm 1)| < \infty. \quad (10.39)$$

$$\text{Eigenwerte:} \quad \lambda_l = l(l+1). \quad (10.40)$$

Anwendungen:

Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten bei Zylindersymmetrie

(Multipolmomente bei Zylindersymmetrie, spezielle Kugelflächenfunktionen, etc.).

c) Zugeordnete Legendre-Funktionen:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \\ l = 0, 1, 2, \dots, \quad m = -l, -l+1, \dots, l = \text{fest}. \quad (10.41)$$

$$\text{Allg. Legendresche Dgl.:} \quad 0 = (1 - x^2)u'' - 2xu' + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] u. \quad (10.42)$$

$$\text{SL-Problem (singulär):} \quad p(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = \frac{m^2}{1-x^2}, \quad r(x) = 1. \quad (10.43)$$

$$\text{Randbedingungen:} \quad |P_l^m(\pm 1)| < \infty. \quad (10.44)$$

$$\text{Eigenwerte:} \quad \lambda_l = l(l+1). \quad (10.45)$$

Anwendungen:

Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten, Eigenfunktionen des qm. Drehimpulses

(Multipolmomente, Kugelflächenfunktionen, etc.).

d) Laguerre-Polynome:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad 0 \leq x < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.46)$$

$$\text{Laguerresche Dgl.:} \quad 0 = xu'' + (1-x)u' + nu. \quad (10.47)$$

$$\text{SL-Problem (singulär):} \quad p(x) = xe^{-x}, \quad q(x) = 0, \quad r(x) = e^{-x}. \quad (10.48)$$

$$\text{Randbedingungen:} \quad \int_0^\infty dx |u(x)|^2 e^{-x} < \infty. \quad (10.49)$$

$$\text{Eigenwerte:} \quad \lambda_n = n. \quad (10.50)$$

Anwendungen:

Schrödinger-Wellenfunktion beim  $1/r$ -Potential.

e) Zugeordnete Laguerre-Polynome:

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x), \quad 0 \leq x < \infty, \\ n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, n = \text{fest}. \quad (10.51)$$

$$\text{Zug. Laguerresche Dgl.:} \quad 0 = xu'' + (k+1-x)u' + nu. \quad (10.52)$$

$$\text{SL-Problem (singulär):} \quad p(x) = x^{k+1}e^{-x}, \quad q(x) = 0, \quad r(x) = x^k e^{-x}. \quad (10.53)$$

$$\text{Randbedingungen:} \quad \int_0^\infty dx |u(x)|^2 x^k e^{-x} < \infty. \quad (10.54)$$

$$\text{Eigenwerte:} \quad \lambda_n = n. \quad (10.55)$$

Anwendungen:

Schrödinger-Wellenfunktion beim  $1/r$ -Potential.

f) Hermite'sche Polynome:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.56)$$

$$\text{Hermite'sche Dgl.:} \quad 0 = u'' - 2xu' + 2nu. \quad (10.57)$$

$$\text{SL-Problem (singulär):} \quad p(x) = e^{-x^2}, \quad q(x) = 0, \quad r(x) = e^{-x^2}. \quad (10.58)$$

$$\text{Randbedingungen:} \quad \int_{-\infty}^\infty dx |u(x)|^2 e^{-x^2} < \infty. \quad (10.59)$$

$$\text{Eigenwerte:} \quad \lambda_n = 2n. \quad (10.60)$$

Anwendungen:

Schrödinger-Wellenfunktion beim harmonischen Oszillator.



# Literaturverzeichnis

- [1] B. Aulbach, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Akademischer Verlag, 2004.
- [2] H. Behnke, F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Springer 1976.
- [3] K. Endl, W. Luh, *Analysis III*, Verlag für Wissenschaft und Forschung AULA GmbH, 1983.
- [4] H. Fischer, H. Kaul, *Mathematik für Physiker 1*, Vieweg + Teubner Verlag, 2011.
- [5] H. Fischer, H. Kaul, *Mathematik für Physiker 2 (Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, mathematische Grundlagen der Quantenmechanik)*, Springer Spektrum, 2014.
- [6] K. Fritzsche, *Grundkurs Funktionentheorie*, Spektrum Akademischer Verlag, 2009.
- [7] K. Jänich, *Analysis für Physiker und Ingenieure (Funktionentheorie, Differentialgleichungen, spezielle Funktionen)*, Springer, 2001.
- [8] K. Jänich, *Funktionentheorie – Eine Einführung*, Springer, 2011.
- [9] K. Jänich, *Mathematik 1 (Geschrieben für Physiker)*, Springer, 2005.
- [10] H. Kerner, W. von Wahl, *Mathematik für Physiker*, Springer Spektrum, 2013.
- [11] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer, 2000.