

Theoretische Physik III - Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie

Vorlesungsmitschrift

Dozent: Prof. Stefan Dittmaier

Verfasser: Ralf Gugel

WS 11/12

Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

1. Elektrostatik	5
1.1 Ladung	5
1.2 Coulomb-Gesetz, elektrisches Feld, elektrisches Potential	8
1.3 Feldgleichungen der Elektrostatik	19
1.4 Poisson- und Laplace-Gleichungen	25
1.5 Green'sche Funktionen der Elektrostatik	27
1.6 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen	36
1.7 Randwertproblem mit Zylindersymmetrie (= Drehsymmetrie um feste Achse)	41
1.8 Randwertproblem in Kugelkoordinaten	48
1.8.1 Die zugeordneten Legendre-Funktionen als Lösung von Gl. (1.175)	49
1.9 Multipolentwicklung	53
1.10 Makroskopische Elektrostatik	59
1.11 Feldenergiedichte in Medien	65
2. Magnetostatik	66
2.1 Elektrischer Strom	66
2.2 Gesetze von Ampère und Biot-Savart	69
2.3 Feldgleichungen	71
2.4 Vektorpotential	74
2.5 Magnetisches Dipolmoment	77
2.6 Makroskopische Magnetostatik	82
3. Elektrodynamik - Grundlagen	89
3.1 Faraday'sches Induktionsgesetz	89
3.2 Maxwell'scher Verschiebungsstrom, Maxwell-Gleichungen	93
3.3 Elektromagnetische Potentiale	94
3.4 Teilchen im elektromagnetischen Feld	97
3.5 Energiesatz der E-Dynamik	99
3.6 Impulssatz der E -Dynamik	101

Inhaltsverzeichnis

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik	104
4.1 Grundpostulate	104
4.2 Lorentz-Transformation	105
4.3 Relativistische Dynamik	114
4.4 Kovariante Formulierung der Maxwell - Gleichungen	118
4.4.1 Maxwell-Gleichungen für Φ , \underline{A}	120
4.4.2 Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung	126
4.5 Lorentz-Kraft als 4er-Kraft	128
5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung	132
5.1 Wellengleichung und ebene Wellen	132
5.2 Ebene, monochromatische, elektromagnetische Wellen	139
5.3 Wellengleichung – Cauchy-Problem und Huygens-Prinzip	143
5.4 Green'sche Funktion der Wellengleichung	148
5.5 Abstrahlung elektromagnetischer Wellen	152

Organisatorisches

Dozent Prof. Stefan Dittmaier

Übungen Donnerstags und freitags, Eintragen in Listen!

Scheinerwerb Für die Zulassung zur Klausur, deren Bestehen Voraussetzung zum Scheinerwerb ist, werden 50% der möglichen Punkte benötigt. Die Lösungen zu den Aufgaben müssen nicht abgegeben werden, sondern zu Beginn der Übungen wird angekreuzt, wer welche Aufgabe lösen kann, entsprechend erfolgt die Punktevergabe.

Tutorium Zusätzliches Tutorium (Musterlösungen) am Freitag

Themen Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie

1. Elektrostatik

1.1 Ladung

Grundgröße der klassischen Mechanik: Länge, Zeit, Masse charakterisieren Zustand von Körpern

Grundgröße der Elektrodynamik: Ladung, weniger anschaulich, da nicht direkt durch Sinnesorgane wahrnehmbar.

Die Ladung q ist eine weitere Kenngröße von Körpern neben der Masse m .

Experimenteller Befund:

- Es gibt zwei Arten elektrischer Ladung: *positiv* und *negativ*.
- Ladungen kann fließen, d.h. Körper können ihre Ladung ändern.
- Ladungen verhalten sich additiv:

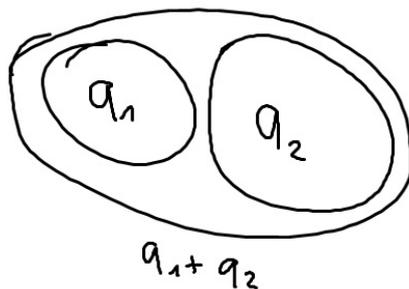


Abbildung 1.1: Körper aus zwei Teilkörpern mit Ladungen q_1 und q_2 , entsprechend ist die Gesamtladung des Körpers $q = q_1 + q_2$ (analog: $m = m_1 + m_2$).

1. Elektrostatik

- Ladungserhaltung: In einem abgeschlossenen System ist die Gesamtladung erhalten, d.h. die Summe aller Ladungen ist konstant
- Ladung ist *quantisiert*, d.h. alle makroskopisch auftretenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der *Elementarladung* e : $q = \pm N \cdot e$, $N \in \mathbb{N}_0$, $e = 1,602 \dots \cdot 10^{-19} \text{C}$.

Ladungsverteilung

System aus N Teilchen (Einzelladungen q_n):

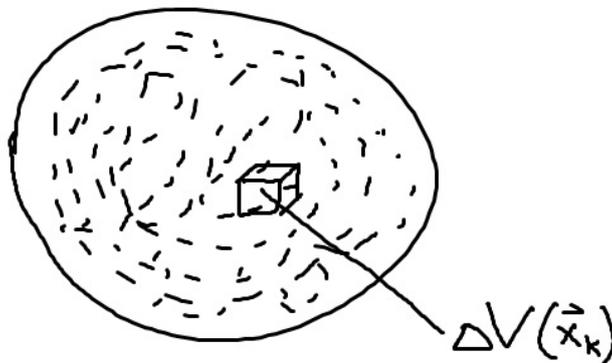


Abbildung 1.2: $\Delta V(\vec{x}_k)$ stellt ein kleines Volumen am Ort \vec{x}_k dar mit $\Delta q(\vec{x}_k) = \sum_{n \in \Delta V(\vec{x}_k)} q_n$

⇒ Ladungsdichte:

$$\rho(\vec{x}_k) = \left. \frac{\Delta q(\vec{x}_k)}{\Delta V(\vec{x}_k)} \right|_{\Delta V \rightarrow 0} \quad (1.1)$$

(Idealisierter Grenzübergang, d.h. ΔV geht nicht bis zu mikroskopischen Größen)

$$\begin{aligned} \Rightarrow q &= \sum_n q_n = \sum_k \Delta q(\vec{x}_k) = \sum_k \frac{\Delta q(\vec{x}_k)}{\Delta V(\vec{x}_k)} \cdot \Delta V(\vec{x}_k) \\ &\xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} \int_V d^3 \vec{x} \rho(\vec{x}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Frage:

Ladungsverteilung für eine Punktverteilung sinnvoll?

Mathematischer Exkurs: Dirac'sche Deltafunktion $\delta(x)$

Sei $f(x)$ eine in einer Umgebung von $x = a$ stetige Funktion, dann definiere:

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx f(x) \delta(x - a) := \begin{cases} f(a), & \alpha < a < \beta, \\ 0, & a < \alpha \vee \beta < a. \end{cases} \quad (1.3)$$

d.h.

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq a, \\ \infty & \text{für } x = a. \end{cases} \quad (1.4)$$

$\Rightarrow \delta(x)$ ist keine gewöhnliche Funktion, sondern eine *Distribution* (= *stetige Linearform*, d.h. eine lineare, stetige Abbildung von Funktionen nach \mathbb{R} bzw. \mathbb{C}).

Eigenschaften von $\delta(x)$

- $\int dx \delta(x) \dots$ ist als Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int dx \delta_n(x) \dots \quad (1.5)$$

realisierbar mit Funktionenfolgen $\delta_n(x)$, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

wobei

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \delta_n(x) = 1, \quad \alpha < 0 < \beta \quad (1.7)$$

z.B.:

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + x^2}.$$

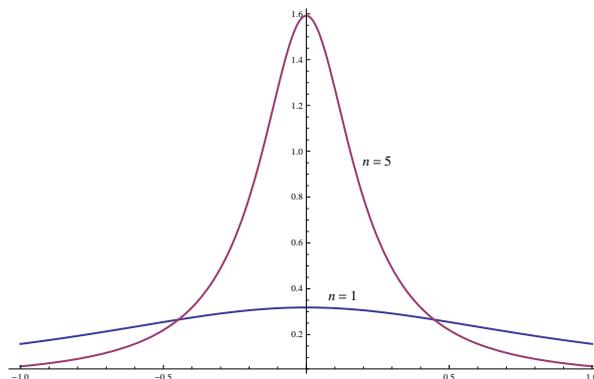


Abbildung 1.3: Beispiele für $\delta_n(x)$, hier für $n = 1$ und $n = 5$.

1. Elektrostatik

- Mehrdimensionale Erweiterung:

$$\delta(\vec{x} - \vec{a}) := \prod_{i=1}^3 \delta(x_i - a_i), \quad \text{wobei } \vec{x} = \sum_{n=1}^3 x_n \vec{e}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

für Koordinaten x_n bezüglich eines Orthonormalsystems $\{\vec{e}_n\}$.

$$\Rightarrow \int_V d^3 \vec{x} f(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{a}) = \begin{cases} f(\vec{a}), & \text{falls } \vec{a} \in V \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.9)$$

- Ableitungen von $\delta(x)$ sind definiert über partielle Integration:

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \underbrace{f(x) \delta'(x-a)}_{=(f\delta)' - f'\delta} = \underbrace{f(x) \delta(x-a)}_{=0, \alpha < a < \beta} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} dx f'(x) \delta(x-a) = -f'(a) \quad (1.10)$$

- Implizite δ -Funktion :

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}, \quad (1.11)$$

wobei x_n alle einfachen(!) Nullstellen von $f(x)$ mit $x_n \in (\alpha, \beta)$ sind, $f(x_n) = 0$.

- Stammfunktion von $\delta(x) = \text{Heavyside-Funktion } \theta(x)$:

$$\theta(x) := \int_{-\infty}^x dx' \delta(x') = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

bzw. $\theta'(x) = \delta(x)$.

Anwendung: Ladungsdichte einer diskreten Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{n=1}^N q_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_n), \quad (1.13)$$

$q_n = \text{Punktladung am Ort } \vec{x}_n$.

1.2 Coulomb-Gesetz, elektrisches Feld, elektrisches Potential

Coulomb-Gesetz:

= empirisches Gesetz für Kraft zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q_1 q_2 \cdot \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2} \cdot \vec{e}_{12} \quad (1.14)$$

1. Elektrostatik

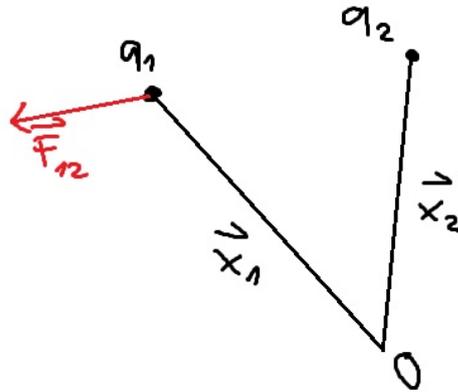


Abbildung 1.4: \vec{F}_{12} bezeichnet die Kraft, welche von q_2 auf q_1 ausgeübt wird. Der erste Term $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ mit $\epsilon_0 = 8,8543 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ (Dielektrizitätskonstante des Vakuums) ist ein Einheitenfaktor im SI-System. $q_1 \cdot q_2$ drückt eine Proportionalität zu den Ladungen aus, $1/|\Delta\vec{x}|^2 = 1/r^2$, wie beim Newton'schen Gravitationsgesetz, \vec{e}_{12} : Kraft wirkt entlang der Verbindungslinie. $q_1q_2 > 0$: Abstoßung, $q_1q_2 < 0$: Anziehung.

Superpositionsprinzip:

Die Einzelkräfte \vec{F}_n durch N Punktladungen q_n bei \vec{x}_n auf eine Ladung q bei \vec{x} addieren sich vektoriell:

$$\vec{F} = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n = q \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^N \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}_n}{|\vec{x} - \vec{x}_n|^3}}_{:=\vec{E}(\vec{x})}, \quad (1.15)$$

dabei bezeichnet man $\vec{E}(\vec{x})$ als *elektrische Feldstärke*, die von den Ladungen q_n am Ort \vec{x} erzeugt wird = Kraft pro Ladung, die bei \vec{x} auf die Ladung q wirken würde.

Elektrisches Feld

- Veranschaulichung durch Feldlinien: $\vec{E}(\vec{x}) =$ Tangentenvektor an Feldlinien, Dichte der Feldlinien ist Maß für $|\vec{E}(\vec{x})|$
 → Feldlinien schneiden sich nie!

1. Elektrostatik

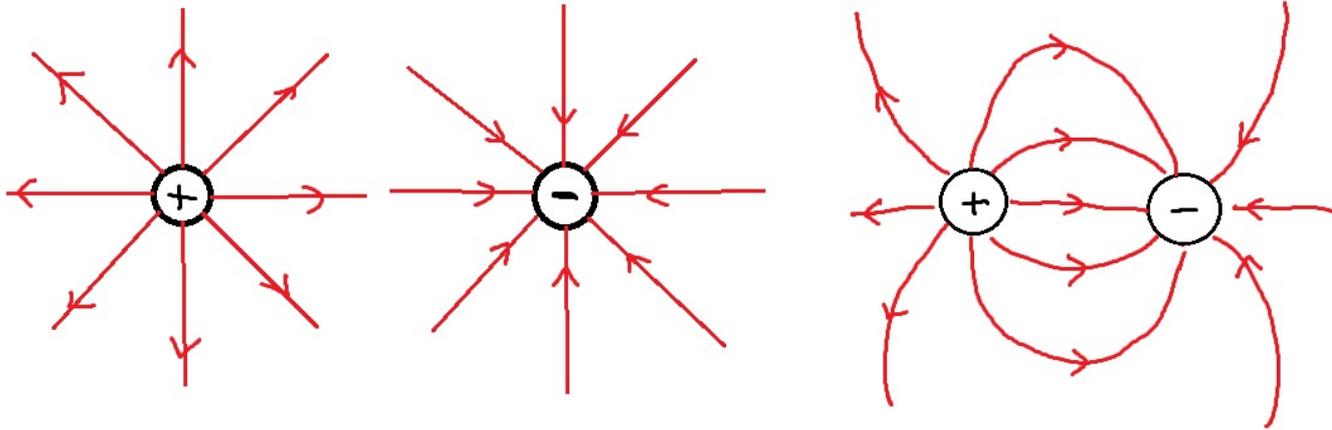


Abbildung 1.5: Feldlinien einer positiven, einer negativen und Superposition einer positiven und einer negativen Punktladung.

Elektrisches Feld kontinuierlicher Ladungsverteilungen

Gegeben sei eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$ in einem Volumen V . Dann ist $\vec{E}(\vec{x})$ gegeben durch:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \underbrace{\int_V d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}')}_{\doteq \sum_k \rho(\vec{x}_k) \Delta V(\vec{x}_k) = \sum_k q_k} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (1.16)$$

Gesamtladung:

$$q = \int_V d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}') \quad (1.17)$$

Beispiele:

1. Fernfeld einer begrenzten Ladungsverteilung: Sei $|\vec{x} - \vec{x}'| \gg a = \text{max. Längenausdehnung in } V$.

$$\Rightarrow |\vec{x} - \vec{x}'| = |\vec{x}| + \mathcal{O}(|\vec{x}'|^0) \quad \text{für } |\vec{x}| \gg a > |\vec{x}'|. \quad (1.18)$$

Bemerkung:

$f(x) = \mathcal{O}((x - x_0)^k)$ heißt, dass

$$\left| \frac{f(x)}{(x - x_0)^k} \right| < \text{const. für } x \rightarrow x_0. \quad (1.19)$$

1. Elektrostatik

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}')}_{=q} \left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \mathcal{O}(|\vec{x}|^{-3}) \right) \text{ für } |\vec{x}| \rightarrow \infty \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r = |\vec{x}|, \quad \vec{x} = r\vec{e}_r, \end{aligned} \quad (1.20)$$

wobei $\mathcal{O}(1/r^3)$ Abweichungen vom $1/r^2$ -Gesetz für nicht-spärische Ladungsverteilungen berücksichtigt.

2. Fernfeld eines Dipols:

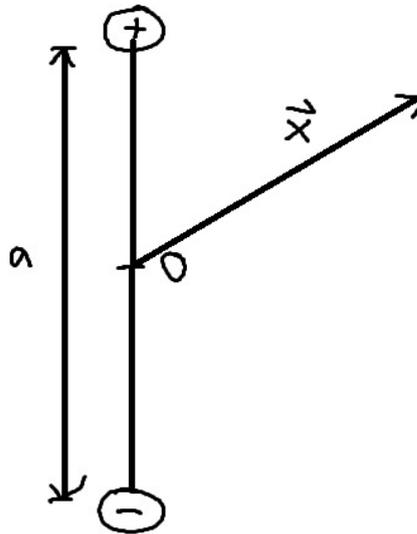


Abbildung 1.6: Illustration eines elektrischen Dipols

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{x} - \frac{\vec{a}}{2}}{|\vec{x} - \frac{\vec{a}}{2}|^3} - \frac{\vec{x} + \frac{\vec{a}}{2}}{|\vec{x} + \frac{\vec{a}}{2}|^3} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} r^{-3} \left(\frac{-\vec{a}}{2} \cdot 2 + \frac{3(\vec{x}\vec{a})}{r^2} \cdot \vec{x} \cdot 2 + \mathcal{O}(1/r) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} r^{-3} \left(-\vec{p} + 3 \frac{(\vec{x}\vec{p})}{r^2} \vec{x} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right), \end{aligned} \quad (1.21)$$

1. Elektrostatik

mit $\vec{p} := q\vec{a} = \text{el. Dipolmoment}$ und wobei

$$\begin{aligned} \left| \vec{x} \pm \frac{\vec{a}}{2} \right|^{-3} &= \left(r^2 + \frac{a^2}{4} \pm \vec{x}\vec{a} \right)^{-3/2} = r^{-3} \left(1 + \frac{a^2}{4r^2} \pm \frac{\vec{x}\vec{a}}{r^2} \right)^{-3/2} \\ &= r^{-3} \left(1 \mp \frac{3\vec{x}\vec{a}}{2r^2} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

mathematische Wiederholung/Exkursion: Elemente der Vektoranalysis

Es sei $f(\vec{x})$ eine einfache Funktion (= Skalarfeld) und $\vec{F}(\vec{x})$ eine vektorwertige Funktion (= Vektorfeld). Zudem bezeichnet $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ die partielle Ableitung nach x_i und

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \text{ den sog. Nabla-Operator.}$$

- Gradient, Divergenz, Rotation:

$$\text{grad} f(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} \text{ in kart. Koordinaten} \quad (1.23)$$

$$\text{div} \vec{F}(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} \vec{F}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^3 \partial_i F_i \text{ in kart. Koordinaten} \quad (1.24)$$

$$\text{rot} \vec{F}(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} \text{ in kart. Koordinaten} \quad (1.25)$$

$\vec{\nabla}$ -Kalkül: Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ ist vektorwertig (\rightarrow Regeln der Vektorrechnung) und ein Differentialoperator (\rightarrow Produktregel beim Differenzieren).

