Aufgabe 11.1 *Spin-$\frac{1}{2}$-System* (3 Punkte)

Für ein Spin-$\frac{1}{2}$-System seien $|\pm\rangle$ die Eigenzustände zu $S_3 : S_3|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$.

a) Bestimmen Sie den Eigenzustand $|\mathbf{n},+\rangle$ des Operators $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$:

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,|\mathbf{n},+\rangle \;=\; +\frac{\hbar}{2}\,|\mathbf{n},+\rangle,$$

wobei $\mathbf{n} = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)^T$.

(Ergebnis: $|\mathbf{n},+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \mathrm{e}^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|-\rangle$.)

b) S_1 werde im Zustand $|\mathbf{n},+\rangle$ gemessen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, $+\frac{\hbar}{2}$ zu erhalten? Berechnen Sie auch die Unschärfe $\Delta S_1 = \langle (S_1 - \langle S_1\rangle)^2\rangle$ für den Zustand $|\mathbf{n},+\rangle$.

c) Verifizieren Sie die Unschärferelation zwischen S_1 und S_2 im Zustand $|\mathbf{n},+\rangle$.

Aufgabe 11.2 *Elektron im Magnetfeld* (2 Punkte)

Man betrachte ein Elektron, dessen einziger Freiheitsgrad der Spin ist. Der Hamilton-Operator dieses Elektrons im Magnetfeld $\mathbf{B}$ ist

$$H = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B} = -\frac{e}{m}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}.$$

In der Basis der Eigenzustände $|\pm\rangle$ zu S_3 ist der Spinoperator $S_k = \frac{\hbar}{2}\sigma_k$ gegeben durch die Pauli-Matrizen σ_k.

a) Berechnen Sie für ein homogenes, zeitlich konstantes Magnetfeld in x_3-Richtung die Zeitabhängigkeit des Zustands

$$|\psi(t)\rangle = \psi_+(t)|+\rangle + \psi_-(t)|-\rangle = \begin{pmatrix}\psi_+(t)\\ \psi_-(t)\end{pmatrix}.$$

b) Das Elektron befinde sich zur Zeit $t = 0$ in einem Eigenzustand von S_1. Man berechne den Erwartungswert von S_k ($k = 1,2,3$) zur Zeit t.

Bitte wenden !

Aufgabe 11.3 *Drehimpulsaddition speziell* (3 Punkte)

Wir betrachten ein quantenmechanisches System, das aus zwei Teilen besteht, die jeweils durch Eigenzustände $|j_k, m_k\rangle$ $(k = 1, 2)$ von $\mathbf{J}_k^2$ und $J_{k,3}$ der Drehimpulsoperatoren $\mathbf{J}_k$ beschrieben werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_k^2|j_k, m_k\rangle &= \hbar^2 j_k(j_k+1)|j_k, m_k\rangle, \qquad & j_k &= 0, \tfrac{1}{2}, 1, \ldots, \\ J_{k,3}|j_k, m_k\rangle &= \hbar m_k|j_k, m_k\rangle, & m_k &= -j_k, -j_k+1, \ldots, j_k. \end{aligned}$$

Konkret betrachten wir den Fall $j_1 = 1$ und $j_2 = \frac{1}{2}$ und vereinbaren zur besseren Übersicht die Abkürzungen:

$$|\Uparrow\rangle \equiv |1,1\rangle, \quad |0\rangle \equiv |1,0\rangle, \quad |\Downarrow\rangle \equiv |1,-1\rangle, \qquad |\uparrow\rangle \equiv |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle, \quad |\downarrow\rangle \equiv |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle.$$

Stellen Sie alle nicht-trivialen Eigenzustände $|j, m\rangle$ von $\mathbf{J}^2$ und J_3 des Gesamtdrehimpulses $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ in der Basis $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ (abgekürzt durch $|\Uparrow\uparrow\rangle$, etc.) dar.

Hinweis: Die Auf- und Absteigeoperatoren $J_\pm = J_{1\pm} + J_{2\pm}$ wirken auf $|j, m\rangle$ wie folgt:

$$J_\pm|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j, m\pm 1\rangle.$$

Bonus-Aufgabe 11.4 *Drehimpulsaddition allgemein* (1 Bonuspunkt)

Wie in der vorherigen Aufgabe betrachten wir ein quantenmechanisches System, das aus zwei Teilen besteht, die jeweils durch Eigenzustände $|j_k, m_k\rangle$ $(k = 1, 2)$ von $\mathbf{J}_k^2$ und $J_{k,3}$ der Drehimpulsoperatoren $\mathbf{J}_k$ beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_k^2|j_k, m_k\rangle &= \hbar^2 j_k(j_k+1)|j_k, m_k\rangle, \qquad & j_k &= 0, \tfrac{1}{2}, 1, \ldots, \\ J_{k,3}|j_k, m_k\rangle &= \hbar m_k|j_k, m_k\rangle, & m_k &= -j_k, -j_k+1, \ldots, j_k. \end{aligned}$$

Der Übergang von der Basis der Produktzustände $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \equiv |j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ zur Basis $|j, m\rangle$ aus Eigenzuständen von $\mathbf{J}^2$ und J_3 des Gesamtdrehimpulses $\mathbf{J}$ wird durch die Clebsch-Gordan-Koeffizienten $\langle j_1, m_1; j_2, m_2|j, m\rangle$ vermittelt:

$$|j, m\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m = m_1 + m_2}} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle\,\langle j_1, m_1; j_2, m_2|j, m\rangle.$$

Leiten Sie mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren $J_\pm = J_{1\pm} + J_{2\pm}$ folgende Rekursionsformeln für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten her:

$$\begin{aligned} &\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,\langle j_1, m_1; j_2, m_2|j, m-1\rangle \\ &\quad = \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)}\,\langle j_1, m_1+1; j_2, m_2|j, m\rangle \\ &\qquad + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)}\,\langle j_1, m_1; j_2, m_2+1|j, m\rangle. \end{aligned}$$