Übungen zur Theoretischen Physik 4 (Quantenmechanik) Blatt 1

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS13 —

Aufgabe 1.1 *Harmonischer Oszillator à la Bohr/Sommerfeld* (1 Punkt)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Quantisierungsbedingung

$$\oint \mathrm{d}q\, p \;=\; nh, \quad n = \text{ganzzahlig},$$

von Bohr und Sommerfeld die möglichen Energiewerte E_n eines harmonischen Oszillators mit der Lagrange-Funktion

$$L \;=\; \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Bahnkurven in der q-p-Ebene (Phasenraum) bei gegebener Energie E. $\oint \mathrm{d}q\, p$ ist per Definition die Fläche innerhalb dieser Bahnkurve.

Aufgabe 1.2 *Fourier-Transformation* (3 Punkte)

Sei $f(x)$ eine quadratintegrable (komplexe) Funktion von $x \in \mathbb{R}$. Diese hängt mit ihrer Fourier-Transformierten $\tilde{f}(k)$ wie folgt zusammen:

$$\tilde{f}(k) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x), \qquad f(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tilde{f}(k).$$

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(x) \;=\; \begin{cases} c & \text{für } |x| < a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Leiten Sie aus dem Ergebnis durch einen geeigneten Grenzübergang die Fourier-Transformierte der Delta-Funktion $\delta(x)$ her.

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \mathrm{e}^{-x/a} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $a > 0$. Leiten Sie aus dem Ergebnis durch einen geeigneten Grenzübergang die Fourier-Transformierte $\tilde{\theta}(k)$ der Theta-Funktion $\theta(x)$ her.

Hinweis: Die Subtilität bei $k = 0$ im Grenzübergang zur θ-Funktion wird in den Übungen diskutiert.

c) Zeigen Sie allgemein für zwei quadratintegrable Funktionen $f(x)$ und $g(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)^* \, g(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \tilde{f}(k)^* \, \tilde{g}(k).$$

Bitte wenden !

Aufgabe 1.3 *Freier Propagator und Gauß'sches Wellenpaket* (3 Punkte)

Zur Zeit $t = 0$ sei der Zustand eines eindimensionalen quantenmechanischen Systems durch die Wellenfunktion $\psi(x, t = 0)$ beschrieben. Zu einer beliebigen Zeit t entwickelt sich aus $\psi(x, 0)$ dann die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ gemäß

$$\psi(x,t) \; = \; \mathrm{i} \int \mathrm{d}x' \, G(x,t;x',0) \, \psi(x',0),$$

wobei $G(x, t; x', t')$ die sogenannte Green'sche Funktion (= "Propagator") der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung bezeichnet.

a) Die Spektraldarstellung des freien Wellenpaketes $\psi(x, t)$ (Teilchen mit Masse m) ist gegeben durch:

$$\psi(x,t) \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \, \tilde{\psi}(k) \, \exp\{\mathrm{i}(kx - \omega(k)t)\}, \qquad E(k) = \hbar\omega(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Zeigen Sie, dass die Green'sche Funktion für dessen Ausbreitung die folgende Form hat:

$$G_0(x,t;x',0) = -\sqrt{\frac{im}{2\pi\hbar t}} \exp\left\{ \frac{im(x-x')^2}{2\hbar t} \right\}$$

b) Ein Gauß'sches Wellenpaket ist charakterisiert durch die Anfangsbedingung

$$\psi(x,0) \; = \; (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{4\sigma^2} + ik_0 x \right\}.$$

Berechnen Sie die zugehörige Wellenfunktion $\psi(x, t)$ zu beliebigen Zeiten t.

c) Geben Sie sowohl den Mittelwert $\langle x \rangle$ als auch das mittlere Schwankungsquadrat $\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$ an, das sich mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x, t)|^2$ aus b) für beliebige Zeiten t ergibt.

<u>Hinweis:</u> $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-a(x+b)^2\} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi/a}$ für $a, b \in \mathbf{C}$ mit $\mathrm{Re}(a) > 0$.

Für die Herleitung dieses Ergebnisses (für *komplexe* Parameter a, b!) erwerben Sie einen Bonuspunkt.