Beispiele:

Es bezeichnet $\vec{\nabla}(f \cdot g)$, dass $\vec{\nabla}$ nur auf f wirkt.

$$\vec{\nabla}(f \cdot g) = \vec{\nabla}(f \cdot g) \vec{\nabla}(f \cdot g) = g(\vec{\nabla} f) + f(\vec{\nabla} g) \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(f \cdot \vec{G}) &= \vec{\nabla}(f \vec{G}) + \vec{\nabla}(f \vec{G}) \\ &= (\vec{\nabla} f) \vec{G} + f(\vec{\nabla} \vec{G}) \\ &= \sum_i [G_i(\partial_i f) + f(\partial_i G_i)] \end{aligned} \quad (1.27)$$

1. Elektrostatik

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{=\vec{0}} f = \vec{0}, \quad \text{d.h. rot grad} = 0, \quad (1.28)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{=\vec{0}} \cdot \vec{F} = 0, \quad \text{d.h. div rot} = 0. \quad (1.29)$$

- Laplace-Operator:

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \sum_{k=1}^3 \partial_k^2 \quad (1.30)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F} \quad (1.31)$$

- Berechnung von Kurvenintegralen: Es sei $\vec{x}(t)$ eine Parametrisierung des Weges $C(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, d.h. $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1$ und $\vec{x}(t_2) = \vec{x}_2$. Weiter sei $\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}(t)$ der Tangentenvektor an die Kurve. Hiermit ist

$$\int_{C(\vec{x}_1, \vec{x}_2)} d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\vec{x}}{dt} \vec{E}(\vec{x}(t)). \quad (1.32)$$

Bogenlänge: infinitesimal $ds^2 = \sum dx_i^2 = |\dot{\vec{x}}|^2 \cdot dt^2$

$$\Rightarrow s_{21} = \int_{t_1}^{t_2} dt |\dot{\vec{x}}| = \int_{C(\vec{x}_1, \vec{x}_2)} d\vec{x} \cdot \vec{t}_C \quad (1.33)$$

s_{21} ist unabhängig von der Parametrisierung! \vec{t}_C bezeichnet den normierten Tangentenvektor an C .

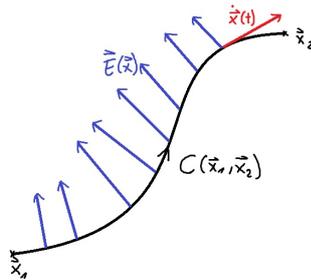


Abbildung 1.7: Illustration zur Berechnung von Kurvenintegralen

- Berechnung von Flächenintegralen: Parametrisierung der Fläche durch 2 Parameter u, v

$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{x}(u, v) \quad (1.34)$$

1. Elektrostatik

Tangentenvektoren an Koordinatenlinien: $\vec{x}_u := \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right|_{v=\text{const.}}$, $\vec{x}_v := \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right|_{u=\text{const.}}$.

Orientiertes Flächenelement:

$$d\vec{A} = (\vec{x}_u du) \times (\vec{x}_v dv) = \vec{x}_u \times \vec{x}_v dudv \quad (1.35)$$

Flächenmaß: $dA = |d\vec{A}| = |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| dudv$

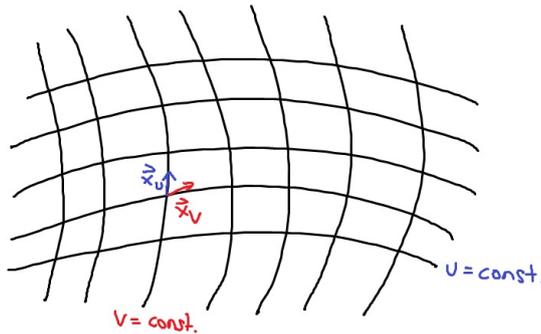


Abbildung 1.8: Tangentenvektoren \vec{x}_u (blau) und \vec{x}_v (rot) und die Linien des Koordinatennetzes einer Fläche A

⇒ Flussintegral:

$$\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E} = \iint_A dudv (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) \cdot \vec{E}(\vec{x}(u, v)) \quad (1.36)$$

Oberfläche:

$$A = \int_A dA = \int dudv |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \int_A d\vec{A} \cdot \vec{n}_A \quad (1.37)$$

A ist unabhängig von der Parametrisierung! \vec{n}_A bezeichnet den normierten Normalenvektor auf A .

Beispiel: Kugeloberfläche

$$\vec{x} = R \begin{pmatrix} \cos v \sin u \\ \sin v \sin u \\ \cos u \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v < 2\pi, \quad (1.38)$$

1. Elektrostatik

$$\vec{x}_u = R \begin{pmatrix} \cos v \cos u \\ \sin v \cos u \\ -\sin u \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v = R \sin u \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = R^2 \sin u \begin{pmatrix} \cos v \sin u \\ \sin v \sin u \\ \cos v \end{pmatrix}, \quad |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = R^2 \sin u. \quad (1.40)$$

$$\Rightarrow A = \int_0^\pi du \int_0^{2\pi} dv |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \int_0^\pi du \int_0^{2\pi} dv R^2 \sin u = 2\pi R^2 \int_{-1}^1 d \cos u = 4\pi R^2. \quad (1.41)$$

- Stoke'scher Integralsatz

$$\oint_{C(A)} \vec{F} d\vec{x} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\vec{A}, \quad \text{falls } \vec{F} \text{ auf } A \text{ regulär ist, d.h. hinreichend oft diff.bar} \quad (1.42)$$

wobei $\oint_{C(A)} d\vec{x}$ das geschlossene Wegintegral bezeichnet, der Weg $C(A)$ umrandet dabei die Fläche A . Der Normalenvektor \vec{n} auf A und $C(A)$ bilden eine Rechtsschraube!

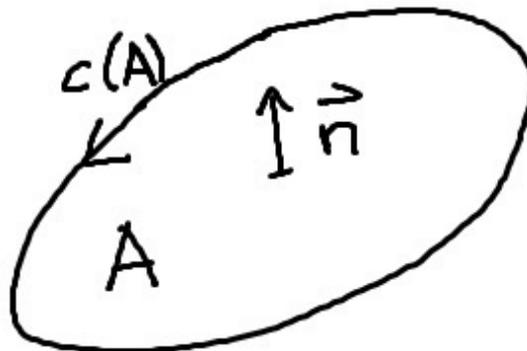


Abbildung 1.9: Zum Stoke'schen Satz

1. Elektrostatik

- Gauß'scher Integralsatz:

$$\oint_{A(V)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV \quad \text{falls } \vec{F} \text{ in } V \text{ regulär ist.} \quad (1.43)$$

Die linke Seite bezeichnet man als Oberflächenintegral („Fluss“) durch die Fläche $A(V)$, die das Volumen V umschließt. Die Flächennormale $\vec{n} \parallel d\vec{A}$ weist dabei nach außen!

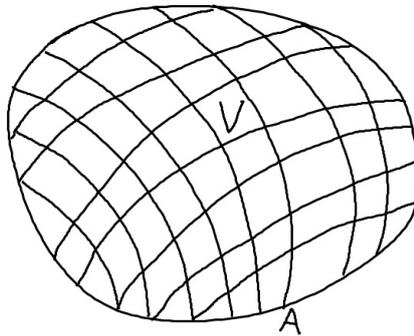


Abbildung 1.10: Illustration eines Volumens V welches von der Fläche A umschlossen wird.

Elektrisches Potential

Es gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (1.44)$$

Beweis:

- Punktladung impliziert Zentralkraft auf Testladung q , d.h.

$$\vec{F} = q\vec{E} = f(r) \cdot \vec{e}_r, \quad (1.45)$$

so dass $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

Allgemeines \vec{E} = Superposition von \vec{E} -Feldern von Punktladungen. $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

1. Elektrostatik

- Alternativ durch explizites Ausrechnen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times \int_V d^3 \vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= \int_V d^3 \vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \vec{\nabla} \times \left(\underbrace{\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}_{=f \cdot \vec{G}} \right)\end{aligned}\quad (1.46)$$

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{G}) = (\vec{\nabla}f) \times \vec{G} + f(\vec{\nabla} \times \vec{G}),$$

$$\vec{G} = \vec{x} - \vec{x}', \quad \vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{0}$$

$$f = |\vec{x} - \vec{x}'|^{-3}, \quad \vec{\nabla}f = -3 \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad \text{q.e.d.}$$

Folgerung aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$:

Die elektrische Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ auf eine Testladung q bei \vec{x} im Feld $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x})$ ist konservativ, d.h. \vec{E} ist aus einem skalaren Potential $V(\vec{x})$ ableitbar:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}V(\vec{x}), \quad V = \text{potentielle elektrische Energie} \quad (1.47)$$

d.h.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}), \quad \phi = \text{el. Potential } (V = q\phi) \quad (1.48)$$

Berechnung von $\phi(\vec{x})$:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x}_0) &= - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \\ &= - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{r} \cdot \int_V d^3 \vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{x}'}{|\vec{r} - \vec{x}'|^3} \\ &= - \int_V d^3 \vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{r} \frac{\vec{r} - \vec{x}'}{|\vec{r} - \vec{x}'|^3}\end{aligned}\quad (1.49)$$

Kurvenintegral ist wegunabhängig ($\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ und Stoke'scher Satz).

1. Elektrostatik

Wähle speziellen Integrationsweg: $\vec{r}(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0)$, $0 \leq t \leq 1$, $d\vec{r} = (\vec{x} - \vec{x}_0)dt$:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x}_0) &= - \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^1 dt \frac{(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}' + t(\vec{x} - \vec{x}_0))}{\left[(\vec{x}_0 - \vec{x}' + t(\vec{x} - \vec{x}_0))^2\right]^{3/2}}}_{= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \left(\frac{-1}{\left[(\vec{x}_0 - \vec{x}' + t(\vec{x} - \vec{x}_0))^2\right]^{1/2}} \right)} \\ &= - \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}_0 - \vec{x}'|} \right) \end{aligned} \quad (1.50)$$

d.h.:

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + const. \quad (1.51)$$

Bemerkungen:

- Potentiale $\phi_1(\vec{x})$, $\phi_2(\vec{x})$ sind äquivalent, falls $\phi_1(\vec{x}) - \phi_2(\vec{x}) = const.$ ist, da ϕ_1 und ϕ_2 dann dasselbe \vec{E} -Feld erzeugen.
- Äquipotentialfläche = Fläche in \vec{x} mit $\phi(\vec{x}) = const.$
Sei $\delta\vec{x}$ eine Variation innerhalb der Äquipotentialfläche:

$$0 = \phi(\vec{x} + \delta\vec{x}) - \phi(\vec{x}) = \delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) + \mathcal{O}(\delta\vec{x}^2) = -\delta\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}), \quad (1.52)$$

d.h. $\vec{E}(\vec{x}) \perp$ Äquipotentialfläche.

- In Leitern gilt stets $\phi(\vec{x}) = const.$, d.h. $\vec{E}(\vec{x}) \equiv \vec{0}$, sonst Ladungsbewegung bis $\phi(\vec{x}) = const.$ → Influenzladungen auf Leiteroberflächen schirmen Leiterinneres elektrisch ab (*Faraday-Käfig*). Leiteroberflächen = Äquipotentialflächen.
- Bedeutung von $\phi(\vec{x})$: Sei $-\vec{F}(\vec{x})$ die Kraft, die auf eine Ladung q ausgeübt wird. Dann ist die Arbeit, die an q auf dem Weg von \vec{x}_1 nach \vec{x}_2 geleistet wird

$$W_{21} = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{F} = -q \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{E} = q \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\phi = q (\phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1)). \quad (1.53)$$

$\phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1)$ ist die Potentialdifferenz zwischen \vec{x}_2 und \vec{x}_1 , sie entspricht der Arbeit, die an der Ladung q pro Ladung q verrichtet wird.

1.3 Feldgleichungen der Elektrostatik

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (1.54)$$

Berechnungsvorschrift von $\vec{E}(\vec{x})$ bei vorgegebenem $\rho(\vec{x}')$

Aber: $\vec{E}(\vec{x})$ muss oft aus Randbedingungen (RB) berechnet werden, die ein noch nicht bekanntes $\rho(\vec{x})$ bedingen, z.B.:

Konfiguration von Leiterflächen mit vorgegebenem ϕ .

⇒ Satz von Differentiagleichungen wünschenswert, die $\vec{E}(\vec{x})$ bzw. $\phi(\vec{x})$ als Lösungen zu gegebenen RB liefern.

Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik:

1. Betrachte Punktladung q im Ursprung, die von einer Fläche A komplett umschlossen wird:

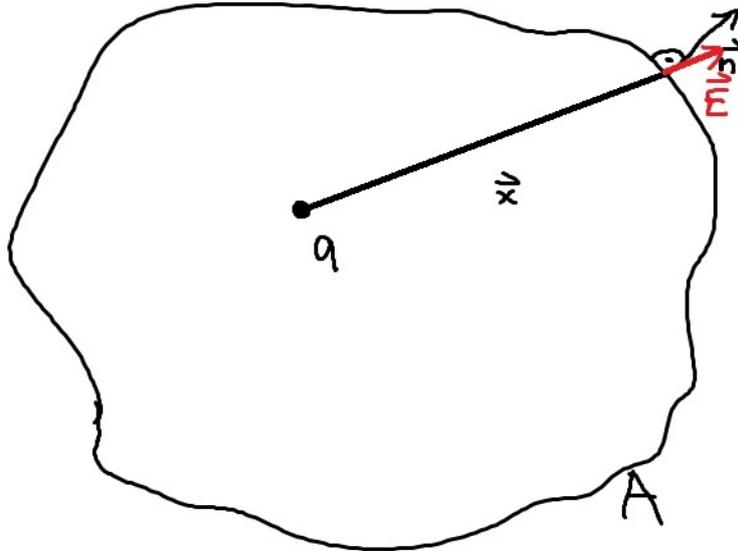


Abbildung 1.11: Die Fläche A umschließt die Punktladung q .

1. Elektrostatik

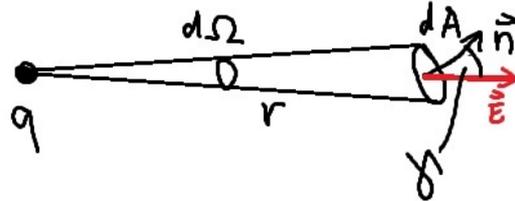


Abbildung 1.12: Flächennormale \vec{n} und \vec{E} schließen den Winkel γ ein.

$$r^2 d\Omega = dA \cos \gamma, \quad \gamma = \angle(\vec{n}, \vec{e}_r), \quad \cos(\gamma) = \vec{n} \cdot \vec{e}_r \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}(\vec{x}) d\vec{A} &= \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n} dA \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}}{r^2} dA \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\Rightarrow \oint_A d\vec{A} \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.57)$$

2. Triviale Verallgemeinerung auf allgemeine Ladungsverteilung durch Superposition aller q_n bzw. $\rho(\vec{x}_n) \Delta V_n$:

$$\oint_A d\vec{A} \vec{E} = \frac{q_A}{\epsilon_0} \quad q_A = \text{von } A \text{ umschlossene Ladung.} \quad (1.58)$$

3. Anwendung der Gauß'schen Integralsatzes liefert differentielle Form:

$$\oint_A \vec{E} \vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d^3\vec{x}, \quad \frac{q_A}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} d^3\vec{x} \quad (1.59)$$

1. Elektrostatik

(V : von A umschlossenes Volumen)

Da V beliebig war, folgt:

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}. \quad (1.60)$$

Feldgleichungen der E-Statik:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{E} &= \rho(\vec{x})/\epsilon_0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Die beiden partiellen Differentialgleichungen bestimmen nach Vorgabe von $\rho(\vec{x})$ und geeigneten RB das Feld $\vec{E}(\vec{x})$ eindeutig! (Beweis später, siehe Magnetostatik!)

Nebenprodukt:

$$\vec{\nabla} \vec{E} \stackrel{\text{Coulomb-}}{\equiv} \text{gesetz} - \vec{\nabla}^2 \int_V d^3 \vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \stackrel{\text{Gauß'sches}}{\equiv} \text{Gesetz} \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}. \quad (1.62)$$

Da $\rho(\vec{x})$ beliebig ist, gilt folgende Identität:

$$-\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (1.63)$$

Verhalten von E -Feldern an Grenzflächen:

a) Normalkomponente:

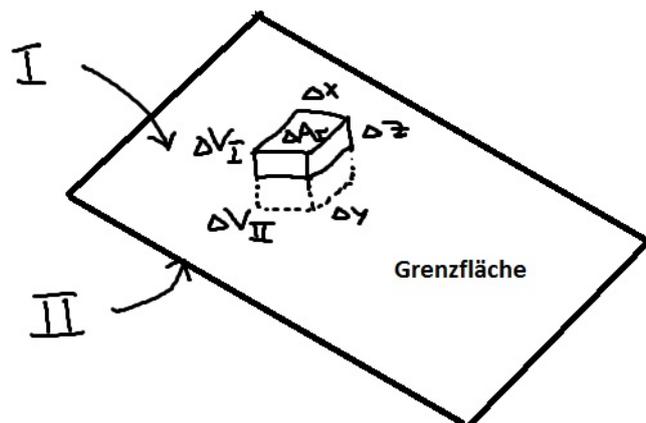


Abbildung 1.13: Infinitesimales Volumenelement an der Grenzfläche.

