Übungen zur Theoretischen Physik 3 (Elektrodynamik & SRT) — Blatt 13

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, WS 15/16 —

Alle Aufgaben auf diesem Blatt sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 13.1 *Relativistisches Punktteilchen im elektrischen Feld* (1,5 Bonuspunkte)

Ein relativistisches Teilchen mit Masse m und und Ladung q trete bei $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0 = v_0\boldsymbol{e}_1$ in ein homogenes elektrisches Feld $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_2$ ein.

a) Berechnen Sie die zeitliche Trajektorie $\boldsymbol{x}(t)$.

b) Berechnen Sie die Bahnkurve in der x_1-x_2-Ebene.

c) Verifizieren Sie den nicht-relativistischen Grenzfall im Limes $c \to \infty$.

Aufgabe 13.2 *Betatron* (1,5 Bonuspunkte)

In einem Betatron werden Elektronen (Masse m, Ladung $-e$) durch ein elektrisches Ringfeld $\boldsymbol{E}$ beschleunigt, das durch ein Magnetfeld $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ erzeugt wird, dessen Betrag zeitlich ansteigt, aber dessen Richtung sich mit der Zeit nicht ändert. Durch eine geschickte Wahl des Magnetfeldes können die Elektronen während des Beschleunigungsvorgangs auf einer festen Kreisbahn vom Radius R gehalten werden. Die Kreisbahn liege in der x_1-x_2-Ebene mit der x_3-Achse im Mittelpunkt. Das Magnetfeld sei zylindersymmetrisch um die x_3-Achse und in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) folgendermaßen geformt:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) \;=\; B_\rho(\rho, z, t)\boldsymbol{e}_\rho + B_z(\rho, z, t)\boldsymbol{e}_z, \qquad B_\rho(\rho, 0, t) \equiv 0,$$

d. h. in der x_1-x_2-Ebene verlaufen die Feldlinien exakt in x_3-Richtung.

a) Zeigen Sie, dass das induzierte elektrische Feld in der x_1-x_2-Ebene die Form $\boldsymbol{E} = E(\rho, t)\boldsymbol{e}_\phi$ annimmt, wobei

$$E(\rho, t) = -\frac{1}{2\pi\rho}\,\frac{\partial\Phi_B(\rho, t)}{\partial t}, \qquad \Phi_B(\rho, t) = 2\pi\int\limits_0^\rho d\rho'\,\rho'\,B_z(\rho', 0, t).$$

b) Stellen Sie die relativistische Bewegungsgleichung für ein Elektron in der x_1-x_2-Ebene auf.

c) Zeigen Sie, dass die Elektronen auf der geforderten Kreisbahn mit Radius R bleiben, falls die sogenannte „Wideröe-Bedingung" gilt:

$$\frac{\partial B_z(R, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi R^2}\,\frac{\partial\Phi_B(R, t)}{\partial t}.$$

Kann das Magnetfeld im Inneren der Kreisbahn räumlich homogen sein?

Bitte wenden!

Aufgabe 13.3 *Einfache Kugelwelle* (2 Bonuspunkte)

Betrachten Sie das folgende Vektorpotential, dessen Form ein einfaches Beispiel einer Kugelwelle darstellt,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{A_0 \sin\theta}{kr} \left(\sin(kr - \omega t) + \frac{\cos(kr - \omega t)}{kr} \right) \boldsymbol{e}_\phi, \tag{1}$$

wobei A_0, k, ω positive reelle Konstanten und (r, θ, ϕ) die üblichen Polarkoordinaten sind.

a) $\boldsymbol{A}$ soll die homogene Wellengleichung erfüllen. Leiten Sie aus dieser Bedingung eine Beziehung zwischen k und ω her. Wie ist das skalare Potential $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ zu wählen, damit die Lorenzsche Eichbedingung erfüllt ist?

b) Berechnen Sie die zugehörigen elektrischen und magnetischen Felder $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ und $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$.

c) Bestimmen Sie die abgestrahlte Leistung P des Systems, indem Sie den Energiefluss durch eine Kugelschale mit einem beliebig großen Radius R berechnen. Wie hängt P mit der zeitlich gemittelten Leistung $\bar{P}$ zusammen?

   Hinweis: Überlegen Sie sich vor der Integration, welche Beiträge zu P für $R \to \infty$ verschwinden und deshalb nicht berechnet werden müssen.

d) Welche Änderungen müssen in Gleichung (1) vorgenommen werden, um eine Zeitumkehr des Systems zu bewirken? Diskutieren Sie insbesondere die Zeitumkehr von $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ und P.