Übungen zur Theoretischen Physik 3 (Elektrodynamik & SRT) — Blatt 10

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, WS 15/16 —

Aufgabe 10.1 *Wechselstrom in Leiterband* (3 Punkte)

Ein sehr breites und dickes Leiterband (= Ohmscher Leiter mit Leitfähigkeit σ, relative Dielektrizität $\varepsilon_r > 1$, relative Permeabilität $\mu_r = 1$) sei idealisiert durch den metallischen Halbraum $x_3 > 0$ dargestellt und werde parallel zur Grenzfläche mit einem Wechselstrom durchflossen, der durch folgende Stromdichte beschrieben wird:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) \;=\; j(x_3)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \boldsymbol{e}_1 \;\text{ für } x_3 > 0,$$

wobei $\omega > 0$. Der andere Halbraum ($x_3 < 0$) besitze die elmg. Eigenschaften des Vakuums.

a) Leiten Sie für die Funktion $j(x_3)$ eine Differentialgleichung aus den Maxwell-Gleichungen und den relevanten Materialgleichungen her.

Lösung: $j''(x_3) = -(i\sigma\omega\mu_0 + \omega^2\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_0)j(x_3)$.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung für $j(x_3)$ mit dem Ansatz $j(x_3) = j_0 \mathrm{e}^{ikx_3}$ ($j_0 \in \mathbb{C}$) und der Bedingung, dass $j(x_3) \to 0$ für $x_3 \to \infty$, und skizzieren Sie $\mathrm{Re}\{j(x_3)\}$.

(Hinweis: Versuchen Sie nicht $\sqrt{a + ib}$ zu vereinfachen; verwenden Sie stattdessen $\sqrt{a + ib} = \kappa + i\lambda$, wobei κ und λ das selbe Vorzeichen haben, wenn $a, b > 0$.)

c) Entwickeln Sie die Lösung für die beiden Grenzfälle (i) eines sehr schlechten ($\sigma \to 0$) bzw. (ii) eines sehr guten ($\sigma \to \infty$) Leiters mit Hilfe des ersten σ-abhängigen Termes in geeigneten Entwicklungen in σ. Wie groß ist die „Eindringtiefe“ δ des Stromes in den Leiter, innerhalb der $j(x_3)$ auf den Bruchteil e^{-1} abfällt?

d) Normieren Sie die Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t)$ so, dass der Scheitelwert des Stromes durch einen Flächenstreifen A der Breite L senkrecht zu $\boldsymbol{e}_1$ ($0 \le x_2 \le L$, $0 \le x_3 < \infty$) I_0 beträgt. D. h.

$$I(t) = \int_A d\boldsymbol{A}\; \mathrm{Re}\{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\} = I_0 \cos(\omega t + \phi_0).$$

e) Berechnen Sie die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}$ für $x_3 > 0$ mit der Randbedingung $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{0}$ für $x_3 \to \infty$ aus der Maxwell-Gleichung $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}$. Bestimmen Sie den Scheitelwert von $\boldsymbol{B}$ und die Phasenverschiebung gegenüber der Stromdichte $\boldsymbol{j}$. Welche Werte nimmt die Phasenverschiebung in den beiden Grenzfällen aus c) an?

f) Welche Energie fließt pro Zeit und pro Fläche durch die Grenzfläche bei $x_3 = 0$? Berechnen Sie den zeitlichen Mittelwert des Energieflusses durch die Grenzfläche. Was können Sie an Hand der Phasenverschiebung aus e) über die Richtung des mittleren Energieflusses sagen?

Bitte wenden!

Aufgabe 10.2 *Anschlussbedingungen el. und mg. Felder an Grenzflächen* (1 Punkt)

Leiten Sie analog zum Vorgehen in der Elektrostatik und Magnetostatik (siehe Vorlesung) die Anschlussbedingungen für elektrische und magnetische Felder an Grenzflächen aus den Maxwell-Gleichungen her, wobei die Felder explizit von der Zeit abhängen können.

Aufgabe 10.3 *Lorentz-Kraft aus Hamiltonschen Bewegungsgleichungen* (1 Punkt)

Die Hamilton-Funktion für ein Teilchen der Ladung q in elektrischen und magnetischen Feldern lautet

$$H = \frac{(\boldsymbol{\Pi} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} + q\Phi,$$

wobei das Vektorpotential $\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x})$ und das skalare Potential $\Phi(t, \boldsymbol{x})$ mit dem elektrischen und magnetischen Feld durch $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla\Phi} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ und $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ zusammenhängen.

Leiten Sie die Bewegungsgleichung aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\Pi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\,, \qquad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \Pi_i}$$

her und zeigen Sie, dass diese zur Newtonschen Bewegungsgleichung für die Lorentz-Kraft äquivalent ist.