1. Elektrostatik

$$\begin{aligned}\vec{E}_I &= \text{const.} + \mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta y) + \mathcal{O}(\Delta z) \text{ in } \Delta V_I, \\ \vec{E}_{II} &= \text{const.} + \mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta y) + \mathcal{O}(\Delta z) \text{ in } \Delta V_{II}.\end{aligned}\tag{1.64}$$

$$\begin{aligned}\oint_{A(\Delta V_I \cup \Delta V_{II})} \vec{E} \, d\vec{A} &= \vec{E}_I \cdot \vec{n}_I \cdot \Delta x \Delta y + \vec{E}_{II} \cdot \vec{n}_{II} \cdot \Delta x \Delta y \\ &= (\vec{E}_I - \vec{E}_{II}) \cdot \vec{n}_I \Delta x \Delta y, \quad \vec{n}_I = -\vec{n}_{II}.\end{aligned}\tag{1.65}$$

Die Anteile der Flächen \perp zur Grenzfläche kompensieren sich!

$$\oint d\vec{A} \cdot \vec{E} = \int_{\Delta V_I \cup \Delta V_{II}} d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}') / \epsilon_0 = \rho(\vec{x}) \cdot \Delta V / \epsilon_0 = \sigma \cdot \Delta x \Delta y / \epsilon_0, \quad (\Delta z \rightarrow 0),\tag{1.66}$$

wobei $\Delta V = 2\Delta x \Delta y \Delta z$ und σ die Flächenladungsdichte bezeichnet.

$$\Rightarrow (\vec{E}_I - \vec{E}_{II}) \cdot \vec{n}_I = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\tag{1.67}$$

d.h. \vec{E}_\perp ist unstetig bei Grenzflächen.

b) Tangentialkomponente:

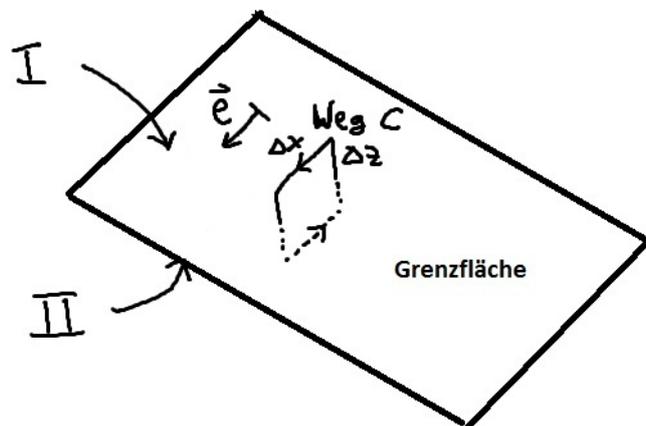


Abbildung 1.14: Infinitesimaler, geschlossener Weg an Grenzfläche, $\vec{e}_\perp \perp \vec{n}$.

1. Elektrostatik

$$\begin{aligned}
 0 &= \oint_C \vec{E} \, d\vec{x} = \vec{E}_I \Delta x \vec{e} + \vec{E}_{II} \cdot \Delta x (-\vec{e}) + \mathcal{O}(\dots) \\
 &= (\vec{E}_I - \vec{E}_{II}) \vec{e} \cdot \Delta x. \text{ Anteile } \perp \text{ Grenzfläche kompensieren sich.} \\
 \Rightarrow (\vec{E}_I - \vec{E}_{II}) \vec{e} &= 0 \quad \forall \vec{e} \perp \vec{n}.
 \end{aligned}$$

(1.68)

d.h. $\vec{E}_I^{\parallel} = \vec{E}_{II}^{\parallel}$, die Tangentialkomponente ist stetig!

Folgerungen:

- Leiteroberflächen: innerhalb eines Leiters gilt $\vec{E} = \vec{0}$.
 \Rightarrow Flächenladungsdichte: $\sigma = E_{\perp} \epsilon_0$ auf der Oberfläche (Die Normale zeigt vom Leiter in den felderfüllten Raum.)
- Falls $\rho(\vec{x})$ und $\sigma(\vec{x})$ endlich sind, bleibt \vec{E} endlich (aber nicht notwendigerweise stetig!).
 $\phi = - \int d\vec{x} \vec{E}$ bleibt stetig.
- Verhalten bei Dipolschichten: $\sigma(\vec{x})$ ist unbeschränkt!

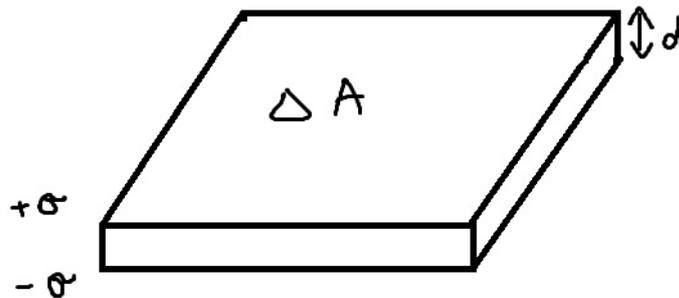


Abbildung 1.15: $\mathcal{D} \cdot \Delta A =$ Dipolstärke der Fläche A , mit Dipolflächendichte \mathcal{D} .

1. Elektrostatik

$$\phi_+ - \phi_- = \int_{-d/2}^{d/2} dx E_{\perp} = d \cdot E_{\perp} + \dots = \underbrace{d \cdot \sigma}_{=\mathcal{D} \text{ für } d \rightarrow 0} / \epsilon_0 \quad (1.69)$$

d.h. ϕ hat endlichen Sprung: $\phi_+ - \phi_- = \mathcal{D}/\epsilon_0$ und $E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$ divergiert!

Elektrostatische Feldenergie

Energie eines Systems von Ladungen = Arbeit, die nötig ist, um die Ladungen aus ∞ kommend zusammenzuführen.

System aus diskreten Ladungen:

$$\begin{aligned} W' &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^N \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \right)}_{= \text{Arbeit, um } q_i \text{ zu } \{q_j\}_{j=1}^{i-1} \text{ hinzuzufügen.}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x} \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (1.71)$$

als analogon zu W' .

Test: $W = W'$ für $\rho(\vec{x}) = \sum_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$?

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \\ &= W' + \text{Terme mit } i = j \text{ (Selbstenergieterme)}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Selbstenergie einer Punktladung = Energie um q_i in \vec{x}_i zu vereinigen \rightarrow nicht wohldefiniert (= theoretisches Problem der klassischen E-Dynamik, ist jedoch in der Praxis kaum relevant.)

1. Elektrostatik

W als el. Feldenergie:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_V d^3\vec{x} \rho(\vec{x})\phi(\vec{x}), \quad \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \\
 & \text{V kann durch vollen Raum ersetzt werden } (\rho \equiv 0 \text{ außerhalb von } V): \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{x} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \phi(\vec{x})}_{\substack{= \vec{\nabla}(\vec{E}\phi) - \vec{E}\vec{\nabla}\phi \\ \rightarrow 0 \text{ im } \int}} \quad (1.73) \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{x} \vec{E} \cdot (-\vec{\nabla}\phi), \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{x} \vec{E}^2,
 \end{aligned}$$

d.h. $w_{\text{el}} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 =$ Energiedichte des elektrostatischen Feldes.

1.4 Poisson- und Laplace-Gleichungen

Äquivalenz:

$$\left. \begin{array}{l} \text{El. Feldgleichungen} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Poisson-Gleichung: } \Delta\phi = -\rho/\epsilon_0 \text{ wobei } \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \\ \text{bzw. Laplace-Gleichung: } \Delta\phi = 0 \text{ falls } \rho = 0 \end{array} \right.$$

Typisches Problem der E-Statik:

Suche $\phi(\vec{x})$ zu vorgegebenem $\phi(\vec{x})$ (Dirichlet'sche RB) bzw. $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi = -E_{\perp}$ (Neumann'sche RB) auf den Randflächen!

→ Frage nach Existenz, Eindeutigkeit und Berechnungsverfahren für $\phi(\vec{x})$, wobei

- Leiteroberflächen: $\phi(\vec{x}) = \text{const.}$
- geladene Flächen: $\frac{\partial\phi_a}{\partial n} - \frac{\partial\phi_i}{\partial n} = -\sigma/\epsilon_0$ ($a/i =$ außen/innen)
- Dipolschichten: $\phi_a - \phi_i = \pm\mathcal{D}/\epsilon_0$

Green'sche Theoreme

$$1. \quad \int_V (\phi\Delta\psi) + (\vec{\nabla}\phi) \cdot (\vec{\nabla}\psi) d^3\vec{x} = \oint_{A(V)} \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} dA = \oint_{A(V)} \phi(\vec{\nabla}\psi) \cdot d\vec{A}, \quad (1.74)$$

1. Elektrostatik

$$2. \quad \int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^3 \vec{x} = \oint_{A(V)} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dA, \quad (1.75)$$

wobei ϕ, ψ beliebig glatte Funktionen sind.

Beweis:

1. Integriere $\vec{\nabla}(\phi \Delta \psi)$ auf 2 Arten:

$$\begin{aligned} \int_V d^3 \vec{x} \vec{\nabla}(\phi \Delta \psi) &\stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \oint_{A(V)} d\vec{A} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi) \\ &= \int_V d^3 \vec{x} \left((\vec{\nabla} \phi)(\vec{\nabla} \psi) + \phi(\vec{\nabla}^2 \psi) \right). \end{aligned} \quad (1.76)$$

2. Bilde Differenz von 1 und $(1|_{\phi \leftrightarrow \psi})$. \square

Frage nach Eindeutigkeit von L\u00f6sungen

Seien ϕ_1 und ϕ_2 L\u00f6sungen von $\Delta \phi = -\rho/\epsilon_0$

\rightarrow F\u00fcr welche RB folgt $\phi_1 \equiv \phi_2$, d.h. $U = \phi_1 - \phi_2 \equiv 0$?

Einsetzen von $\phi = \psi = U$ in 1. Green'sches Theorem:

$$\int_V d^3 \vec{x} (\vec{\nabla} U)^2 = \oint_{A(V)} U \frac{\partial U}{\partial n} dA, \quad \text{da } \Delta U = 0. \quad (1.77)$$

1. Fall Dirichlet-RB: ϕ auf $A(V)$ gegeben.

$\rightarrow U \equiv 0$ auf $A(V)$

$\rightarrow \oint_{A(V)} \dots \equiv 0$

$\rightarrow \int_V d^3 \vec{x} (\vec{\nabla} U)^2 = 0$

$\rightarrow \vec{\nabla} U \equiv 0$ in ganz V

$\rightarrow U = \text{const.}$ in ganz V

$\rightarrow U \equiv 0$ in ganz V , da $U \equiv 0$ auf $A(V)$

$\Rightarrow \phi(\vec{x})$ eindeutig in V

2. Fall Neumann RB: $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ auf $A(V)$ vorgegeben.

$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial n} \equiv 0$ auf $A(V)$

$\rightarrow \oint_{A(V)} \dots = 0$

...wie in 1)

$\rightarrow U = \text{const.}$ in ganz V

$\Rightarrow \phi(\vec{x})$ ist bis auf konstanten Anteil eindeutig in V !

1. Elektrostatik

3. Fall Gemische Fälle: $\phi(\vec{x})$ oder $\frac{\partial\phi}{\partial n}(\vec{x})$ für $\vec{x} \in A(V)$ gegeben.

⇒ Eindeutigkeit von $\phi(\vec{x})$, falls ϕ irgendwo auf $A(V)$ bekannt!

Bemerkung: Aus 1. und 2. folgt, dass $\phi(\vec{x})$ und $\frac{\partial\phi}{\partial n}(\vec{x})$ für ein $\vec{x} \in A(V)$ nicht gleichzeitig vorgegeben werden können.

1.5 Green'sche Funktionen der Elektrostatik

Ziel:

Reduktion des Randwertproblems der Poisson-Gleichung auf das einfachere Problem der Laplace-Gleichung

→ Einführung/Berechnung einer „Green'schen Funktion“ $G(\vec{x}, \vec{x}')$ mit der Eigenschaft

$$\Delta' G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.78)$$

und geeigneten RB (siehe unten!)

Grundlegende Anwendung:

2. Green'sches Theorem: $\phi(\vec{x}') = \Phi(\vec{x}')$ und $\psi(\vec{x}') = G(\vec{x}, \vec{x}')$

$$\int_V d^3\vec{x}' \left[\underbrace{\Phi(\vec{x}') \Delta' G(\vec{x}, \vec{x}')}_{=-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')} - G(\vec{x}, \vec{x}') \underbrace{\Delta' \Phi(\vec{x}')}_{=-\rho(\vec{x}')/\epsilon_0} \right] = \oint_{A(V)} dA' \left[\Phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\vec{x}') \right] \quad (1.79)$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \oint_{A(V)} d\vec{A}' \left[G(\vec{x}, \vec{x}') \underbrace{\vec{\nabla}' \Phi(\vec{x}')}_{=-\vec{E}(\vec{x}')} - \Phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' G(\vec{x}, \vec{x}') \right] \quad (1.80)$$

Festlegung der Randbedingungen:

1. Dirichlet-RB: wähle $G_D(\vec{x}, \vec{x}') \equiv 0$ für $\vec{x}' \in A(V)$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') G_D(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{A(V)} d\vec{A}' \Phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (1.81)$$

wobei $\rho(\vec{x}')$ und $\Phi(\vec{x}')$ vorgegeben sind.

2. Neumann-RB: wähle $\frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{x}, \vec{x}') \equiv -\frac{4\pi}{A(V)}$, $A(V)$ = Oberfläche von V (0 ist nicht möglich, da

$$\oint_{A(V)} \vec{\nabla}' G(\vec{x}, \vec{x}') d\vec{A}' \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V d^3\vec{x}' \Delta' G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \int_V d^3\vec{x}' \delta(\vec{x} - \vec{x}') = -4\pi.)$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' G_N(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{A(V)} d\vec{A}' G_N(\vec{x}, \vec{x}') \vec{E}(\vec{x}') + \bar{\Phi}_A \quad (1.82)$$

1. Elektrostatik

wobei $\rho(\vec{x}')$ in V und $\vec{E}(\vec{x}')$ auf $A(V)$ vorgegeben sind, und $\bar{\Phi}_A = \frac{1}{A(V)} \cdot \int_{A(V)} \Phi(\vec{x}') dA'$ eine Konstante ist.

Symmetrie von $G(\vec{x}, \vec{y})$

Beh: $G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{y}, \vec{x})$ kann durch geeignete Wahl von G erreicht werden.

Beweis:

2. Green'sches Theorem für $\phi(\vec{x}') = G(\vec{x}, \vec{x}')$ und $\psi(\vec{x}') = G(\vec{y}, \vec{x}')$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^3 \vec{x}' \left[\underbrace{G(\vec{x}, \vec{x}') \Delta' G(\vec{y}, \vec{x}')}_{=-4\pi\delta(\vec{y}-\vec{x}')} - \underbrace{G(\vec{y}, \vec{x}') \Delta' G(\vec{x}, \vec{x}')}_{=-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')} \right] \\
 &= \oint_{A(V)} d\vec{A}' \left[\underbrace{G(\vec{x}, \vec{x}')}_{=0 \text{ für D-RB}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{y}, \vec{x}')}_{=-4\pi/A(V) \text{ für N-RB}} - \underbrace{G(\vec{y}, \vec{x}')}_{=0 \text{ für D-RB}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{x}, \vec{x}')}_{=-4\pi/A(V) \text{ für N-RB}} \right] \\
 &= -4\pi [G(\vec{x}, \vec{y}) - G(\vec{y}, \vec{x})] \\
 &\Rightarrow G_D(\vec{x}, \vec{y}) - G_D(\vec{y}, \vec{x}) = 0 \text{ automatisch erfüllt} \\
 &\Rightarrow -4\pi [G_N(\vec{x}, \vec{y}) - G_N(\vec{y}, \vec{x})] = -\frac{4\pi}{A(V)} \left[\oint_{A(V)} dA' G_N(\vec{x}, \vec{x}') - \oint_{A(V)} dA' G_N(\vec{y}, \vec{x}') \right] \neq 0 \text{ i. A.}
 \end{aligned} \tag{1.83}$$

→ Umdefinition:

$$\bar{G}_N(\vec{x}, \vec{y}) := G_N(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{1}{A(V)} \oint_{A(V)} G_N(\vec{x}, \vec{x}') dA' \tag{1.84}$$

→ \bar{G}_N ist ebenfalls Green'sche Funktion mit N-RB:

$$\begin{aligned}
 \Delta_y \bar{G}_N(\vec{x}, \vec{y}) &= \Delta_y G_N(\vec{x}, \vec{y}) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{y}), \\
 \frac{\partial}{\partial n_y} \bar{G}_N(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{\partial}{\partial n_y} G_N(\vec{x}, \vec{y}) = -4\pi/A(V). \\
 \Rightarrow \bar{G}_N(\vec{x}, \vec{y}) &= \bar{G}_N(\vec{y}, \vec{x}).
 \end{aligned} \tag{1.85}$$

Ansatz zur Berechnung von G :

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}') \tag{1.86}$$

→ $\Delta' F(\vec{x}, \vec{x}') = 0$, da $\Delta' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x}, \vec{x}')$, d.h. F erfüllt die Laplace-Gleichung für $\vec{x}, \vec{x}' \in V$.

⇒ Randwertproblem der Poisson-Gleichung mit bel. $\rho(\vec{x})$ und bel. RB wurde reduziert

1. Elektrostatik

auf Randwertproblem der Laplace-Gl. für $F(\vec{x}, \vec{x}')$ mit festen RB, z.B. $F_D(\vec{x}, \vec{x}') = -1/|\vec{x}-\vec{x}'|$ für $\vec{x}' \in A(V)$.

Bedeutung der Terme:

Betrachte „homogene RB“, d.h. $\phi \equiv 0$ (Dirichlet) oder $\frac{\partial \phi}{\partial n} \equiv 0$ (Neumann)

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') + \begin{cases} 0, & \text{D-RB,} \\ \bar{\phi}_A, & \text{N-RB,} \end{cases} \\ &= \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|}}_{\text{Potential, das bei } \vec{x} \text{ durch } \rho(\vec{x}') \text{ lokalisiert in } \vec{x}' \in V \text{ erzeugt wird.}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') F(\vec{x}, \vec{x}')}_{\text{Potential einer Ladungsverteilung außerhalb von } V \text{ (da } \Delta F(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \text{ in } V), \text{ die die RB für } \phi \text{ garantiert.}} + \begin{cases} 0 \\ \bar{\phi}_A \end{cases} \quad (1.87) \end{aligned}$$

D.h. jede Ladung $\rho(\vec{x}')d^3\vec{x}'$ mit $\vec{x}' \in V$ hat ein Gegenstück außerhalb von V , dessen Potential in \vec{x} durch $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(\vec{x}')d^3\vec{x}'F(\vec{x}, \vec{x}')$ gegeben ist.

⇒ Konstruktion von $G(\vec{x}, \vec{x}')$ durch *Bildladungen* außerhalb von V möglich (bei einfachen Geometrien!)

