Übungen zur Theoretischen Physik 3 (Elektrodynamik & SRT) — Blatt 5

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, WS 15/16 —

Aufgabe 5.1 *Metallkugel im äußeren elektrischen Feld* (2 Punkte)

Eine geerdete Metallkugel von Radius R werde in ein Potential der Form $\Phi_0(r,\theta,\varphi) = 2r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi$ gebracht. Bestimmen Sie das sich ergebende Potential $\Phi(r,\theta,\varphi)$ im Außenraum der Kugel. Wie lautet das Ergebnis, wenn stattdessen das Potential $\Phi_0(r,\theta,\varphi) = 2r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi$ vorgegeben wird?

Hinweis: Entwickeln Sie das Potential in Kugelflächenfunktionen und verwenden Sie das Verhalten $\Phi(r,\theta,\varphi) \to \Phi_0(r,\theta,\varphi)$ für $r\to\infty$ als eine Randbedingung.

Aufgabe 5.2 *Zugeordnete Legendre-Funktionen* (1 Punkt)

Die zugeordneten Legendre-Funktionen $P_\ell^m(x)$ mit $\ell = 0,1,2,\ldots$ und $m = -\ell, -l+1,\ldots,\ell$ sind die beschränkten Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_\ell^m(x) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_\ell^m(x) = 0 \tag{1}$$

für $|x|\le 1$ und durch folgende Formel darstellbar:

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass Gl. (2) die Differentialgleichung (1) löst.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass

$$\hat{P}_\ell^m(x) = (-1)^m\, 2^\ell \ell!\,(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\, P_\ell^m(x) = \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell \tag{3}$$

die folgende Differentialgleichung löst,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{P}_\ell^m(x) - 2mx\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{P}_\ell^m(x) + [\ell(\ell+1) - m(m+1)]\,\hat{P}_\ell^m(x) = 0, \tag{4}$$

falls Gleichung (1)) erfüllt ist. Verifizieren Sie dann, dass Gl. (4) für $m=-\ell$ durch die Funktion $\hat{P}_\ell^{-\ell}(x) = (x^2-1)^\ell$ gelöst wird. Beweisen Sie dann Gl. (4) für die übrigen m-Werte durch Induktion $m \to m+1$.

Aufgabe 5.3 *Eigenschaften von Multipolmomenten* (1,5 Punkte)

Die *Gesamtladung* q, das *elektrische Dipolmoment* $\boldsymbol{p}$ und das *elektrische Quadrupolmoment* Q_{ij} einer Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{x})$ sind definiert als

$$q = \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{p} = \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}', \quad Q_{ij} = \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')\left(3\,x_i'x_j' - |\boldsymbol{x}'|^2\delta_{ij}\right). \tag{5}$$

Wie verhalten sich diese Multipolmomente unter Verschiebung des Koordinatenursprungs, $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$? Unter welchen Bedingungen sind sie unter dieser Verschiebung invariant?