**Übungen zur Theoretischen Physik 3 (Elektrodynamik & SRT) — Blatt 4**

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, WS 15/16 —

**Aufgabe 4.1** *Legendre-Polynome* (1,5 Punkte)

Die Legendre-Polynome $P_\ell(x)$ sind Lösungen der Legendreschen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_\ell(x) + \ell(\ell+1)P_\ell(x) = 0 \tag{1}$$

und durch die *Rodrigues-Formel* darstellbar:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell, \qquad \ell = 0,1,2,\dots\,. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass aus der Rodrigues-Formel (2) folgende Eigenschaften folgen:

$$P_\ell(1) = 1, \quad P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x). \tag{3}$$

b) Zeigen Sie, dass (2) die Differentialgleichung (1) löst.

*Anleitung:* Berechnen Sie zuerst $(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2-1)^\ell$ und wenden Sie auf die entstehende Gleichung den Operator $\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}$ an. Die $\ell$-fache Ableitung kann mit der Identität

$$\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(f\,g) = \sum_{n=0}^{\ell}\binom{\ell}{n}\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\,\frac{\mathrm{d}^{\ell-n} g}{\mathrm{d}x^{\ell-n}} \tag{4}$$

ausgewertet werden.

c) Zeigen Sie unter Verwendung von (2), dass die Legendre-Polynome folgende Orthogonalitätsrelation erfüllen:

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\, P_{\ell'}(x)P_\ell(x) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}. \tag{5}$$

*Hinweis:* nach partieller Integration sollten Sie im Fall $\ell = \ell'$ auf das Integral

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\,(1-x^2)^\ell = \frac{(\ell!)^2}{(2\ell)!}\frac{2^{2\ell+1}}{(2\ell+1)} \tag{6}$$

geführt werden.

**Aufgabe 4.2** *Rekursionsformeln für Legendre-Polynome* (1,5 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe der Rodrigues-Formel (2) die Identität

$$P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x) - (2\ell+1)P_\ell(x) = 0. \tag{7}$$

b) Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome folgende Rekursionsformel erfüllen:

$$(\ell+1)P_{\ell+1}(x) - x(2\ell+1)P_\ell(x) + \ell P_{\ell-1}(x) = 0. \tag{8}$$

*Hinweis:* Differenzieren Sie die „Erzeugende Funktion“ für Legendre-Polynome:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)t^\ell, \qquad |t| < 1, \tag{9}$$

nach $t$.

c) Leiten Sie unter Verwendung der Ergebnisse von a) und b) sowie der Legendreschen Differentialgleichung folgende Formel her:

$$(x^2-1)P'_\ell(x) = \ell\left[xP_\ell - P_{\ell-1}(x)\right]. \tag{10}$$

**Aufgabe 4.3** *Leitende Halbkugelschalen* (2 Punkte)

Zwei leitende hohle Halbkugeln vom Radius $R$ sind längs des Äquators durch einen infinitesimalen isolierenden Ring getrennt. Die untere Halbkugel sei geerdet, die obere befinde sich auf dem Potential $V_0$. Berechnen Sie das Potential für kleine Abstände $r$ vom Kugelmittelpunkt bis zur Ordnung $(r/R)^3$.

*Hinweis:* Legen Sie die Äquatorebene in die $x$-$y$-Ebene. Begründen Sie, warum sich das Potential innerhalb der Kugel in der Form

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^\ell A_\ell P_\ell(\cos\theta) \tag{11}$$

mit Konstanten $A_\ell$ schreiben lässt, wobei $\theta$ der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der $z$-Achse ist, und verwenden Sie die Orthogonalitätsrelationen der Legendre-Polynome.