Beispiele zur Methode der Bildladungen:

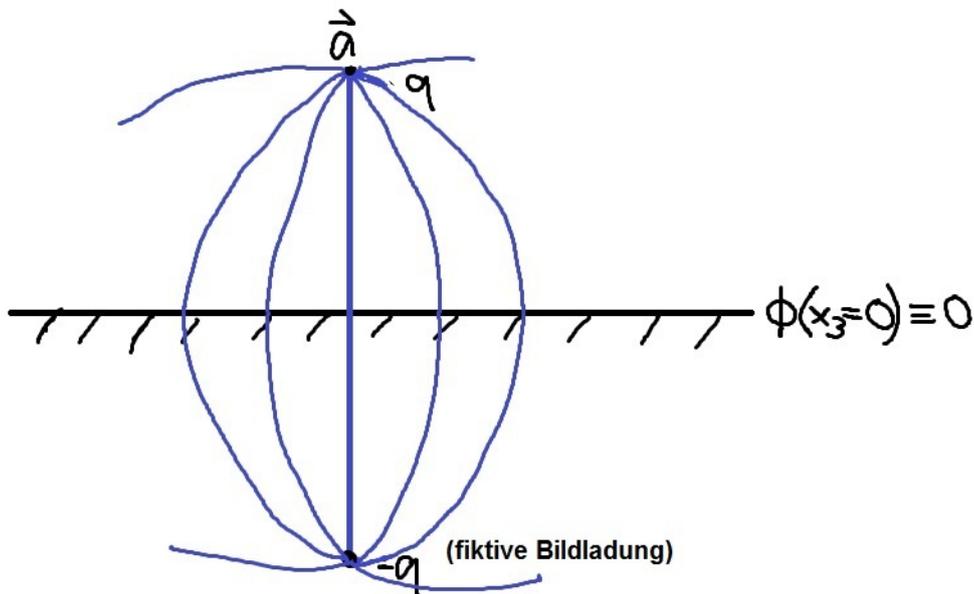


Abbildung 1.16: Punktladung q an der Stelle $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, die Ebene mit $x_3 = 0$ liefert eine Dirichlet-RB: $\phi(x_3 = 0) \equiv 0$

1. Elektrostatik

1. Punktladung über geerdeter Leiterplatte:

$$\text{Ladungsdichte: } \rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{a}), \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bildladungsdichte: } \rho'(\vec{x}) = -q\delta(\vec{x} - \hat{\vec{a}}), \quad \hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\begin{aligned} \rho'(\hat{\vec{x}}) &= -q\delta(\hat{\vec{x}} - \hat{\vec{a}}), \quad \hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} \\ &= -q\delta(\vec{x} - \vec{a}) \\ &= \rho(\vec{x}) \end{aligned} \tag{1.88}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{x} - \hat{\vec{a}}|} \right], \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \dots \tag{1.89}$$

2. Ladungsverteilung über einer geerdeten Leiterplatte:

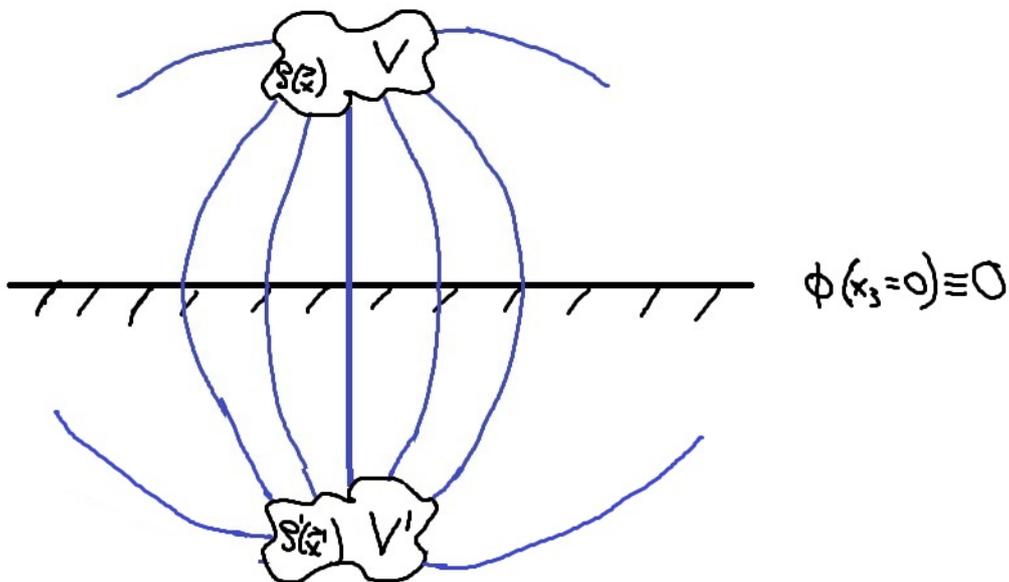


Abbildung 1.17: Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ im Volumen V über einer geerdeten Leiterplatte, die Ebene mit $x_3 = 0$ liefert wieder die Dirichlet-RB: $\phi(x_3 = 0) \equiv 0$

Aus (1) folgt (Zerlegung in Teilladungen $\rho(\vec{x}')d^3\vec{x}'$):

1. Elektrostatik

Bildladungsverteilung: $\rho'(\hat{x}) = -\rho(\vec{x})$

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \underbrace{\int_{V'} d^3\hat{x}' \frac{\rho'(\hat{x}')}{|\vec{x} - \hat{x}'|}}_{=-\int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}} \right], \quad \begin{pmatrix} \hat{x}'_1 \\ \hat{x}'_2 \\ \hat{x}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ -x'_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \underbrace{\frac{1}{|\vec{x} - \hat{x}'|}}_{=1/|\hat{x} - \vec{x}'|} \right] \rho(\vec{x}'), \end{aligned} \tag{1.90}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \left[\underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}_{=-\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}} - \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \hat{x}'|}}_{=-\frac{\vec{x} - \hat{x}'}{|\vec{x} - \hat{x}'|^3}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \left[\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} - \frac{\vec{x} - \hat{x}'}{|\vec{x} - \hat{x}'|^3} \right] \end{aligned} \tag{1.91}$$

E-Feld auf Leiterplatte: $x_3 = 0 \Rightarrow \vec{x} = \hat{x}$, $|\vec{x} - \vec{x}'| = |\hat{x} - \vec{x}'| = |\vec{x} - \hat{x}'|$.

$$\begin{aligned} \vec{E}(x_3 = 0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \underbrace{\begin{pmatrix} -\vec{x}' + \hat{x}' \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2x'_3 \end{pmatrix} = -2x'_3 \vec{e}_3} \\ &= -\frac{\vec{e}_3}{2\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \frac{x'_3 \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \perp \text{Leiterplatte} \end{aligned} \tag{1.92}$$

→ Ladungsdichte auf Leiterplatte: $\sigma = \epsilon_0 E_3(\vec{x}_3 = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_V d^3\vec{x}' \frac{-x'_3 \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$

1. Elektrostatik

→ Gesamtladung:

$$q_{\text{Leiterplatte}} = \int_{x_1-x_2\text{-Ebene}} dA \sigma = \frac{1}{2\pi} \int_V d^3\vec{x}' (-x'_3) \rho(\vec{x}') \int dA \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Lege Koordinatensystem so, dass $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d^3\vec{x}' (-x'_3) \rho(\vec{x}') \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_0^{\infty} dr r (r^2 + x_3'^2)^{-3/2}}_{-(r^2+x_3'^2)^{-1/2} \Big|_0^{\infty} = |x_3'|^{-1} = 1/x_3', x_3 > 0}$$

$$= - \int d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}')$$

$$= -q_{\text{ges}} = q_{\text{Bild}}$$

(1.93)

Green'sche Funktion (folgt aus ϕ oben!):

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\hat{\vec{x}} - \vec{x}'|}, \quad F(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{|\hat{\vec{x}} - \vec{x}'|} = F(\vec{x}', \vec{x}) \quad (1.94)$$

Zur Lösung des Dirichlet-Problems wird $\frac{\partial}{\partial n'} G_D(\vec{x}, \vec{x}')$ mit $\vec{x}' \in A(V)$ benötigt, d.h. $\frac{\partial}{\partial n'} = \dots = -\frac{\partial}{\partial x'_3} \Big|_{x'_3=0}$. (\vec{n} auf $A(V)$ zeigt nach unten!)

$$\frac{\partial G_D}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{\partial}{\partial x'_3} G_D(\vec{x}, \vec{x}') \Big|_{x'_3=0} = \frac{x'_3 - x_3}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} - \frac{x'_3 - \hat{x}_3}{|\hat{\vec{x}} - \vec{x}'|^3} \Big|_{x'_3=0} = \frac{-2x_3}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (1.95)$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') G_D(\vec{x}, \vec{x}') + \frac{1}{2\pi} \int_{x_1 x_2} dA' \phi(\vec{x}') \frac{x_3}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (1.96)$$

1. Elektrostatik

3. Punktladung über geerdeter Leiterkugel

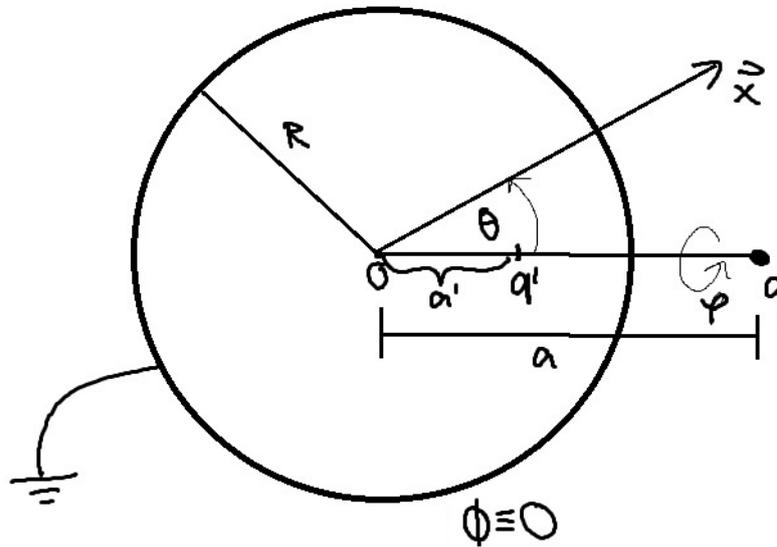


Abbildung 1.18:

Ladung: q bei $\vec{a} = (0, 0, a)^T$

Ansatz für Bildladung: q' bei $\vec{a}' = (0, 0, a')$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{x} - \vec{a}|} + \frac{q'}{|\vec{x} - \vec{a}'|} \right], \quad \vec{x} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = r \vec{e}_r. \quad (1.97)$$

1. Elektrostatik

RB: $0 \stackrel{!}{=} \phi(\vec{x} = R\vec{e}_r)$

$$\Leftrightarrow |R\vec{e}_r - \vec{a}| = |R\vec{e}_r - \vec{a}'| \left(-\frac{q}{q'} \right), \quad qq' < 0.$$

$$\Rightarrow (R\vec{e}_r - \vec{a})^2 = (R\vec{e}_r - \vec{a}')^2 \frac{q^2}{q'^2}$$

$$R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta = (R^2 + a'^2 - 2Ra' \cos \theta) \frac{q^2}{q'^2} \quad \forall \cos \theta$$

$$\Rightarrow R^2 + a^2 \stackrel{!}{=} (R^2 + a'^2) \frac{q^2}{a'^2}, \quad a \stackrel{!}{=} a' \cdot \frac{q^2}{q'^2} \tag{1.98}$$

...

$$a' = \frac{R^2}{a} \vee \underbrace{a' = a}_{\text{nicht akzeptabel}}$$

$$\Rightarrow q'^2 = \frac{a'}{a} q^2 = \frac{R^2}{a^2} q^2, \quad q' = -\frac{R}{a} q, \quad \text{da } qq' < 0.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{R/a \cdot q}{|\vec{x} - (R^2/a^2)\vec{a}|} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[(r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta)^{-1/2} - \frac{R}{a} \left(r^2 + \frac{R^4}{a^2} - 2r \frac{R^2}{a} \cos \theta \right)^{-1/2} \right]. \end{aligned} \tag{1.99}$$

4. Ladungsverteilung über einer geerdeten Leiterkugel:

→ Umschreibung des Ergebnisses für Punktladung aus 3):

$$\text{in 3) gilt: } \rho(\vec{x}') = q\delta(\vec{x}' - \vec{a}) \tag{1.100}$$

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|}}_{\rightarrow |\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{R/a}{\underbrace{|\vec{x} - R^2/a^2\vec{a}|}_{\rightarrow |\vec{x} - \frac{R^2}{|\vec{x}'|^2}\vec{x}'|}} \right] \tag{1.101}$$

Elimination von \vec{a} aus [...]

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{R/|\vec{x}'|}{|\vec{x} - \frac{R^2}{|\vec{x}'|}\vec{x}'|} \right]$$

gilt für beliebige Ladungsverteilung außerhalb der Kugel auf Grund des Super-

1. Elektrostatik

positionsprinzips!

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow F(\vec{x}, \vec{x}') &= -\frac{R}{|\vec{x}'| |\vec{x} - (R^2/|\vec{x}'|^2) \vec{x}'|}, \quad \vec{x} = r\vec{e}_r, \quad \vec{x}' = r'\vec{e}'_r \\
 &= -\frac{R}{|\vec{x}| |\vec{x}'| \cdot |\vec{e}_r - \frac{R^2}{|\vec{x}| |\vec{x}'|} \cdot \vec{e}'_r|}, \quad \gamma = \angle(\vec{e}_r, \vec{e}'_r), \quad \cos \gamma = \vec{e}_r \cdot \vec{e}'_r \\
 &= -\frac{R}{|\vec{x}| |\vec{x}'| \cdot \left(1 + \frac{R^4}{\vec{x}^2 \vec{x}'^2} - \frac{2R^2}{|\vec{x}| |\vec{x}'|} \cos \gamma\right)^{1/2}} \\
 &= F(\vec{x}, \vec{x}'), \quad \text{Symmetrie!} \\
 &= -\frac{R}{|\vec{x}| \cdot |\vec{x}' - \frac{R^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x}'|} \\
 &= -\frac{R}{|rr'\vec{e}'_r - R^2\vec{e}_r|}
 \end{aligned} \tag{1.102}$$

Somit:

$$\begin{aligned}
 G_D(\vec{x}, \vec{x}') &= \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}') = \\
 &= (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{-1/2} - R (r^2 r'^2 + R^4 - 2R^2 rr' \cos \gamma)^{-1/2}.
 \end{aligned} \tag{1.103}$$

Zur Lösung des Dirichlet-Problems wird die Normalenableitung $\frac{\partial}{\partial n'} G_D(\vec{x}, \vec{x}')$ mit $\vec{x}' \in A(V)$ benötigt, d.h. $\frac{\partial}{\partial n'} \dots = -\frac{\partial}{\partial r'} \Big|_{r'=R}$ (\vec{n} auf $A(V)$ zeigt nach innen!):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial n'} G_D(\vec{x}, \vec{x}') \Big|_{r'=R} &= \dots = \frac{R^2 - r^2}{R} (r^2 + R^2 - 2Rr \cos \gamma)^{-3/2}. \\
 \Rightarrow \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}') G_D(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \phi(\vec{x}') \frac{R(R^2 - r^2)}{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \gamma)^{3/2}} \Big|_{|\vec{x}'|=R} \\
 &= \text{allgem. Lösung des Dirichlet-Problems}
 \end{aligned} \tag{1.104}$$

E-Feld bzw. Ladungsdichte σ auf der Kugel bei $\phi(|\vec{x}| = R) = 0$ (geerdet):

$$\sigma = \epsilon_0 E_r = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \dots = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}') (R^2 - r'^2) \frac{1}{R} (r'^2 + R^2 - 2Rr' \cos \gamma)^{-3/2} \tag{1.105}$$

\Rightarrow Gesamtladung auf Kugel = Gesamtladung:

$$\begin{aligned}
 q'_{\text{ges}} &= \int d\Omega R^2 \sigma \\
 &= \dots \\
 &= - \int_V d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}') \underbrace{\frac{R}{r'}}_{<1} \Rightarrow |q'_{\text{ges}}| < |q_{\text{ges}}|.
 \end{aligned} \tag{1.106}$$

1.6 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen

Ziel:

Verfahren zur Lösung der Laplace-Gleichung mit D-RB bzw. N-RB $\Delta\Phi = 0$

Laplace-Operator in verschiedenen Koordinaten:

- kartesisch: $\Delta = \sum_{i=1}^3 \partial_n^2$,
- sphärisch: $\Delta = \frac{1}{r} \partial_r^2 r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2$,
- zylindrisch: $\Delta = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 + \partial_z^2$.

→ Typische Form: $\Delta = f(\eta, \zeta)D(\xi) + D(\eta, \zeta)$, wobei $D(\xi)$ ein Differentialoperator abhängig von ξ ist, bzw. $D(\eta, \zeta)$ von η und ζ .

→ Separationsansatz für spezielle Lösung von $\Delta\Phi = 0$:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \phi(\xi) \cdot \psi(\eta, \zeta). \quad (1.107)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow 0 = \Delta\Phi &= [f(\eta, \zeta)D(\xi) + D(\eta, \zeta)] \phi(\xi)\psi(\eta, \zeta) \\ &= f(\eta, \zeta)\psi(\eta, \zeta) \cdot D(\xi)\phi(\xi) + \phi(\xi) \cdot D(\eta, \zeta)\psi(\eta, \zeta) \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{D(\xi)\phi(\xi)}{\phi(\xi)}}_{\text{Funktion von } \xi} &= - \underbrace{\frac{D(\eta, \zeta)\psi(\eta, \zeta)}{f(\eta, \zeta)\psi(\eta, \zeta)}}_{\text{Funktion von } \eta, \zeta} \stackrel{!}{=} \lambda = \text{const.} \end{aligned} \quad (1.108)$$

$$\Rightarrow 1) \quad D(\xi)\phi(\xi) \stackrel{!}{=} \lambda\phi(\xi) \quad (1.109)$$

Eigenwertproblem des Differentialoperators $D(\xi)$! Durch Anpassung der Koordinaten an die Geometrie des Problems drücken sich die Randbedingungen oft durch Randwerte in $\phi(\xi)$ bzw. $\phi'(\xi)$ aus bei $\xi = a$, $\xi = b$.

$$2) \quad D(\eta, \zeta)\psi(\eta, \zeta) \stackrel{!}{=} -\lambda f(\eta, \zeta)\psi(\eta, \zeta) \quad (1.110)$$

für feste λ aus 1)!

