Aufgabe 5.1 *Operator des Radialimpulses* (2 Punkte)

Klassisch ist der Radialimpuls p_r eines Teilchens mit kartesischem Impuls $\mathbf{p}$ definiert durch $p_r = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{p}$, wobei $\mathbf{e}_r$ der Einheitsvektor in Richtung des Ortsvektors $\mathbf{x}$ ist. Machen Sie für den entsprechenden Operator $\hat{p}_r$ den Ansatz $\hat{p}_r = \alpha \mathbf{e}_r \cdot \hat{\mathbf{p}} + (1-\alpha)\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_r$ mit einer reellen Zahl α.

a) Fordern Sie Hermitizität $\hat{p}_r^\dagger = \hat{p}_r$ und legen Sie damit α fest. Wie sieht $\hat{p}_r$ als Differentialoperator in Kugelkoordinaten aus?

   (Subtilitäten im Definitionsbereich von $\hat{p}_r$ müssen hier nicht untersucht werden.)

b) Berechnen Sie den Kommutator $[r, \hat{p}_r]$ für allgemeines α, wobei $r = |\mathbf{x}|$. Für welche α gilt die Heisenberg'sche Vertauschungsrelation $[r, \hat{p}_r] = \mathrm{i}\hbar$?

Aufgabe 5.2 *Vertauschungsrelationen mit dem Drehimpuls* (3 Punkte)

Ein Operator s heißt *skalarer Operator*, falls

$$[L_m, s] = 0, \quad m = 1,2,3, \tag{1}$$

ein Operator $\mathbf{v}$ heißt *Vektoroperator*, falls

$$[L_m, v_n] = \mathrm{i}\hbar \sum_l \epsilon_{mnl} v_l, \quad m,n = 1,2,3, \tag{2}$$

wobei $L_m = \sum_{n,l} \epsilon_{mnl} \hat{x}_n \hat{p}_l$ die m. Komponente des Drehimpulsoperators $\mathbf{L} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}$ darstellt. ϵ_{mnl} bezeichnet den total antisymmetrischen Tensor

$$\epsilon_{mnl} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (m,n,l) = (1,2,3) \text{ bzw. zyklisch,} \\ -1, & \text{falls } (m,n,l) = (3,2,1) \text{ bzw. zyklisch,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3}$$

a) Zeigen Sie, dass generell das Quadrat $\mathbf{v}^2$ eines Vektoroperators $\mathbf{v}$ ein skalarer Operator ist.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Heisenberg'schen Vertauschungsrelationen und unter Benutzung des ϵ-Tensors, dass $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{p}}$ Vektoroperatoren gemäß (2) sind.

Bitte wenden !

c) Im Folgenden seien J_m $(m = 1, 2, 3)$ Operatoren, die den Vertauschungsrelationen $[J_m, J_n] = i\hbar \sum_l \epsilon_{mnl} J_l$ genügen. Benutzen Sie die trivial erfüllte “Jacobi-Identität”

$$[[J_m, J_n], J_l] + [[J_n, J_l], J_m] + [[J_l, J_m], J_n] = 0,$$

um folgende Identität für Produkte zweier ϵ-Tensoren herzuleiten:

$$\sum_c \epsilon_{abc}\epsilon_{cde} + \epsilon_{bdc}\epsilon_{cae} + \epsilon_{dac}\epsilon_{cbe} = 0.$$

Zeigen Sie damit, dass $\mathbf{L}$ ein Vektoroperator ist.

Aufgabe 5.3 *Ungleichungen im Hilbert-Raum* (1 Punkt)

Beweisen Sie folgende Ungleichungen für beliebige Elemente ψ, ϕ eines Hilbert-Raumes:

a) Schwarz’sche Ungleichung: $|\langle\psi|\phi\rangle| \;\leq\; ||\psi|| \cdot ||\phi||$,

b) Dreiecksungleichung: $||\psi + \phi|| \;\leq\; ||\psi|| + ||\phi||$.

Aufgabe 5.4 *Simultane Diagonalisierung* (2 Punkte)

Gegeben sind die Operatoren A und B,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}, \qquad a, b \text{ reell},$$

im Hilbert-Raum, der von der Basis $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ aufgespannt wird.

a) Geben Sie Eigenzustände und Eigenwerte von A und B an.

b) Verifizieren Sie, daß A und B kommutieren, und geben Sie eine simultane Basis von Eigenzuständen zu A und B an. Charakterisiert die Angabe der Eigenwerte von A und B die Eigenzustände vollständig?