Aufgabe 6.1 *Simultane Eigenzustände* (2 Punkte)

Im Folgenden seien die Operatoren A and B Hermite'sch.

a) Angenommen A und B antikommutieren, d.h. $\{A, B\} \equiv AB + BA = 0$. Unter welchen Voraussetzungen kann es prinzipiell simultane Eigenzustände zu A und B geben?

b) Angenommen A und B kommutieren nicht miteinander, d.h. $[A, B] \neq 0$, aber beide Operatoren kommutieren mit dem Hamilton-Operator H, d.h. $[A, H] = 0$ und $[B, H] = 0$. Welche Aussagen können Sie über mögliche Entartung der Eigenzustände von H treffen?

Aufgabe 6.2 *Baker-Campbell-Hausdorff-Formel* (3 Punkte)

Gegeben seien die Operatoren A und B auf einem Hilbert-Raum, die im Allgemeinen nicht miteinander kommutieren. Die Exponentialfunktion e^A eines Operators A ist über ihre Potenzreihe definiert, wobei Sie im Folgenden die Konvergenz solcher Reihen voraussetzen können.

a) Beweisen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\, e^{\alpha A} = A\, e^{\alpha A}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$) und $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

b) Beweisen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^A\, B\, e^{-A} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A, B]_n,$$

wobei die Exponentialfunktion von Operatoren über ihre Potenzreihe und der multiple Kommutator $[.,.]_n$ wie folgt rekursiv definiert ist:

$$[A, B]_0 = B, \quad [A, B]_n = [A, [A, B]_{n-1}].$$

Hinweis: Betrachten Sie die Taylor-Reihe der operatorwertigen Funktion $F(x) = e^{xA} B e^{-xA}$ der Hilfsvariablen x um den Punkt $x = 0$.

c) Beweisen Sie die speziellen BCH-Formeln

$$e^A\, e^B \;=\; e^B\, e^A\, e^{[A,B]}, \qquad e^{A+B} \;=\; e^A\, e^B\, e^{-[A,B]/2},$$

die unter der Voraussetzung $[A, [A, B]] = [B, [B, A]] = 0$ gelten und in der Quantenmechanik häufig Anwendung finden.

Bitte wenden !

Aufgabe 6.3 *Zustände mit minimaler Unschärfe* (2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass in der allgemeinen Unschärferelation für Hermite'sche Operatoren A, B

$$\left\langle (\delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\delta B)^2 \right\rangle \;\geq\; \frac{1}{4} \left| \left\langle [A, B] \right\rangle \right|^2$$

mit $\delta A = A - \langle A \rangle$, $\delta B = B - \langle B \rangle$ das Gleichheitszeichen genau dann gilt, falls für den Zustand $|\psi\rangle$, für den die Unschärfen zu berechnen sind, gilt, dass

$$\delta A |\psi\rangle \;=\; \lambda\, \delta B |\psi\rangle$$

mit rein imaginärem λ, d.h. $\lambda = -\lambda^*$.

b) Leiten Sie mit Hilfe von a) die allgemeine Form der Ortsraum-Wellenfunktion $\psi(\mathbf{x})$ für einen Zustand $|\psi\rangle$ her, der minimale Orts-Impuls-Unschärfe in allen drei Raumdimensionen besitzt.