→ evtl. weitere Separation der Variablen η, ζ

→ wiederum ein Eigenwertproblem sowie eine gewöhnliche DGL

Beispiel: $\Delta\Phi = 0$ in „Box“ $0 \leq x_i \leq a_i$

Randbedingung: $\Phi(\vec{x}) \Big|_{x_3=a_3} = f(x_1, x_2)$, sonst $\Phi \equiv 0$ auf restlichem Rand (allgemeiner Fall für vorgegebenes Φ auf Rand durch Superposition + Substitution)

1. Elektrostatik

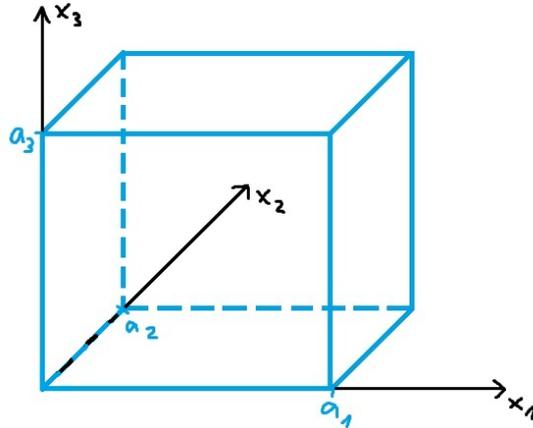


Abbildung 1.19: Box mit Kantenlängen a_i

Ansatz: $\Phi(\vec{x}) = \phi_1(x_1) \cdot \phi_2(x_2) \cdot \phi_3(x_3)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \Delta\Phi = \phi_1''(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3) + \phi_1(x_1)\phi_2''(x_2)\phi_3(x_3) + \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3''(x_3) \\ \Leftrightarrow 0 &= \underbrace{\frac{\phi_1''(x_1)}{\phi_1(x_1)}}_{=:c_1=const} + \underbrace{\frac{\phi_2''(x_2)}{\phi_2(x_2)}}_{=:c_2=const.} + \underbrace{\frac{\phi_3''(x_3)}{\phi_3(x_3)}}_{=:c_3=const.} \quad \text{mit } c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{aligned} \quad (1.111)$$

- $k = 1, 2$: $\phi_k'' = c_k \phi_k$ mit Randbedingung $\phi_k(0) = \phi_k(a_k) = 0$
 \rightarrow Lösung:

$$\phi_k^{(n_k)}(x_k) = \sin\left(n_k \pi \frac{x_k}{a_k}\right), \quad n_k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.112)$$

d.h. $c_k = -\frac{\pi^2 n_k^2}{a_k^2}$

- $k = 3$: $\phi_3'' = c_3 \phi_3$, $c_3 = -c_1 - c_2 = \frac{n_1^2 \pi^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2 \pi^2}{a_2^2} > 0$ vorgegeben.
 $\phi_3(0) = 0$, $\phi_3(a_3)$ wird später angepasst.

\rightarrow Lösungsansatz: $\phi_3(x_3) = e^{kx_3} \rightarrow k^2 = c_3$, $k = \pm\sqrt{c_3}$

$$\phi_3(0) = 0 \Rightarrow \phi_3(x_3) \propto \left(e^{\sqrt{c_3}x_3} - e^{-\sqrt{c_3}x_3}\right) = 2 \sinh(\sqrt{c_3}x_3) \quad (1.113)$$

\Rightarrow Allgemeine Lösung:

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} A_{n_1, n_2} \phi_1^{(n_1)}(x_1) \phi_2^{(n_2)}(x_2) \phi_3^{(n_1, n_2)}(x_3) \quad (1.114)$$

1. Elektrostatik

Randbedingung bei $x_3 = a_3$:

$$f(x_1, x_2) \stackrel{!}{=} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} A_{n_1 n_2} \phi_1^{(n_1)}(x_1) \phi_2^{(n_2)}(x_2) \phi_3^{(n_1, n_2)}(a_3) \quad (1.115)$$

→ zweifache Fourier-Reihe in x_1, x_2

Benutze Orthogonalität der Lösungen $\phi_k^{(n)}(x)$, $k = 1, 2$:

$$\int_0^{a_k} dx \phi_k^{(n)}(x) \phi_k^{(m)}(x) = \frac{a_k}{2} \delta_{nm} \quad (1.116)$$

Randbedingung bei $x_3 = a_3$:

$$f(x_1, x_2) \stackrel{!}{=} \sum_{n_1, n_2} A_{n_1, n_2} \phi_1^{(n_1)}(x_1) \phi_2^{(n_2)}(x_2) \phi_3^{(n_1, n_2)}(a_3) \quad (1.117)$$

$$\Rightarrow A_{n_1 n_2} = \frac{4}{a_1 a_2} \cdot \frac{1}{\phi_3^{(n_1, n_2)}(a_3)} \cdot \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2} dx_2 f(x_1, x_2) \phi_1^{(n_1)}(x_1) \phi_2^{(n_2)}(x_2)$$

Resumé: 2 Eigenwertgleichungen (für ϕ_1, ϕ_2), 1 gewöhnliche DGL (für ϕ_3). Allgemeine Lösung durch Superposition der speziellen Lösungen, wobei die Allgemeinheit (bel. $f(x_1, x_2)$) durch Vollständigkeit des Systems $\phi_1^{(n_1)}(x_1) \phi_2^{(n_2)}(x_2)$ gesichert ist.

Math. Exkurs zum Eigenwertproblem von Differentialoperatoren

In der Physik sind derartige EW-Probleme typischer Weise vom *Sturm-Liouville-Typ*:
DGL:

$$-\frac{d}{dx} \left[\underbrace{p(x)}_{>0} \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda \underbrace{w(x)}_{>0} y, \quad -\infty < a \leq x \leq b < \infty, \quad (1.118)$$

wobei λ der gesuchte Eigenwert und y die gesuchte Eigenfunktion $y(x)$ aus $L^2([a, b])$ (= Hilbert-Raum der auf $[a, b]$ quadratintegrablen Funktionen), und p, q, w seien reelle Funktionen.

RB: 2 unabhängige (homogene) Linearkombinationen:

- $$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= 0, & (\alpha_1, \alpha_2) &\neq (0, 0), \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0, & (\beta_1, \beta_2) &\neq (0, 0). \end{aligned} \quad (1.119)$$

- alternativ für $p(a) = p(b)$: y und y' periodisch forsetzbar, d.h. $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$.

1. Elektrostatik

Eigenschaften der Lösungen:

- Eigenwerte: $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \rightarrow \infty, \lambda_n \in \mathbb{R}$
- Eigenfunktionen: zu jedem λ_n gehört genau ein unabh. $y_n(x)$, wobei

$$\underbrace{(y_n, y_m)}_{\text{Skalarprodukt}} := \int_a^b dx w(x) y_n(x)^* y_m(x) = \delta_{nm}, \quad (1.120)$$

d.h. $\{y_n\}$ ist Orthogonalsystem.

- $\{y_n\}$ ist *vollständig*, d.h. jede Funktion in $L^2([a, b])$ ist (im Mittel) darstellbar durch:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n = (y_n, f) = \int_a^b dx w(x) y_n(x)^* f(x), \quad (1.121)$$

d.h. es gilt die *Vollständigkeitsrelation*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) y_n(z)^* w(z) = \delta(x - z) \quad (1.122)$$

Beispiel von oben:

$$-y'' = \lambda y, \quad \text{d.h. } p(x) = w(x) = 1, \quad q(x) \equiv 0, \quad a = 0, \quad y(a) = y(b) = 0,$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(n\pi \cdot \frac{x}{b}\right), \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.123)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{b} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \delta(x - y), \quad (1.124)$$

$$\int_0^b dx \frac{2}{b} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right) = \delta_{nm}$$

Beweis der Aussagen \rightarrow Funktionsanalysis

Teilbeweis: (Aspekte, die analog zur Linearen Algebra sind)

- Umschreibung der DGL:

$$Dy(x) = \lambda y(x), \quad \text{wobei } D := \frac{1}{w(x)} \left[-\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \right] \quad (1.125)$$

1. Elektrostatik

- D ist symmetrisch (hermitesch), d.h. $(f, Dg) = (Df, g) \forall f, g$, d.h. $D = D^+$

$$(f, Dg) = \int_a^b dx w(x) f(x)^* Dg(x) = \int_a^b dx f(x)^* \left[-\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \right] g(x) \quad (1.126)$$

Nebenrechnung:

$$-f^* \frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} g = -\frac{d}{dx} \left[f^* p \frac{d}{dx} g \right] + \left(\frac{df^*}{dx} \right) p \frac{dg}{dx}. \quad (1.127)$$

$$(f, Dg) = \int_a^b dx \left[\frac{df^*(x)}{dx} p(x) \frac{dg(x)}{dx} + f^*(x) q(x) g(x) \right] - f^*(x) p(x) \frac{dg(x)}{dx} \Big|_a^b$$

nochmalige partielle Integration:

$$= (Df, g) + \underbrace{\left(\frac{df^*(x)}{dx} p(x) g(x) - f^*(x) p(x) \frac{dg(x)}{dx} \right) \Big|_a^b}_{=0 \text{ nach RB}} \quad (1.128)$$

- $\lambda \in \mathbb{R}$:

Sei $Dy = \lambda y$ mit $(y, y) = 1$

$$\Rightarrow \lambda = (y, Dy) = (Dy, y)^* \underset{D=D^+}{=} (y, Dy)^* = \lambda^* \quad (1.129)$$

- Zur Eindeutigkeit: Seien $y(x)$ und $\bar{y}(x)$ beide Lösungen zur DGL $Dy = \lambda y$, $D\bar{y} = \lambda \bar{y}$.

→ Durch Umskalierung und der RB bei $x = a$ kann immer erreicht werden, dass

$$y(a) = \bar{y}(a), \quad y'(a) = \bar{y}'(a) \quad (1.130)$$

⇒ $y(x) \equiv \bar{y}(x)$ nach Eindeutigkeitssatz zu linearen DGL 2. Ordnung

- Orthogonalität:

$$\lambda_m \cdot (y_n, y_m) = (y_n, Dy_m) = (Dy_n, y_m) = \lambda_n^* (y_n, y_m) = \lambda_n (y_n, y_m) \quad (1.131)$$

d. h. $(\lambda_m - \lambda_n) \cdot (y_n, y_m) = 0 \Rightarrow (y_n, y_m) = 0 \quad (\forall \lambda_n \neq \lambda_m)$

⇒ oBdA: $(y_n, y_m) = \delta_{nm}$.

- Entwicklung von Funktionen: (Konvergenzverhalten nicht-trivial!)

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m y_m(x) \quad \text{sei angenommen.} \quad (1.132)$$

$$\Rightarrow (y_n, f) = \sum_{m=1}^{\infty} (y_n, y_m) c_m = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \delta_{nm} = c_n.$$

1. Elektrostatik

Verallgemeinerung:

- Falls $a \rightarrow -\infty \vee b \rightarrow \infty$ oder p, q, w singular, kann der Bereich für λ kontinuierliche Teile enthalten und $y_\lambda(x)$ ist meist nicht mehr normierbar.
- Singuläre Randstellen: $p(a) = 0$ oder $p(b) = 0$.
 \rightarrow Geeignete Randbedingungen sind dann z.B.: $y(a) \stackrel{!}{=} \text{endlich}, p(x)y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$
 (analog für b).

Beispiel:

Fourier-Reihe und Fourier-Integral

DGL:

$$y'' + k^2 y = 0, \quad -a/2 \leq x \leq a/2 \quad (1.133)$$

RB: $y(-a/2) = y(a/2), y'(-a/2) = y'(a/2)$ Periodizität!

Lösung:

$$y(x) = e^{ikx}, e^{-ika/2} \stackrel{!}{=} e^{ika/2}, \text{ d.h. } e^{ika} = 1 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{a} \cdot n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.134)$$

Was passiert bei $a \rightarrow \infty$?

$a < \infty$:

- $k = 2\pi \frac{n}{a}, n \in \mathbb{Z}$ (diskret)
- $y_n(x) = e^{\frac{2\pi i n x}{a}}$
- $(f, g) = \int_{-a/2}^{a/2} dx f(x) g(x)$
- $(y_n, y_m) = a \delta_{nm}$
- $f(x) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n y_n(x),$
 $f_n = (y_n, f) = \int_{-a/2}^{a/2} dx e^{-\frac{i 2\pi n x}{a}} \cdot f(x)$
- $\frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n(x) y_n(x')^* = \delta(x - x')$

$a \rightarrow \infty$

- $k \in \mathbb{R}$ (kontinuierlich)
- $y_k(x) = e^{ikx}$
- $(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) g(x)$
- $(y_k, y_{k'}) = 2\pi \delta(k - k')$
- $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx},$
 $\tilde{f}(k) = (y_k, f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} = \delta(x - x')$

1.7 Randwertproblem mit Zylindersymmetrie (= Dreh-symmetrie um feste Achse)

Wähle x_3 -Achse als Symmetrieachse!

\rightarrow keine φ -Abhängigkeit in Polarkoordinaten

1. Elektrostatik

Laplace-Gleichungen und Separationsansatz

$$0 = \Delta\Phi = \left[\frac{1}{r} \partial_r^2 r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2}_{\rightarrow 0} \right] \Phi(r, \theta) \quad (1.135)$$

Ansatz:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{U(r)}{r} \tilde{P}(\theta) \quad (1.136)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{1}{r} \partial_r^2 r \left(\frac{U(r)}{r} \right) \tilde{P}(\theta) + \frac{U(r)}{r^3 \sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta \tilde{P}(\theta) &= 0, \\ \frac{r^2}{U(r)} \partial_r^2 U(r) = - \frac{\partial_\theta \sin \theta \partial_\theta \tilde{P}(\theta)}{\sin \theta \tilde{P}(\theta)} &\stackrel{!}{=} \text{const} =: \ell(\ell + 1). \end{aligned} \quad (1.137)$$

(1) EW-Gleichung für $\tilde{P}(\theta)$:

$$\frac{1}{\sin \theta} d_\theta \sin \theta d_\theta \tilde{P}(\theta) + \ell(\ell + 1) \tilde{P}(\theta) = 0 \quad (1.138)$$

Umparametrisierung: $x := \cos \theta, d_\theta = \frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \underbrace{\sin^2 \theta}_{=1-x^2} \frac{d}{dx} P(x) + \ell(\ell + 1) P(x) = 0, \quad P(x) = P(\cos \theta) = \tilde{P}(\theta). \quad (1.139)$$

(gewöhnliche Legendre'sche DGL)

→ Suche allgemeine Lösung, die für $-1 \leq x \leq +1$ regulär ist!

→ Festlegung der ℓ -Werte mit Lösungen $P_\ell(x)$.

(2) Radialgleichung:

$$r^2 U''(r) - \ell(\ell + 1) U(r) = 0 \quad (1.140)$$

→ lineare gewöhnliche DGL. 2. Ordnung mit 2 linear unabhängigen Lösungen (z.B. durch Ansatz: $u(r) = r^\alpha$):

$$U_1(r) = r^{\ell+1}, \quad U_2(r) = r^{-\ell}. \quad (1.141)$$

Legendre-Polynome als Lösung von Gl. (1.139):

Potenzreihen(PR)-Ansatz:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (1.142)$$

1. Elektrostatik

da $P(x)$ in Umgebung von $x = 0$ regulär sein muss. Um Gl. (1.139) zu erfüllen, muss gelten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \ell(\ell+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0, \\ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}}_{= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}(m+2)(m+1) x^m} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n+1) x^n + \ell(\ell+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0. \end{aligned} \quad (1.143)$$

PR = eindeutig. $\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$ Alle Koeffizienten zu $x^n \stackrel{!}{=} 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n(-n(n+1) + \ell(\ell+1)), \\ a_{n+2} &= a_n \cdot \frac{n(n+1) - \ell(\ell+1)}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{wobei } (a_0, a_1) = \text{frei wählbar.} \end{aligned} \quad (1.144)$$

→ 2 linear unabhängige Lösungen:

- $P^{(\text{even})}(x)$ aus $(a_0, a_1) = (1, 0)$,
- $P^{(\text{odd})}(x)$ aus $(a_0, a_1) = (0, 1)$.

Konvergenzverhalten gemäß der a_n für $n \rightarrow \infty$:

- Konvergenz für $|x| < 1$,
- $\lim_{x \rightarrow +1} P^{(\text{even/odd})} = +\infty$,
- $\lim_{x \rightarrow -1} P^{(\text{even/odd})} = \pm\infty$,

z.B. nach Kriterium von Gauß bzw. Raabe

⇒ keine Linearkombination von $P^{(\text{even})}$ und $P^{(\text{odd})}$ ist endlich(=regulär) auf ganz $[-1, 1]!$

Ausweg:

Die Reihe muss abbrechen! D.h. $\exists n \in \mathbb{N}_0$, so dass $n(n+1) - \ell(\ell+1) = 0$. ⇒ $\ell \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_0$ existiert genau ein Polynom $P_\ell(x)$ von Grad ℓ , das eine akzeptable Lösung von Gl. (1.139) liefert.

Beh:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \cdot \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell \quad (1.145)$$

(Rodrigues'-Formel)

1. Elektrostatik

Beweis:

- Obige Überlegung zeigt für $\ell \in \mathbb{N}_0$:
Gl. (1.139) hat eine polynomiale Lösung, sowie eine Lösung, die für $|x| \rightarrow 1$ divergiert. Also ist $P_\ell(x)$ bis auf Normierung eindeutig.
- Nachweis, dass $P_\ell(x)$ die Gl. (1.139) erfüllt:

Allgemein gilt, dass

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}(f \cdot g) = \sum_{n=0}^{\ell} \binom{\ell}{n} f^{(n)} g^{(\ell-n)}. \quad (1.146)$$

Weiter ist

$$(1-x^2) \frac{d}{dx} (x^2-1)^\ell + 2\ell x (x^2-1)^\ell = 0. \quad (1.147)$$

Wendet man nun $\frac{d^\ell}{dx^\ell}$ an, so erhält man, dass

$$\begin{aligned} & (1-x^2) \frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}} (x^2-1)^\ell - 2x \binom{\ell}{1} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2-1)^\ell \\ & - 2 \binom{\ell}{2} \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}} (x^2-1)^\ell + 2\ell x \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2-1)^\ell \\ & + 2\ell \binom{\ell}{1} \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}} (x^2-1)^\ell = 0, \\ & \Rightarrow (1-x^2) \frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}} (x^2-1)^\ell = 0. \end{aligned} \quad (1.148)$$

\Rightarrow nach Anwendung von $\frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d}{dx}$ erhält man Gl. (1.139)!

