Aufgabe 4.1 *Orts-Impuls-Unschärfe beim harmonischen Oszillator* (2 Punkte)

Berechnen Sie die mittleren Schwankungsquadrate

$$\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}, \qquad \Delta p = \sqrt{\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle}$$

für Ort und Impuls für die Energieeigenzustände des eindimensionalen harmonischen Oszillators und verifizieren Sie die Heisenberg'sche Unschärferelation.

Hinweis:
Die allgemeinen Eigenschaften der Hermite-Polynome aus Aufgabe 3.1 helfen weiter.

Aufgabe 4.2 *Ehrenfest'sches Theorem* (3 Punkte)

Ein quantenmechanisches System eines Teilchens der Masse m im Potential $V(\mathbf{x})$ werde mit der Wellenfunktion $\psi(\mathbf{x}, t)$ beschrieben.

a) Beweisen Sie das Ehrenfest'sche Theorem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \hat{\mathbf{x}} \rangle_\psi = \frac{\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle_\psi}{m}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle_\psi = -\langle \nabla V(\hat{\mathbf{x}}) \rangle_\psi$$

für die Erwartungswerte des Ortsoperators $\hat{\mathbf{x}}$ und des Impulsoperators $\hat{\mathbf{p}}$.

b) Für welche Potentiale $V(\mathbf{x})$ gilt $\langle \nabla V(\hat{\mathbf{x}}) \rangle_\psi = \nabla V(\langle \hat{\mathbf{x}} \rangle_\psi)$ für beliebige Zustände ψ ?

Hinweis:
Untersuchen Sie die Taylorentwicklung von $V(\mathbf{x})$ um den Punkt $\mathbf{x} = \langle \mathbf{x} \rangle$.

Aufgabe 4.3 *Unitärer Operator* (2 Punkte)

Ein Operator U, der auf Elemente f, g eines komplexen Vektorraumes V mit Skalarprodukt (f, g) wirkt, heißt *unitär*, falls $(Uf, Uf) = (f, f)$ für alle $f \in V$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass $(Uf, Ug) = (f, g)$ für alle $f, g \in V$, d.h. $U^{-1} = U^\dagger$.

b) Welche Eigenschaft haben die Eigenwerte von U ?

c) Sei $U = \exp\{\mathrm{i}\alpha A\}$ für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ unitär. Welche Eigenschaft hat dann der Operator A? (Die exp-Funktion ist hier formal über ihre Potenzreihe definiert.)

d) Ist die Summe, ist das Produkt zweier unitärer Operatoren unitär ?