Aufgabe 8.1 *Kohärente Zustände* (5 Punkte)

Jeder Eigenzustand $|\lambda\rangle$ des Vernichtungsoperators a, d.h. $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$, eines eindimensionalen harmonischen Oszillators definiert einen kohärenten Zustand, wobei λ im Allgemeinen eine komplexe Zahl darstellt.

a) Beweisen Sie, daß
$$|\lambda\rangle = \mathrm{e}^{-|\lambda|^2/2}\,\mathrm{e}^{\lambda a^+}\,|0\rangle$$
ein normierter kohärenter Zustand ist, wobei $|0\rangle$ den Grundzustand des harmonischen Oszillators bezeichnet.

b) Zeigen sie, daß $|\lambda\rangle$ minimale Orts-Impuls-Unschärfe besitzt.

c) Entwickeln Sie $|\lambda\rangle$ in Energieeigenzustände $|n\rangle$:
$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)|n\rangle.$$
Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich für $|f(n)|^2$?

d) Schätzen Sie für $|\lambda| \gg 1$ die Zahl $n_{\max}$ ab, für die $|f(n)|^2$ maximal wird, und vergleichen Sie $E_{n_{\max}}$ mit dem Energieerwartungswert E_λ im Zustand $|\lambda\rangle$.

e) Zeigen Sie, dass man $|\lambda\rangle$ auch durch Anwendung des Translationsoperators
$$T(d) = \exp\{-\mathrm{i}d\hat{p}/\hbar\}$$
auf den Grundzustand $|0\rangle$ erhält, wobei $T(d)$ eine Verschiebung um die Distanz d bewirkt.
(Hinweis: Spezielle BCH-Formel benutzen.)

Aufgabe 8.2 *Potentialumeichung* (1 Punkt)

Ein strukturloses Teilchen der Masse m befinde sich im Potential $V(\hat{\mathbf{x}}, t)$, d.h. der Hamilton-Operator des Systems lautet $H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}}, t)$. Wie ändert sich der Zeitentwicklungsoperator $U(t, 0)$ des Systems, wenn man zum Potential $V(\hat{\mathbf{x}}, t)$ eine beliebige zeitabhängige reelle Funktion $f(t)$ addiert? Wie wirkt sich diese Potentialumeichung auf Observablen aus?

Aufgabe 8.3 *Translationsoperator im Ortsraum* (1 Punkt)

Arbeiten Sie die Wirkung des Translationsoperators $T(\mathbf{a}) = \exp\{-\mathrm{i}\mathbf{a}\hat{\mathbf{p}}/\hbar\}$ auf eine beliebige Einteilchen-Wellenfunktion $\psi(\mathbf{x})$ im Ortsraum aus, indem Sie die Ortsdarstellung des Impulsoperators $\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla$ verwenden.