□

Eigenschaften der $P_\ell(x)$:

- $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$, ...
- $P_\ell(1) = 1$,
- $P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$,
- Orthogonalität:

$$\int_{-1}^1 dx P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1} \cdot \delta_{\ell\ell'}. \quad (1.149)$$

(Nachweis analog zum allgemeinen SL-Problem, Vorfaktoren explizit ausrechnen.)

1. Elektrostatik

- $\{P_\ell(x)\}_{\ell=0}^\infty =$ vollständiges Funktionensystem für $x \in [-1, 1]$
(SL-Eigenfunktionensystem, aber auch klar, da $\{x^\ell\}_{\ell=0}^\infty$ vollständig).

- *Erzeugende Funktion* :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)t^\ell, \quad |t| < 1. \quad (1.150)$$

(Beweis später!)

- Verschiedene Rekursionen (DGL, Rodrigues, Erz. Funktion), z.B.:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)P'_\ell &= (\ell + 1)[P_{\ell+1} - xP_\ell], \\ (x^2 - 1)P'_{\ell+1} &= (\ell + 1)[xP_{\ell+1} - P_\ell], \\ &\text{etc...} \end{aligned} \quad (1.151)$$

Allgemeine Lösung der Randwertaufgabe (RWA) mit Zylindersymmetrie:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}) P_\ell(\cos \theta), \quad (1.152)$$

dabei sind A_ℓ und B_ℓ freie Konstanten, die durch die RB des phys. Problems festgelegt werden. Die Terme mit A_ℓ sind regulär bei $r \rightarrow 0$, die mit B_ℓ bei $r \rightarrow \infty$.

Relevanter Bereich für r : $a \leq r \leq b$. Falls $a = 0$, so folgt $B_\ell = 0 \forall \ell \in \mathbb{N}_0$, falls $b = \infty$, so folgt $A_\ell = 0, \forall \ell \in \mathbb{N}$. \Rightarrow Falls $a = 0, b = \infty$, so folgt $\Phi = \text{const} = A_0$.

Folgerung: Falls $\Phi(r, \theta = 0)$ (Potential auf d. Symmetrieachse), also

$$\Phi(r, \theta = 0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}) \quad (1.153)$$

als Reihe bekannt ist (d.h. Kenntnis von A_ℓ und B_ℓ), dann kann $\Phi(r, \theta)$ vollständig erschlossen werden.

Anwendung: Punktladung

Betrachte Punktladung auf der x_3 -Achse am Punkt \vec{a} und einen Punkt \vec{x} im Raum mit Winkel zur x_3 -Achse θ .

Lösung bekannt:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{x}^2 - 2\vec{a}\vec{x} + \vec{a}^2)^{1/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}}. \end{aligned} \quad (1.154)$$

Allgemein:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}). \quad (1.155)$$

1. Elektrostatik

Betrachte Lösung für Punktladung auf x_3 -Achse (d.h. $\theta = 0$):

$$\begin{aligned} \Phi(r, 0) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{a-r} & a > r, \\ \frac{1}{r-a} & r > a, \end{cases} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{cases} \frac{1}{a} \frac{1}{1-\frac{r}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^\ell, \\ \frac{1}{r} \frac{1}{1-\frac{a}{r}} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^\ell = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{-\ell-1} \end{cases}, \end{aligned} \quad (1.156)$$

$$\Rightarrow \Phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^\ell P_\ell(\cos \theta), & a > r, \\ \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{-\ell-1} P_\ell(\cos \theta), & a < r. \end{cases} \quad (1.157)$$

→ Beweis für Erzeugende Funktion der $P_\ell(x)$ durch $a = 1$ und $r = t$, $|t| < 1$

Beispiel: Leitende Kugel im homogenen äußeren \vec{E} -Feld

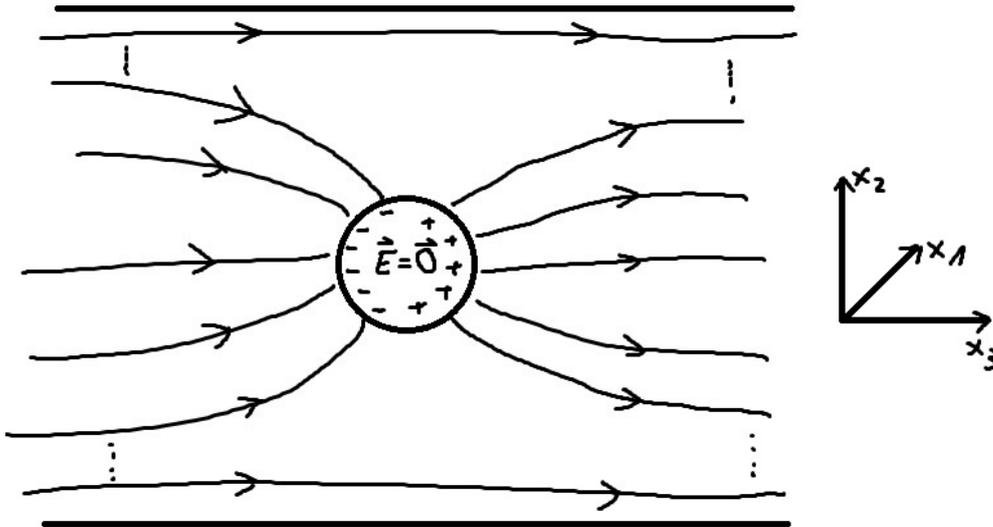


Abbildung 1.20: Die x_3 -Achse wird auf Grund der Symmetrie des Problems in Richtung des äußeren Feldes gelegt.

Randbedingungen:

(1) Potential in Kugel:

$$\Phi(r \leq a, \cos \theta) = \phi_0 = \text{const.} \quad (1.158)$$

1. Elektrostatik

(2) Verhalten für $r \rightarrow \infty$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z. \quad (1.159)$$

Somit:

$$\Phi(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -E_0 x_3 = -E_0 r \underbrace{\cos \theta}_{=P_1(\cos \theta)}. \quad (1.160)$$

Allgemeiner Ansatz:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-\ell-1}) P_{\ell}(\cos \theta). \quad (1.161)$$

Wegen (2) gilt: $\Phi(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -E_0 r P_1(\cos \theta)$.
 $\Rightarrow A_1 = -E_0, A_{\ell} = 0 \quad \forall \ell \neq 1$.

Ergänzung:

Soll $\overline{\Phi(r, \theta)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \Phi_0(\theta)$ gelten,

$$\int_{-1}^1 d \cos(\theta) P_{\ell}(\cos \theta) \Phi_0(\theta) = \sum_{\ell'=0}^{\infty} A_{\ell'} r^{\ell'} \underbrace{\int_{-1}^1 d \cos \theta P_{\ell'}(\cos \theta) P_{\ell}(\cos \theta)}_{= \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}},$$

$$A_{\ell} = \frac{2\ell+1}{2} \frac{1}{r^{\ell}} \int_{-1}^1 d \cos \theta P_{\ell}(\cos \theta) \Phi_0(\theta).$$

Aus (2) folgt:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} r^{-\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta) - E_1 r P_1(\cos \theta). \quad (1.162)$$

Aus (1) folgt:

$$\Phi(a, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} a^{-\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta) - E_1 a P_1(\cos \theta) \stackrel{!}{=} \Phi_0 P_0(\cos \theta) \quad (1.163)$$

Somit ist für $\ell = 0$: $B_0 = a\Phi_0$ und für $\ell = 1$: $0 = B_1 a^{-2} - E_0 a$. $B_{\ell} = 0 \quad \forall \ell > 1$.

$$\Rightarrow B_0 = \Phi_0 a, B_1 = E_0 a^3, B_{\ell} = 0 \quad \forall \ell > 1 \quad (1.164)$$

1. Elektrostatik

$$\Rightarrow \Phi(r, \theta) = \underbrace{-E_0 r \cos \theta}_{\substack{\text{vorgegebenes,} \\ \text{homogenes,} \\ \text{äußeres Feld}}} + \underbrace{\Phi_0 \frac{a}{r}}_{\substack{\text{Feld der Ge-} \\ \text{samtladung} \\ \text{auf der Kugel} \\ \text{bei isotroper} \\ \text{Verteilung}}} + \underbrace{E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta}_{\substack{\text{Dipolfeld der In-} \\ \text{fluenzladungen}}}. \quad (1.165)$$

\vec{E} -Feld auf Kugeloberfläche:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \Phi \Big|_{r=a} = - \left(\vec{e}_r \partial_r + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi \right) \Phi \Big|_{r=a} \\ &= -\vec{e}_r \left(-E_0 \cos \theta - \Phi_0 \frac{a}{r^2} - 2E_0 \frac{a^3}{r^3} \cos \theta \right) - \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \left(E_0 r \sin \theta - E_0 \frac{a^3}{r^2} \sin \theta \right) \Big|_{r=a} \\ &= \vec{e}_r \left(3E_0 \cos \theta + \frac{\Phi_0}{a} \right) \perp \text{Kugeloberfläche.} \end{aligned} \quad (1.166)$$

Flächenladungsdichte:

$$\sigma = \epsilon_0 E_r \Big|_{r=a} = \epsilon_0 \cdot 3E_0 \cos \theta + \frac{\Phi_0 \epsilon_0}{a}. \quad (1.167)$$

Gesamtladung der Kugel:

$$q = a^2 \int d\Omega \sigma = 4\pi \epsilon_0 \Phi_0 a. \quad (1.168)$$

1.8 Randwertproblem in Kugelkoordinaten

Laplace-Gleichung (Kugelkoordinaten):

$$0 = \Delta \Phi = \left[\frac{1}{r} \partial_r^2 r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right] \Phi(r, \theta, \varphi). \quad (1.169)$$

Separationsansatz:

$$\Phi = \frac{U(r)}{r} \cdot \tilde{P}(\theta) Q(\varphi). \quad (1.170)$$

Einsetzen in $\Delta \Phi = 0$, durchmultiplizieren mit $\frac{r^3}{U \tilde{P} Q}$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{\frac{r^2 U''}{U}}_{\substack{\text{(Funktion von } r) \\ \stackrel{!}{=} \text{const.}}} + \underbrace{\frac{1}{\tilde{P} \sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta \tilde{P} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{Q''}{Q}}_{\substack{\text{(Funktion von } \varphi) \\ \stackrel{!}{=} \text{const} =: -m^2}} = 0 \\ \underbrace{\hspace{15em}}_{\substack{\text{(Funktion von } \theta) \\ \stackrel{!}{=} \text{const.} = -\ell(\ell + 1)}} \end{aligned} \quad (1.171)$$

1. Elektrostatik

Wir erhalten somit 3 Gleichungen für U, \tilde{P}, Q :

$$(1) \quad Q'' + m^2 Q = 0, \quad Q(\varphi) = Q(\varphi + 2\pi). \quad (1.172)$$

$$\Rightarrow Q(\varphi) = 1 \quad (m = 0) \vee \cos(m\varphi) \vee \sin(m\varphi), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Eleganter:

$$Q_m(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.173)$$

$$(2) \quad \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta \tilde{P} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \tilde{P} = -\ell(\ell + 1) \tilde{P}. \quad (1.174)$$

mit den neuen Variablen $x = \cos \theta, P(x) = P(\cos \theta) = \tilde{P}(\theta)$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(1-x^2) \frac{d}{dx} P + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0. \quad (1.175)$$

(Verallgemeinerte Legendre-DGL)

(3) Radialgleichung:

$$r^2 U'' - \ell(\ell + 1) U = 0. \quad (1.176)$$

$$\Rightarrow U_1(r) = r^{\ell+1}, \quad U_2(r) = r^{-\ell} \quad (1.177)$$

(wie im vorigen Abschnitt)

1.8.1 Die zugeordneten Legendre-Funktionen als Lösung von Gl. (1.175)

1. Schritt: Abspaltung des Randverhaltens bei singulären Punkten $x = \pm 1$

$x \rightarrow +1$:

$$(1-x^2) = (1-x)(1+x) \sim 2(1-x). \quad (1.178)$$

\rightarrow DGL:

$$2 \frac{d}{dx}(1-x) \frac{d}{dx} P - \frac{m^2}{2(1-x)} P \sim 0 \quad (1.179)$$

$$\Leftrightarrow (1-x) \frac{d}{dx}(1-x) \frac{d}{dx} P \sim \frac{m^2}{4} P$$

\rightarrow Ansatz:

$$P = (1-x)^\alpha \rightarrow \alpha^2(1-x)^\alpha \stackrel{!}{=} \frac{m^2}{4}(1-x)^\alpha, \quad \alpha = \pm \frac{m}{2} \quad (1.180)$$

\rightarrow

$$P \sim (1-x)^{|m|/2}. \quad (1.181)$$

Lösung zu $\alpha = -\frac{|m|}{2}$ ist nicht quadratintegrierbar für $m \neq 0$!

$x \rightarrow -1$ analog:

$$P \sim (1+x)^{|m|/2}. \quad (1.182)$$

1. Elektrostatik

2. Schritt:

Ansatz:

$$P(x) = (1 - x^2)^{|m|/2} \cdot \bar{P}(x). \quad (1.183)$$

$\bar{P}(x)$ soll regulär sein in $[-1, 1] \rightarrow$ DGL für $\bar{P}(x)$:

$$\frac{d}{dx}(1 - x^2) \frac{d}{dx} \bar{P} - 2|m|x \bar{P}' + (\ell(\ell + 1) - |m|(|m| + 1)) \bar{P} = 0. \quad (1.184)$$

3. Schritt: PR-Ansatz für \bar{P} :

$$\bar{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (1.185)$$

\rightarrow analog zu P_ℓ :

$$a_{n+2} = a_n \cdot \frac{(|m| + n)(|m| + n + 1) - \ell(\ell + 1)}{(n + 2)(n + 1)}. \quad (1.186)$$

\rightarrow Reihe muss abbrechen, sonst keine reguläre Lösung!

$\Rightarrow \ell = |m| + n, \dots, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ für festes $|m| = 0, 1, 2, \dots$

bzw. $m = -\ell, \dots, \ell$ für festes $\ell = 0, 1, 2, \dots$

4. Schritt

$$P_\ell^m(x) := \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2 - 1)^\ell. \quad (1.187)$$

(zugeordnete Legendre-Funktionen)

\rightarrow Nachweis der DGL durch explizites Einsetzen analog zu $P_\ell(x)$; Nachweis der Eindeutigkeit (bis auf Normierung) ebenfalls analog:

- Ansatz ähnlich wie oben:

$$P(x) =: (1 - x^2)^{m/2} \hat{P}(x) \cdot (-1)^m 2^\ell \cdot \ell!. \quad (1.188)$$

\rightarrow Einsetzen in DGL liefert:

$$\frac{d}{dx}(1 - x^2) \frac{d}{dx} \hat{P}(x) - 2mx \hat{P}'(x) + [\ell(\ell + 1) - m(m + 1)] \hat{P}(x) = 0. \quad (1.189)$$

- Lösung von Gl. (1.189) für $m = -\ell$ durch $\hat{P}_\ell^{-\ell} = (x^2 - 1)^\ell$.

Verifikation:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}(1 - x^2) \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^\ell + 2\ell x \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^\ell + [(\ell(\ell + 1) + \cancel{\ell(\ell + 1)})] (x^2 - 1)^\ell \\ &= \frac{d}{dx} (-2\ell x) (x^2 - 1)^\ell + 4\ell^2 x^2 (x^2 - 1)^{\ell-1} + 2\ell (x^2 - 1)^\ell \\ &= \cancel{-2\ell (x^2 - 1)^\ell} - \cancel{(2\ell x)^2 (x^2 - 1)^{\ell-1}} + \cancel{4\ell^2 x^2 (x^2 - 1)^{\ell-1}} + \cancel{2\ell (x^2 - 1)^\ell} = 0 \end{aligned} \quad (1.190)$$

1. Elektrostatik

- Beweis von Gl. (1.189) durch Induktion $m \rightarrow m + 1$:

Sei $\hat{P}_\ell^m(x) = \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2 - 1)^\ell$ eine Lösung von Gl. (1.189).

→ Nachweis von $\hat{P}_\ell^{m+1}(x)$:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dx} [(1.189)], \quad \text{beachte: } \hat{P}_\ell^{m+1}(x) = \frac{d}{dx} \hat{P}_\ell^m(x). \\
 &= \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} (1-x^2) \right] \frac{d}{dx} \hat{P}_\ell^m(x) + \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \hat{P}_\ell^m(x) \\
 &\quad - 2m \hat{P}_\ell^{m'}(x) - 2mx \frac{d}{dx} \hat{P}_\ell^{m'}(x) + [\ell(\ell+1) - m(m+1)] \frac{d}{dx} \hat{P}_\ell^m(x) \\
 &= -2 \frac{d}{dx} x \hat{P}_\ell^{m+1}(x) + \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} \hat{P}_\ell^{m+1}(x) - 2m \hat{P}_\ell^{m+1}(x) \\
 &\quad - 2mx \hat{P}_\ell^{m+1'}(x) + [\ell(\ell+1) - m(m+1)] \hat{P}_\ell^{m+1}(x) \\
 &= \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} \hat{P}_\ell^{m+1}(x) - 2(m+1) \hat{P}_\ell^{m+1}(x) - 2(m+1)x \hat{P}_\ell^{m+1'}(x) \\
 &\quad + [\ell(\ell+1) - m(m+1)] \hat{P}_\ell^{m+1}(x) \\
 &= \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} \hat{P}_\ell^{m+1}(x) - 2(m+1)x \hat{P}_\ell^{m+1'}(x) \\
 &\quad + [\ell(\ell+1) - (m+1)(m+2)] \hat{P}_\ell^{m+1}(x). \\
 &= (1.189) \text{ für } \hat{P}_\ell^{m+1}(x)!
 \end{aligned} \tag{1.191}$$

□

Eigenschaften der $P_\ell^m(x)$:

- $P_\ell^0(x) = P_\ell(x)$, $P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x)$, $m \geq 0$.
- $P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x)$

$$\Rightarrow P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{|m|/2} \cdot \left(\begin{array}{c} \text{Polynom in } x \\ \text{vom Grad } \ell - |m| \end{array} \right). \tag{1.192}$$

- Orthogonalität:

$$\int_{-1}^{+1} dx P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}. \tag{1.193}$$

Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) := \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \cdot \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad m = -\ell, -\ell+1, \dots, +\ell. \tag{1.194}$$

1. Elektrostatik

Eigenschaften:

- Explizit:

$$\begin{aligned}
 Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\
 Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \underbrace{\sin \theta e^{i\varphi}}_{=\frac{x_1+ix_2}{r}}, \\
 Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \underbrace{\cos \theta}_{=x_3/r}, \\
 Y_{22} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \underbrace{\sin^2 \theta e^{2i\varphi}}_{=\frac{x_1^2-x_2^2+2ix_1x_2}{r^2}}, \\
 Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \underbrace{\sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}}_{=\frac{(x_1+ix_2)x_3}{r^2}}, \\
 Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{1}{2} \underbrace{(3 \cos^2 \theta - 1)}_{=\frac{3x_3^2-1}{r^2}}, \dots
 \end{aligned} \tag{1.195}$$

•

$$Y_{\ell,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{\ell m}(\theta, \varphi)^*, \tag{1.196}$$

•

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta Y_{\ell' m'}(\theta, \varphi)^* Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}, \tag{1.197}$$

•

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta', \varphi')^* Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'), \tag{1.198}$$

- Additionstheorem (Beweis siehe Literatur):

$$P_{\ell}(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \underbrace{Y_{\ell m}(\theta', \varphi')^*}_{\text{Richtung } \vec{x}'} \underbrace{Y_{\ell m}(\theta, \varphi)}_{\vec{x}}, \quad \gamma = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{x}'). \tag{1.199}$$

Allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[A_{\ell m} r^{\ell} + B_{\ell m} r^{-\ell-1} \right] Y_{\ell m}(\theta, \varphi). \tag{1.200}$$

1. Elektrostatik

Die Konstanten $A_{\ell m}$ und $B_{\ell m}$ sind aus den Randbedingungen zu bestimmen.

