Aufgabe 3.1 *Hermite'sche Polynome* (3 Punkte)

Die Hermite'schen Polynome sind definiert durch

$$H_n(x) \;=\; (-1)^n\, \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

a) Zeigen Sie folgende Rekursionsformeln

$$H_{n+1}(x) \;=\; 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \qquad H_n'(x) \;=\; 2nH_{n-1}(x)$$

und folgern Sie daraus, dass $H_n(x)$ ein Polynom vom Grad n darstellt, das die Parität $(-1)^n$ hat, d.h. es gilt $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

b) Verifizieren Sie, dass $H_n(x)$ die Hermite'sche Differentialgleichung

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) \;=\; 0$$

erfüllt. Warum ist dieser Nachweis bereits ausreichend dafür, dass $H_n(x)$ bis auf Normierung mit dem Polynom übereinstimmt, das mit Hilfe der Sommerfeld'schen Polynommethode für die Energie-Eigenfunktion des harmonischen Oszillators abgeleitet wurde?

c) Beweisen Sie die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, H_n(x)\, H_m(x)\, \mathrm{d}x \;=\; \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!\, \delta_{nm}.$$

Bitte wenden !

Aufgabe 3.2 *Verbogenes Oszillatorpotential* (4 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{k}{x^2} & \text{für } x > 0, \\ \infty & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

wobei $k > 0$. Im Folgenden soll die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung mit der Sommerfeld'schen Polynommethode gelöst werden.

a) Spalten Sie das asymptotische Verhalten der Lösungen $\psi(x)$ der Schrödinger-Gleichung für $x \to \infty$ und $x \to 0$ in Form eines Produktansatzes ab und stellen Sie für das restliche, reguläre Verhalten die entsprechende Differentialgleichung auf. Es ist zweckmässig, den regulären Anteil $\phi(\xi)$ als Funktion der neuen unabhängigen Variable $\xi = \alpha x^2$ mit $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$ zu parametrisieren.

   [Zur Kontrolle: Für $\phi(\xi)$ sollten Sie eine Differentialgleichung der folgenden Form erhalten: $4\alpha\xi\phi'' + (-4\alpha\xi + 2\alpha(1 + 2\beta))\phi' + (\varepsilon - \alpha(1 + 2\beta))\phi = 0$, wobei die Konstante ε die Energie enthält und die Konstante β aus dem asymptotischen Verhalten $\psi(x) \sim x^\beta$ bei $x \to 0$ stammt.]

b) Lösen Sie die Differentialgleichung für $\phi(\xi)$ mit einem Potenzreihenansatz um $\xi = 0$ und leiten Sie die diskreten Energieniveaus E_n aus einer geeigneten Abbruchbedingung für die Potenzreihe her.

c) Berechnen Sie die normierte Energie-Eigenfunktion des Grundzustandes.

   [Hinweis: Sie erhalten ein Integral, das auf die Γ-Funktion führt.]

d) Wie stehen die Energie-Eigenwerte und -Eigenfunktionen des Grenzfalls $k \to 0$ mit denen des harmonischen Oszillators in Beziehung?