Aufgabe 2.1 *Kastenpotential* (3 Punkte)

Ein Teilchen befinde sich in dem Potentialkasten

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 < x < L, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie aus der stationären Schrödinger-Gleichung die Energieeigenwerte E_n und -eigenfunktionen $\phi_n(x)$.

b) Konstruieren Sie aus den Wellenfunktionen des Grundzustandes $\phi_1(x)$ und des ersten angeregten Zustandes $\phi_2(x)$ eine Anfangsverteilung $\psi(x, t = 0)$, bei welcher die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in der rechten Hälfte zu finden, *maximal* ist.

c) Wie ändern sich das in Teil b) bestimmte $\psi(x, t)$ und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in der rechten Hälfte im Zeitverlauf?

Aufgabe 2.2 *Potentialschwelle* (3 Punkte)

Eine eindimensionale Potentialschwelle habe die Form

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0 & \text{für } 0 < x < a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie diejenigen (nicht normierbaren) Lösungen $\psi(x)$ der zugehörigen zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung, die für $x \to \infty$ die Form $C\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ haben

a) für den Fall $E > V_0$,

b) für den Fall $E < V_0$.

c) Die gesuchte Eigenfunktion hat für $x \to -\infty$ die Form

$$\psi(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}.$$

$R = |\frac{B}{A}|^2$ ist der Reflexions-, $T = |\frac{C}{A}|^2$ der Transmissionskoeffizient der Potentialschwelle. Berechnen Sie R und T für die Fälle a) und b) und zeigen Sie, dass $R + T = 1$.

Bitte wenden !

Aufgabe 2.3 *Allgemeine Potentialstufe* (1 Punkt + 1 Bonuspunkt)

Eine eindimensionale Potentialstufe $V(x)$ sei durch folgende Form gegeben:

$$V(x) = \begin{cases} V_- & \text{für } x < -a < 0, \\ V_+ & \text{für } x > +a > 0, \\ \text{beliebig stetig} & \text{für } |x| \leq a, \end{cases}$$

d.h. $V(x)$ ist für $|x| < a$ eine allgemeine, reelle, stetige Funktion und für $|x| > a$ konstant, wobei $|V_\pm| < \infty$. Sei ferner $V_- < V_+$.

a) Welche Form hat die Lösung $\psi(x)$ der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für $|x| > a$ für Energien E mit $V_- < E < V_+$? Zeigen Sie, dass die Lösung in diesen Außenbereichen abgesehen von der Energie E und der willkürlichen globalen Normierung insgesamt nur von zwei weiteren, reellen Parametern abhängt, die von der Form von V bestimmt werden. Zeigen Sie ferner, dass die Wahrscheinlichkeitsstromdichte verschwindet. Was bedeutet dies physikalisch?

b) *(Bonus)*
Zur Vereinfachung setzen Sie nun $V_\pm = 0$. Für $E > 0$ lassen sich zwei Lösungen $\psi_\pm(x)$ gewinnen, die für $x \to \pm\infty$ die Form $\psi_\pm(x) = C_\pm \mathrm{e}^{\pm ikx}$ haben. Welche Bedeutung haben diese Lösungen? Analog zu Aufgabe 4. werden für diese Lösungen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten $R_\pm$ und $T_\pm$ definiert, für die auf Grund der Erhaltung des Wahrscheinlichkeitsstromes $R_\pm + T_\pm = 1$ gelten muss. Zeigen Sie damit, dass $R_+ = R_-$ und $T_+ = T_-$.

[Hinweis: Verwerten Sie auch die Tatsache, dass Realteil und Imaginärteil von Lösungen ψ separat die (reelle!) Schrödinger-Gleichung lösen.]