1.9 Multipolentwicklung

Aufgabe:

Löse Poisson-/Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$ für vorgegebenes $\rho(\vec{x})$, wobei $\vec{x} \in V = \text{beschränkt}$ mit RB $\Phi \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0$.

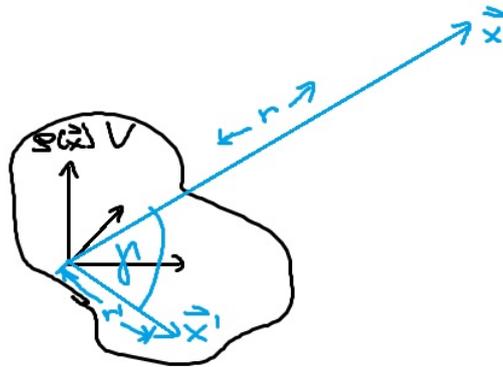


Abbildung 1.21:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad r = |\vec{x}|, \quad r' = |\vec{x}'| \quad (1.201)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \underbrace{\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \gamma \right]^{-1/2}}_{\text{Erzeugende Funktion der } P_\ell(\cos \gamma)}, \quad \text{wobei } t = r'/r < 1 \text{ für hinreichend große } r! \\ &= \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^\ell P_\ell(\cos \gamma), \quad \text{verwende Additionstheorem!} \end{aligned} \quad (1.202)$$

1. Elektrostatik

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^\ell \cdot \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta', \varphi')^* Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r^{-\ell-1}}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} q_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (1.203)$$

mit

$$q_{\ell m} := \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') r'^{\ell} Y_{\ell m}(\theta', \varphi')^*, \quad (1.204)$$

(sphärische Multipolmomente)

$$q_{\ell, -m} = (-1)^m q_{\ell m}^*. \quad (1.205)$$

Zusammenhang mit kart. Koordinaten

Taylor-Entwicklung:

$$f(\vec{x}') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{x}' \cdot \vec{\nabla})^n f(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=0} = f(\vec{0}) + \vec{x}' \cdot \vec{\nabla} f(\vec{0}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x'_i x'_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{0}) + \mathcal{O}(x_i'^3), \quad (1.206)$$

$$\begin{aligned} f(\vec{x}') &= \frac{1}{|\vec{a} - \vec{x}'|} = (\vec{a}^2 + \vec{x}'^2 - 2\vec{a}\vec{x}')^{-1/2} \\ &= \frac{1}{|\vec{a}|} + \vec{x}' \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x'_i x'_j \cdot \frac{3a_i a_j - |\vec{a}|^2 \delta_{ij}}{|\vec{a}|^5} + \mathcal{O}(|\vec{a}|^{-4}). \end{aligned} \quad (1.207)$$

Anwendung auf $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$, d.h. $\vec{a} = \vec{x}$, $|\vec{a}| = r$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi(\vec{x}) &= \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} + \vec{x}' \cdot \frac{\vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i,j=1}^3 x'_i x'_j}_{\rightarrow \sum_{i,j} (x'_i x'_j - (1/3)r^2 \delta_{ij})} \frac{3x_i x_j + r^2 \delta_{ij}}{r^5} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} + \dots \right], \end{aligned} \quad (1.208)$$

1. Elektrostatik

wobei

$$\begin{aligned}
 q &= \int_V d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}') && = \text{Gesamtladung,} \\
 \vec{p} &= \int_V d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}') \vec{x}' && = \text{el. Dipolmoment,} \\
 Q_{ij} &= \int_V d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}') (3x_i x_j - r'^2 \delta_{ij}) && = \text{el. Quadrupolmoment,}
 \end{aligned} \tag{1.209}$$

$$Q_{ij} = Q_{ji}, \quad \text{Tr}\{Q\} = \sum_{i=1}^3 Q_{ii} = 0. \tag{1.210}$$

Zusammenhang mit $q_{\ell m}$:

$$\begin{aligned}
 q_{00} &= \frac{q}{\sqrt{4\pi}}, \\
 q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_1 - ip_2), \\
 q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_3, \dots \\
 q_{22} &= \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(Q_{11} - Q_{22} - 2iQ_{12}), \\
 q_{21} &= -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(Q_{13} - iQ_{23}), \\
 q_{20} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}Q_{33}, \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{1.211}$$

Eigenschaften von Multipolmomenten:

- $q_{\ell m}$ hängen von Koordinatenursprung ab für $\ell > 0$.
- $q_{\ell m}$ ist translationsinvariant, falls $q_{\ell' m'} = 0$ für alle $\ell' < \ell$.
- $q_{\ell m}$ ist Tensor vom Rang ℓ (in sphärischer Darstellung), z.B.: Koordinatendrehung:

$$\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = D\underline{x} \tag{1.212}$$

1. Elektrostatik

(\underline{x} : Schreibweise für Koordinatentupel, D : Drehmatrix, d.h. $D^{-1} = D^T$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{q} &= q, \\ \hat{p}_i &= \sum_{j=1}^3 D_{ij} p_j, \quad \hat{\underline{p}} = D \underline{p}, \\ \hat{Q}_{ij} &= \sum_{k,\ell=1}^3 D_{ik} D_{j\ell} Q_{k\ell}, \quad \hat{Q} = D Q D^T. \end{aligned} \quad (1.213)$$

Beispiele: Anordnungen von Punktladungen

(1) 1 Ladung q am Ort \vec{a} :

$$\vec{p} = q \vec{a}, \quad (1.214)$$

$$Q_{ij} = q (3a_i a_j - a^2 \delta_{ij}). \quad (1.215)$$

(2) 2 Ladungen: $+q$ und $-q$ mit Verbindungsvektor \vec{a} :

$$q_{\text{ges}} = 0, \quad (1.216)$$

$$\vec{p} = q \vec{a}, \quad (1.217)$$

$$Q_{ij} \neq 0, \quad \text{falls } \vec{p} \neq 0. \quad (1.218)$$

(3) 4 Ladungen: Angeordnet im Quadrat, mit jew Abstand a , gleichnamige Ladungen liegen auf einer Diagonalen, $x_1 x_2$ -Ebene liege in der Ebene des Quadrates:

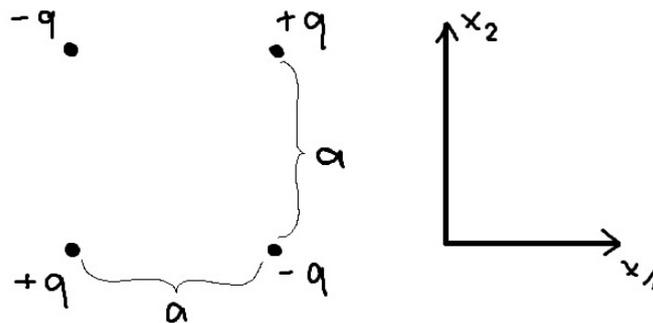


Abbildung 1.22: Illustration zu Beispiel Nr. 3: Vier Punktladungen, angeordnet als Quadrat in der x_1 - x_2 -Ebene mit Kantenlänge a .

$$q_{\text{ges}} = 0, \quad (1.219)$$

1. Elektrostatik

$$\vec{p} = \vec{0}, \quad (1.220)$$

$$Q_{ij} = \text{translationsinvariant} = \sum_{n=1}^4 q_n \left(3x_i^{(n)} x_j^{(n)} - r^{(n)2} \delta_{ij} \right),$$

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = 0, \quad Q_{12} = 3qa^2, \quad Q_{13} = Q_{23} = 0. \quad (1.221)$$

$$\Rightarrow Q = 3qa^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) 4 Ladungen aus (3) gedreht: Anordnung wie zuvor, jedoch um 45° gedreht:

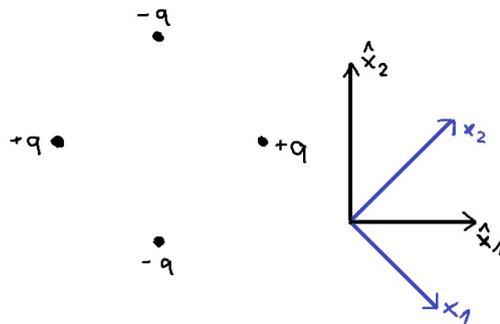


Abbildung 1.23: Illustration zu Beispiel (4): Vier Punktladungen wie in Abb. 1.22, jedoch um 45° gegen die Koordinatenachsen \hat{x}_1 und \hat{x}_2 gedreht.

$$\hat{x} = D\underline{x}, \quad D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (1.222)$$

$$\Rightarrow \hat{Q} = DQD^T = 3qa^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Test:

$$\hat{Q}_{11} = +q \cdot 2(\sqrt{2}a)^2 - q \left(2(a/\sqrt{2})^2 - (a/\sqrt{2})^2 \right) \cdot 2 = 3qa^2, \quad \hat{Q}_{22} = -\hat{Q}_{11}, \dots \quad (1.223)$$

Anwendung: Energie einer Ladungsverteilung im externen elektrischen Feld

Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$, V im externen Feld $\vec{E}(\vec{x})$, wobei \vec{E} im Bereich V nur wenig

1. Elektrostatik

variiert. \Rightarrow Energie W von $\rho(\vec{x})$ im Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$:

$$W = \int_V d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \quad (1.224)$$

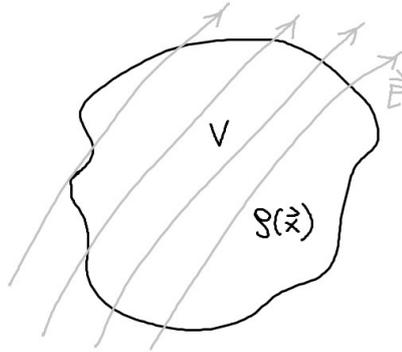


Abbildung 1.24: Ladungsverteilung im Volumen V , welches von einem externen \vec{E} -Feld durchsetzt wird.

Ursprung $\vec{0}$ in V , Entwicklung:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_V d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) \left[\Phi(\vec{0}) + \vec{x} \vec{\nabla} \Phi(\vec{0}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \underbrace{x_i x_j}_{x_i x_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{0}) + \dots \right] \\
 &\quad \text{Der Term mit } \delta_{ij} \text{ liefert keinen Betrag, da } \sum_i \partial_i^2 \Phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\
 &= \int_V d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) \left[\Phi(\vec{0}) - \vec{x} \vec{E}(\vec{0}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} (x_i x_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_i}{\partial x_j}(\vec{0}) + \dots \right] \\
 &= \underbrace{q \Phi(\vec{0})}_{\text{Beitrag der Gesamtladung}} - \underbrace{\vec{p} \vec{E}(\vec{0})}_{\text{Beitrag der Orientierung des Dipols bzgl. des } \vec{E}\text{-Feldes}} - \underbrace{\frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_j}(\vec{0})}_{\text{Orientierung des Quadrupols bzgl. der Inhomogenität des } \vec{E}\text{-Feldes}} + \dots
 \end{aligned} \quad (1.225)$$

Beispiel: Wechselwirkungsenergie zweier Punktdipole

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_2 &= -\frac{\vec{p}_2 - 3\vec{e}(\vec{p}_2 \cdot \vec{e})}{r^3} = -\frac{r^2 \vec{p}_2 - 3\vec{x}(\vec{p}_2 \cdot \vec{x})}{r^5} \\
 &= \text{Feld, das von } \vec{p}_2 \text{ bei } \vec{x} \text{ erzeugt wird (} \vec{p}_2 \text{ im Ursprung!)}
 \end{aligned} \quad (1.226)$$

1. Elektrostatik

$$\begin{aligned} \Rightarrow W_{12} &= -\vec{p}_1 \vec{E}_2 = \frac{r^2(\vec{p}_1 \vec{p}_2) - 3(\vec{p}_1 \cdot \vec{x})(\vec{p}_2 \cdot \vec{x})}{r^5} \\ &= \text{Wechselwirkungsenergie von } \vec{p}_1 \text{ und } \vec{p}_2 \\ &= W_{21} \text{ (Symmetrie!).} \end{aligned} \quad (1.227)$$

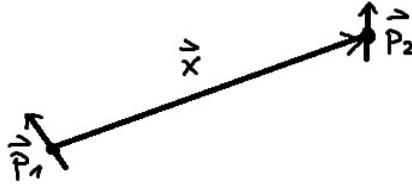


Abbildung 1.25: Zwei Punktdipole \vec{p}_1 und \vec{p}_2 mit Verbindungsvektor \vec{x} .

1.10 Makroskopische Elektrostatik

Mikroskopische und makroskopische Felder

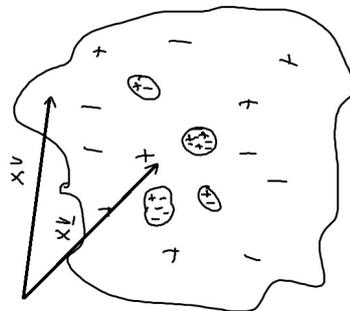


Abbildung 1.26: Einzelne mikroskopische Ladungsverbände j (Atome, Cluster, Moleküle, ...) bei \vec{x}_j erzeugen „mikroskopisches Feld“. Das Fernfeld eines Verbandes ist charakterisiert durch die Ladung q_j und das Dipolmoment \vec{p}_j .

- Mikroskopisch:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{mikro}}(\vec{x}) &= \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} + \vec{p}_j \vec{\nabla}_j \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} \right] \\ &= \int d^3\vec{x}' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\rho_{\text{mikro}}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\pi}_{\text{mikro}}(\vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right], \end{aligned} \quad (1.228)$$

1. Elektrostatik

wobei $\rho_{\text{mikro}}(\vec{x}') = \sum_j q_j \delta(\vec{x}' - \vec{x}_j)$ (eff. Ladungsdichte) und
 $\vec{p}_{\text{mikro}}(\vec{x}') = \sum_j \vec{p}_j \delta(\vec{x}' - \vec{x}_j)$ (eff. Dipoldichte)

Aber: $\phi_{\text{mikro}} =$ uninteressant für makroskopische Phänomene (und in der Praxis meist nicht berechenbar!)

- **Makroskopische Felder:**

Relevante Größen: Mittelungen $\langle \dots \rangle$ über kleine Bereiche, die

- sehr viele mikroskopische Ladungsträger umfassen, und
- klein sind gegenüber makroskopischen Ausdehnungen.

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \langle \Phi_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V(\vec{x})} d^3 \vec{y} \phi_{\text{mikro}}(\vec{x} + \vec{y}), \quad \Delta V(\vec{x}) = \text{kleines Volumen um } \vec{x} \\ &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V(\vec{x})} d^3 \vec{y} \int d^3 \vec{x}' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\rho_{\text{mikro}}(\vec{x}')}{|\vec{x} + \vec{y} - \vec{x}'|} + \vec{p}_{\text{mikro}}(\vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} + \vec{y} + \vec{x}'|} \right] \end{aligned}$$

Substitution: $\vec{x}' = \vec{x}'' + \vec{y}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \vec{x}'' \frac{1}{\Delta V(\vec{x})} \int d^3 \vec{y} \left[\frac{\rho_{\text{mikro}}(\vec{x}'' + \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{x}''|} + \vec{p}_{\text{mikro}}(\vec{x}'' + \vec{y}) \cdot \vec{\nabla}'' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}''|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \vec{x}'' \left[\frac{\rho(\vec{x}'')}{|\vec{x} - \vec{x}''|} + \vec{P}(\vec{x}'') \vec{\nabla}'' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}''|} \right], \end{aligned} \tag{1.229}$$

wobei: $\rho(\vec{x}) = \langle \rho_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle =$ mittlere Dichte der „freien Überschussladungen“, die nicht aus makroskopischen Verschiebungen stammen.

$\vec{p}(\vec{x}) = \langle \vec{p}_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle =$ mittlere Dipoldichte = „makroskopische Polarisation“

Beachte:

Mittelung $\langle \Phi_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle$ über Potential bei \vec{x} wurde umgeschrieben in Mittelung über felderzeugende Ladungen und Dipoldichte ρ und \vec{P} bei \vec{x}''

Betrachtung von \vec{E} :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &: = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) \\ &= -\vec{\nabla} \langle \Phi_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle \\ &= -\langle \vec{\nabla} \Phi_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{E}_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle \end{aligned} \tag{1.230}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \langle \vec{E}_{\text{mikro}} \rangle = \langle \vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{mikro}} \rangle = \vec{0}. \tag{1.231}$$

1. Elektrostatik

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\Delta\Phi \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}'' \left[\rho(\vec{x}'') + \vec{P}(\vec{x}'') \cdot \vec{\nabla}'' \right] \underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}''|}}_{=-4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}'')} \\
 &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}) + \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3\vec{x}'' \vec{P}(\vec{x}'') \underbrace{\vec{\nabla}'' \delta(\vec{x} - \vec{x}'')}_{=-\vec{\nabla} \delta(\vec{x} - \vec{x}'')} \\
 &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}) - \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \vec{P}(\vec{x})}_{\substack{=: -\rho_{\text{pol}}(\vec{x}), \\ \text{Polarisations-} \\ \text{ladungsdichte}}} .
 \end{aligned} \tag{1.232}$$

Also:

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho(\vec{x}) + \rho_{\text{pol}}(\vec{x})) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{ges}}(\vec{x}), \tag{1.233}$$

ρ_{ges} = gesamte (tatsächliche) Ladungsdichte.

