Aufgabe 9.1 *Erwartungswerte von Drehimpulskomponenten* (2 Punkte)

Betrachten Sie die Eigenzustände $|j,m\rangle$ von $\mathbf{J}^2$ und J_3 in der üblichen Notation, wobei $\mathbf{J}$ den Drehimpulsoperator bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle J_1\rangle$, $\langle J_2\rangle$, $\langle J_1^2\rangle$, $\langle J_2^2\rangle$ im Zustand $|j,m\rangle$.

b) Zeigen Sie, dass $|j,m\rangle$ Eigenvektor zu $J_\perp^2 \equiv J_1^2 + J_2^2$ ist und bestimmen Sie den Eigenwert.

Aufgabe 9.2 *Bahndrehimpuls für Teilchen im Zentralkraftfeld* (2 Punkte)

Ein strukturloses Teilchen der Masses M befinde sich in einem Zentralpotential $V(r)$, wobei $r = |\mathbf{x}|$.

a) Zeigen Sie, dass zwischen dem Hamilton-Operator $\hat{H}$ des Systems und dem Bahndrehimpuls $\mathbf{L} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}$ folgende Kommutatorrelationen bestehen:

$$[\hat{H}, L_3] = 0, \qquad [\hat{H}, \mathbf{L}^2] = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\hat{\mathbf{p}}^2 = \hat{p}_r^2 + \frac{\mathbf{L}^2}{\hat{r}^2},$$

wobei $\hat{\mathbf{p}}$ den (kartesischen) Impulsoperator und

$$\hat{p}_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\mathbf{x}}}{\hat{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot \frac{\hat{\mathbf{x}}}{\hat{r}}\right)$$

den Operator des Radialimpulses bezeichnen.

Bitte wenden !

Aufgabe 9.3 *Ganzzahligkeit des Bahndrehimpulses* (4 Punkte)

Im Folgenden werden Sie angeleitet, à la Born/Jordan 1930 zu beweisen, dass die Bahndrehimpulsquantenzahl l nur ganzzahlig sein kann. Dazu betrachten wir die Bahndrehimpulseigenzustände $|l, m\rangle$ zu $\mathbf{L}^2$ und L_3 in der üblichen Notation. Neben den Vertauschungsrelationen für den Bahndrehimpulsoperator $\mathbf{L} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}$ werden wir noch folgende Relationen benutzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^2\,|l,l\rangle &\neq 0, & (1)\\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{L} &= 0, & (2)\\ [k_a, k_b] &= 0, \qquad a,b = 1,2,3, & (3) \end{aligned}$$

wobei für den Vektoroperator $\mathbf{k}$ der Orts- oder Impulsoperator eingesetzt werden kann. Für einen festen Wert von l definieren wir den Vektoroperator

$$\mathbf{A} \;=\; \mathrm{i}\mathbf{k} \times \mathbf{L} - \hbar l \mathbf{k}$$

und gehen anschließend für die Komponenten v_a aller Vektoroperatoren $\mathbf{v}$ zur „sphärischen Basis“ $(v_3, v_\pm = v_1 \pm \mathrm{i}v_2)$. über.

a) Zeigen Sie

$$A_3 \;=\; k_- L_+ - \mathbf{k}\cdot\mathbf{L} + k_3 L_3 - \hbar l k_3, \qquad A_\pm \;=\; \pm k_\pm L_3 \mp k_3 L_\pm - \hbar l k_\pm.$$

b) Nutzen Sie die Vektoreigenschaft der entsprechenden Operatoren und Relation (3) (+Geduld), um folgende Kommutatoren zu verifizieren:

$$[L_+, A_-] \;=\; 2\hbar A_3, \qquad [L_3, A_-] \;=\; -\hbar A_-, \qquad [A_+, A_-] \;=\; 2\hbar \mathbf{k}^2 L_3.$$

c) Betrachten Sie nun den Zustand $|l, l\rangle$, für den Sie unter Verwendung von (1) und (2) folgende Eigenschaften beweisen:

$$A_+|l,l\rangle \;=\; A_3|l,l\rangle \;=\; 0, \qquad A_-|l,l\rangle \;\neq\; 0 \quad \text{für} \quad l > 0.$$

d) Zeigen Sie, dass $A_-|l,l\rangle \neq 0$ proportional zum Eigenzustand $|l-1, l-1\rangle$ ist. Warum folgt daraus, dass l ganzzahlig sein muss?