Aufgabe 7.1 *"NH_3-Schwingung"* (3 Punkte)

Das Ammoniakmolekül läßt sich idealisiert als ein quantenmechanisches System mit zwei Zuständen betrachten: Der Zustandsvektor $|1\rangle$ bzw. $|2\rangle$ beschreibe die Konfiguration, bei der sich das Stickstoffatom über bzw. unter der durch die drei Wasserstoffatome bestimmten Ebene befindet. Dann läßt sich der Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ und der Hamilton-Operator H bezüglich der orthonormierten Basis $|j\rangle,\ j = 1, 2$ darstellen

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \textstyle\sum_{j=1}^{2} c_j(t)|j\rangle \qquad &\text{mit} \qquad c_j(t) &= \langle j|\psi(t)\rangle, \\ \hat{H} &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} H_{ij}|i\rangle\langle j| \qquad &\text{mit} \qquad H_{ij} &= \langle i|H|j\rangle. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen hat die Matrix (H_{ij}) folgende Form:

$$(H_{ij}) = \begin{pmatrix} E & A \\ A^* & E \end{pmatrix}, \qquad E \in \mathbf{R}, \quad A \in \mathbf{C}.$$

a) Geben Sie die Energieeigenwerte E_i und die zugehörigen Energieeigenzustände $|E_i\rangle$ dieses Systems an. Wie lautet die unitäre Matrix B, die den Basiswechsel von $|j\rangle$ nach $|E_i\rangle$ beschreibt?

b) Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator $U(t, 0) = \exp\{-\mathrm{i}Ht/\hbar\}$ sowohl in der $|E_i\rangle$- als auch in der $|j\rangle$-Basis.

c) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|1\rangle$. Bestimmen Sie den Zustand des Systems zum Zeitpunkt t und die Wahrscheinlichkeit $P_{1j}(t)$ $(j = 1, 2)$, das System zur Zeit t im Zustand $|j\rangle$ zu finden.

Aufgabe 7.2 *Freies Teilchen im Heisenberg-Bild* (2 Punkte)

Betrachten Sie die kräftefreie Bewegung eines Teilchens der Masse m.

a) Lösen Sie jeweils die Bewegungsgleichung für den Ortsoperator $\hat{\mathbf{x}}(t)_\mathrm{H}$ und den Impulsoperator $\hat{\mathbf{p}}(t)_\mathrm{H}$ im Heisenberg-Bild.

b) Drücken Sie die Erwartungswerte der Orts- und Impulsoperatoren zum Zeitpunkt t durch ihre Anfangswerte zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ und die Zeit t aus.

c) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{x}_k(t_1)_\mathrm{H}, \hat{x}_l(t_2)_\mathrm{H}]$, $[\hat{x}_k(t_1)_\mathrm{H}, \hat{p}_l(t_2)_\mathrm{H}]$, und $[\hat{p}_k(t_1)_\mathrm{H}, \hat{p}_l(t_2)_\mathrm{H}]$.

Bitte wenden !

Aufgabe 7.3 *Fermi-Oszillator* (2 Punkte)

Betrachten Sie das quantenmechanische System eines sogenannten „Fermi-Oszillators“, dessen Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \hbar\omega f^+ f^-$$

dem des gewöhnlichen harmonischen Oszillators sehr ähnlich sieht. Die Schiebeoperatoren f^- und $f^+ = (f^-)^\dagger$ erfüllen allerdings Antikommutator- an Stelle von Kommutatorrelationen:

$$\{f^\pm, f^\pm\} = 0, \qquad \{f^+, f^-\} = 1,$$

wobei $\{A, B\} \equiv AB + BA$ für Operatoren A, B. Der Grundzustand $|0\rangle$ des Systems wird charakterisiert durch $f^-|0\rangle = 0$, alle angeregten Zustände werden durch $|n\rangle \propto (f^+)^n|0\rangle$ mit $n = 1, \ldots, N$ generiert.

a) Wie sieht das Spektrum E_n zu den Zuständen $|n\rangle$ mit $n = 0, ..., N$ aus? Wie groß ist insbesondere N? Geben Sie alle orthonormierten Zustände $|n\rangle$ mit Hilfe von $(f^+)^n|0\rangle = 0$ an.

b) Das Modell wird nun auf $F > 1$ derartige Oszillatoren verallgemeinert, d.h.

$$\hat{H} = \hbar\omega \sum_{k=1}^{F} f_k^+ f_k^-, \qquad \{f_k^\pm, f_l^\pm\} = 0, \qquad \{f_k^+, f_l^-\} = \delta_{kl}, \qquad f_k^+ = (f_k^-)^\dagger.$$

Die Grundzustand $|0, \ldots, 0\rangle$ wird durch $f_k^-|0, \ldots, 0\rangle = 0$ für alle $k = 1, \ldots, F$ charakterisiert und alle weiteren Zustände durch $|n_1, \ldots, n_F\rangle \propto (f_1^+)^{n_1} \cdots (f_F^+)^{n_F}|0, \ldots, 0\rangle$ generiert.

Wie sieht das Spektrum $E_{n_1,\ldots,n_F}$ zu den Zuständen $|n_1, \ldots, n_F\rangle$ aus? Geben Sie alle orthonormierten Zustände $|n_1, \ldots, n_F\rangle$ an. In welcher Beziehung stehen Zustände wie $f_2^+ f_1^+|0, \ldots, 0\rangle$, in denen die Reihenfolge der f_k^+-Operatoren nicht in k aufsteigend geordnet ist, zu den $|n_1, \ldots, n_F\rangle$?