Definition: Dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{1.234}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \vec{D} = \rho(\vec{x}) = \text{Dichte der freien Überschussladung.} \tag{1.235}$$

Randbedingungen an Grenzflächen

→ Ableitung aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ und $\vec{\nabla} \vec{D} = \rho$ wie früher (siehe 2.)

$$\Rightarrow (\vec{D}_I - \vec{D}_{II}) \cdot \vec{n} = \sigma = \text{Flächenladungsdichte der freien Überschussladungen,} \tag{1.236}$$

$$E_I^{\parallel} = E_{II}^{\parallel}. \tag{1.237}$$

Phänomenologische Parametrisierung von \vec{P} :

\vec{P} = materialabhängige Funktion von \vec{E} :

a) *Eigentliche Dielektrika:*

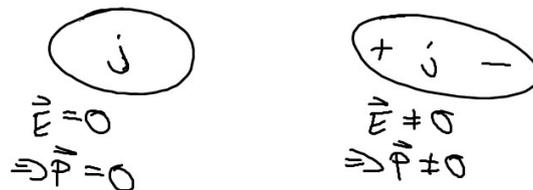


Abbildung 1.27: Verschiebungspolarisation in mikroskopischen Ladungsverbänden

1. Elektrostatik

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} + \dots \quad (1.238)$$

wobei man χ_e als *elektrische Suszeptibilität* bezeichnet. Die nicht-linearen Terme (...) sind bei nicht allzugroßen \vec{E} vernachlässigbar \Rightarrow *lineare Medien*:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad (1.239)$$

(ϵ_r : *relative Dielektrizitätskonstante*, typisch $\epsilon_r \sim 1 - 10$)

Isotrope Dielektrika $\chi_e = \text{Zahl}$.

Anisotrope Dielektrika $\chi_e = \text{Tensor 2. Stufe}$.

b) *Paraelektrika*:

Polarisation durch Ausrichtung von permanenten Dipolen:

$$\chi_e = \chi_e(T) \sim 10 - 100. \quad (1.240)$$

(T : Temperatur) χ_e fällt typischerweise mit steigendem T !

c) *Ferroelektrika*:

Spontane Polarisation ($\chi_e \geq 100$) möglich bei $\vec{E} = 0$, falls $T < T_C = \text{kritische Temperatur} \rightarrow \text{Hysterese-Effekte, etc....}$

Im Folgenden werden wir nur lineare Medien nach a) und b) betrachten!

Beispiele:

(1) Punktladung im polarisierten Medium:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho(\vec{x}) = q \delta(\vec{x}) \\ &= \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}) = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{q \delta(\vec{x})}{\epsilon_0 \epsilon_r}. \end{aligned} \quad (1.241)$$

\Rightarrow Punktladung wird abgeschirmt, $q_{\text{ges}} = \frac{q}{\epsilon_r}$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r |\vec{x}|}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi, \dots \quad (1.242)$$

1. Elektrostatik

(2) Polarisierbare Halbräume mit Punktladung:

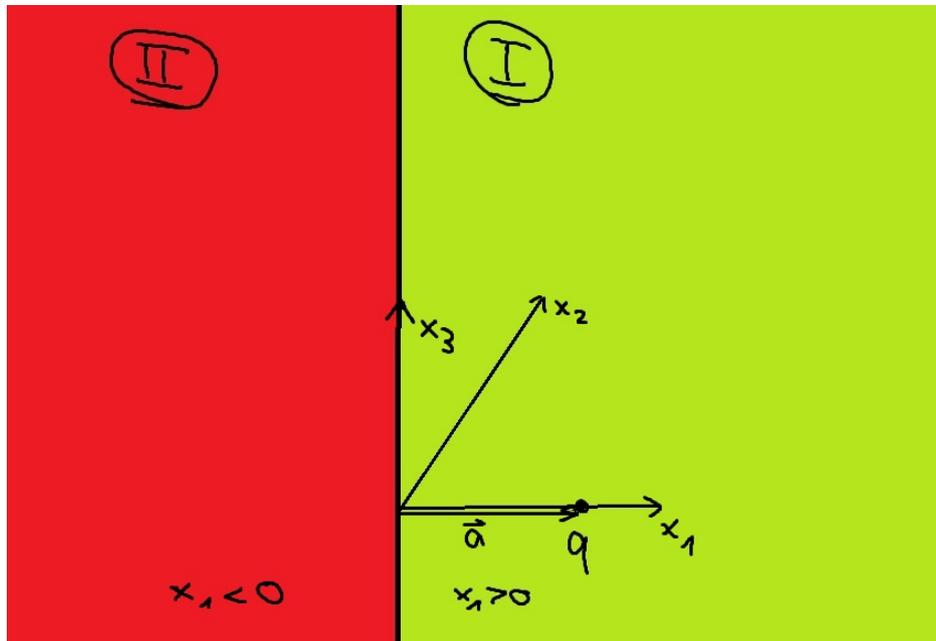


Abbildung 1.28: Zwei Halbräume mit unterschiedlicher Polarisierbarkeit.

- Punktladung bei \vec{a} : $\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{a})$.
- Ansatz für Bildladungen: q' bei $-\vec{a}$ und q'' bei \vec{a} .

→ Ansatz für Φ :

$$\Phi(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_r^I\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{x}-\vec{a}|} + \frac{q'}{|\vec{x}+\vec{a}|} \right), & x_1 > 0, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_r^{II}\epsilon_0} \frac{q''}{|\vec{x}-\vec{a}|}, & x_1 < 0. \end{cases} \quad (1.243)$$

→ Poisson-Gleichung erfüllt:

$$\Delta\Phi = \begin{cases} -\frac{1}{\epsilon_r^I\epsilon_0} q\delta(\vec{x} - \vec{a}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_r^I\epsilon_0}, & x_1 > 0, \\ 0 = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_r^{II}\epsilon_0}, & x_1 < 0, \end{cases} \quad (1.244)$$

d.h.

$$\vec{\nabla}\vec{D} = \epsilon_r\epsilon_0\vec{\nabla}\vec{E} = \rho(\vec{x}) \quad (1.245)$$

1. Elektrostatik

RB:

- D^\perp :

$$\begin{aligned}
 D_1^I &= -\epsilon_r^I \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0^+} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{qa - q'a}{(x_2^2 + x_3^2 + a^2)^{3/2}}, \\
 D_1^{II} &= -\epsilon_r^{II} \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0^-} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q''a}{(x_2^2 + x_3^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (1.246) \\
 \Rightarrow 0 &= D_1^I - D_2^{II} = (-q + q' + q'') \frac{1}{4\pi} \frac{a}{(\dots)^{3/2}} \\
 \Rightarrow q'' &= q - q'.
 \end{aligned}$$

- E^\parallel :

$$\begin{aligned}
 E_2^I &= -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0^+} = \frac{1}{4\pi \epsilon_r^I \epsilon_0} \cdot \frac{qx_2 + q'x_2}{(x_2^2 + x_3^2 + a^2)^{3/2}}, \\
 E_2^{II} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0^-} = \frac{1}{4\pi \epsilon_r^{II} \epsilon_0} \cdot \frac{q''x_2}{(\dots)^{3/2}}. \\
 \Rightarrow 0 &= E_2^I - E_2^{II} = \left(\frac{q + q'}{\epsilon_r^I} - \frac{q''}{\epsilon_r^{II}} \right) \cdot \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{x_2}{(\dots)^{3/2}} \rightarrow \frac{q + q'}{q''} = \frac{\epsilon_r^I}{\epsilon_r^{II}} \quad (1.247)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow q' = \frac{\epsilon_r^I - \epsilon_r^{II}}{\epsilon_r^I + \epsilon_r^{II}} q, \quad q'' = \frac{2\epsilon_r^{II}}{\epsilon_r^I + \epsilon_r^{II}} \cdot q. \quad (1.248)$$

$$\Phi(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi \epsilon_r^I \epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|} + \left(\frac{\epsilon_r^I - \epsilon_r^{II}}{\epsilon_r^I + \epsilon_r^{II}} \right) \cdot \frac{1}{|\vec{x}+\vec{a}|} \right], & x_1 > 0, \\ \frac{q}{4\pi \epsilon_r^{II} \epsilon_0} \cdot \frac{2\epsilon_r^{II}}{\epsilon_r^I + \epsilon_r^{II}} \cdot \frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|}, & x_1 < a. \end{cases} \quad (1.249)$$

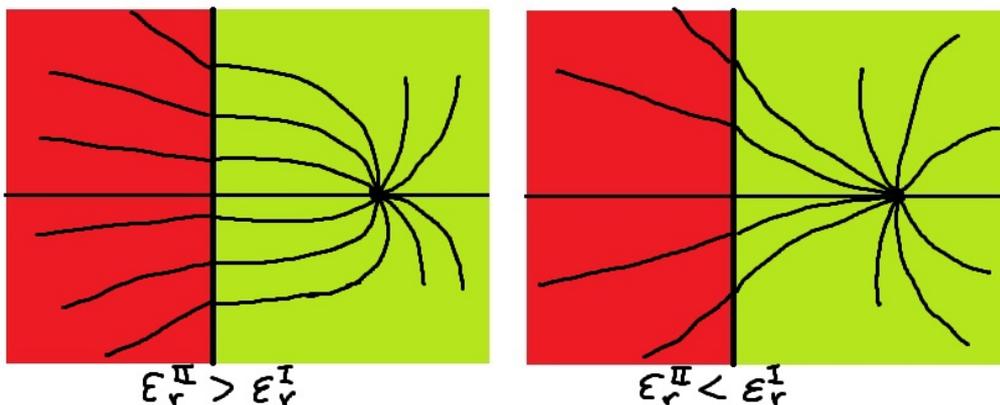


Abbildung 1.29: Qualitative Darstellung der Feldlinien des \vec{E} -Feldes einer Punktladung in einem von zwei Halbräumen unterschiedlicher Polarisierbarkeit. Der linke Fall ($\epsilon_r^{II} > \epsilon_r^I$) entspricht für $\epsilon_r^{II} \rightarrow \infty$ dem der Punktladung über einer Leiterplatte!

1.11 Feldenergiedichte in Medien

Erinnerung: „Vakuum“

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{x} \vec{E}^2 \end{aligned} \quad (1.250)$$

Jetzt: im polarisierbaren Medium \Rightarrow Energieaufnahme im Medium durch Polarisation

Wir betrachten dazu eine Ladungserhöhung im System $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho$

\Rightarrow Energieerhöhung $W \rightarrow W + \delta W$

$$\delta W = \int d^3\vec{x} \Phi(\vec{x}) \delta\rho(\vec{x})$$

Nutzen wir nun, dass $\delta\rho = \delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D})$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int d^3\vec{x} \Phi(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D}(\vec{x})) \\ &= - \int d^3\vec{x} (\vec{\nabla} \Phi) \delta\vec{D} \quad \text{für endlich ausgedehntes } \rho; \text{ nach Gauß} \\ &= \int d^3\vec{x} \vec{E} \cdot \delta\vec{D}. \end{aligned}$$

Für ein lineares Medium: $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E} \delta\vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \cdot \delta\vec{E} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \delta(\vec{E}^2) \\ &= \frac{1}{2} \delta(\vec{E} \cdot \vec{D}). \end{aligned} \quad (1.251)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \vec{E} \cdot \vec{D} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \int d^3\vec{x} \vec{E}^2 = \int d^3\vec{x} w_{\text{el}}(\vec{x}) \end{aligned} \quad (1.252)$$

Also ist die elektrische Energiedichte:

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}. \quad (1.253)$$

2. Magnetostatik

2.1 Elektrischer Strom

→ Beschreibung von Ladungsbewegungen

$$\vec{j} d\vec{A} := \text{Ladung, die pro Zeit durch die Fläche } d\vec{A} \text{ tritt.} \quad (2.1)$$

\vec{j} : Elektrische Stromdichte

Ladungserhaltung:

Elektrische Stromstärke / Strom:

$$I = \int_A d\vec{A} \cdot \vec{j} \quad (2.2)$$

I = Ladung, die pro Zeit durch die Oberfläche A tritt. Für eine geschlossene Oberfläche ist:

$$I = \oint_{A(V)} d\vec{A} \cdot \vec{j} = -\frac{d}{dt} \int_V d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) = -\int_V d^3\vec{x} \frac{\partial \rho(\vec{x})}{\partial t} \quad (2.3)$$

für ein konstantes Volumen.

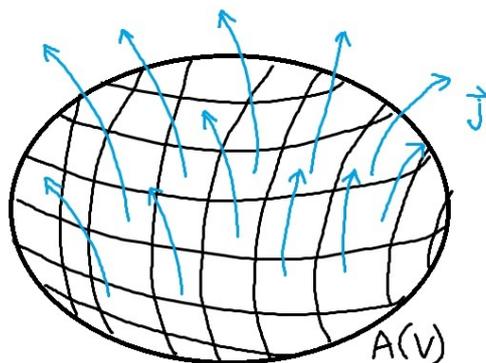


Abbildung 2.1: Die Stromdichte \vec{j} tritt durch die Fläche $A(V)$.

2. Magnetostatik

$$\Rightarrow 0 = \oint_{A(V)} d\vec{A} \cdot \vec{j} + \int_V d^3\vec{x} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\text{Gauss: } = \int_V d^3\vec{x} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

Da $V =$ beliebig:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}) \quad (2.5)$$

Stromfaden

→ beliebig dünner Leiterfaden ↔ Gegenstück zur Punktladung der E-Statik.

$$d\vec{\ell} = \vec{t} \, d\ell, \quad (2.6)$$

wobei \vec{t} der normierte Tangentenvektor ist und $d\ell$ das Längenelement.

$$\Delta\vec{A} = \int_{\Delta A} d\vec{A} \approx \vec{t} \, \Delta A, \quad d^3\vec{x} = dA \, d\ell \quad (2.7)$$

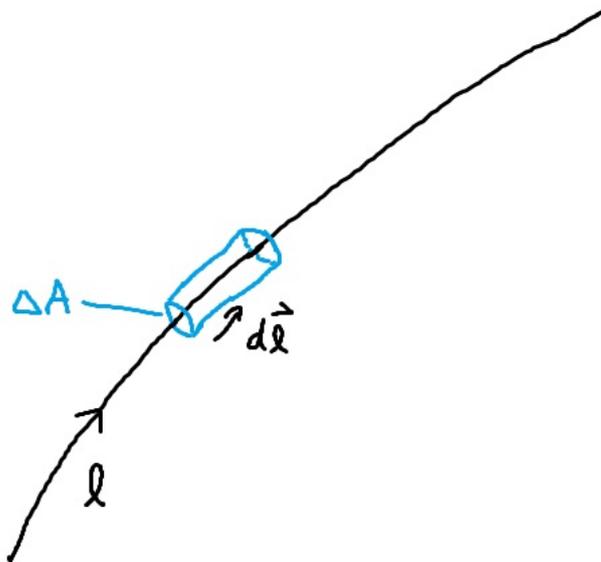


Abbildung 2.2: Faden $\vec{\ell}$ mit Längenelement $d\vec{\ell}$ welches durch eine kleine, ebene Querschnittsfläche ΔA tritt.

Somit ist der Strom durch die Fläche ΔA :

$$I = \int_{\Delta A} \vec{j} \cdot \vec{A} = \int_{\Delta A} \int |\vec{j}| \, dA = |\vec{j}| \cdot \Delta A, \quad (2.8)$$

2. Magnetostatik

$$\begin{aligned} \int_{\ell} I d\vec{\ell} &= \int_{\ell} \vec{t} d\ell \int_{\Delta A} dA |\vec{j}| \\ &= \int_{\Delta V(\ell)} d^3\vec{x} \vec{j}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ohm'sches Gesetz:

In vielen Materialien gilt:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2.10)$$

mit σ als *Leitfähigkeit*

$$\sigma = \text{const.} \quad (2.11)$$

d.h. σ hängt nicht vom Feld ab!

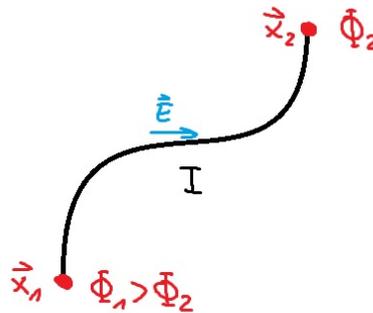


Abbildung 2.3: Vom Ort \vec{x}_1 mit Potential ϕ_1 zum Ort \vec{x}_2 fließt ein Strom I , hervorgerufen durch das elektrische Feld \vec{E} .

Für Leiterfaden: An den Orten \vec{x}_1 und \vec{x}_2 sei jeweils ein Potential ϕ_1 bzw. ϕ_2 , dazwischen ein \vec{E} -Feld. Dann ist die Spannung:

$$\begin{aligned} U := \phi_1 - \phi_2 &= - \int_{\vec{x}_2}^{\vec{x}_1} d\vec{\ell} \vec{E} = + \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{\ell} \vec{E} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{\ell} \frac{\vec{j}}{\sigma} \\ &= \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\ell \frac{I}{\Delta A \sigma} = I \underbrace{\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\ell \frac{1}{\Delta A \sigma}}_{=: R \text{ Widerstand}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Stationäre Ströme / Ladungsverteilungen

→ keine zeitliche Änderung von \vec{j} und ρ trotz Ladungsfluss, d.h.

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.13)$$

2. Magnetostatik

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.14)$$

Beachte: eine bewegte Punktladung liefert keinen statischen Strom:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}) &= q\delta(\vec{x} - \vec{r}(t)), & \vec{r}(t) &= \text{Bahnkurve der Punktladung,} \\ \vec{j}(\vec{x}) &= q\vec{r}\delta(\vec{x} - \vec{r}(t)). \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.2 Gesetze von Ampère und Biot-Savart

Experimentelle Grundlagen:

- Es gibt keine magnetischen Ladungen, d.h. keine magnetischen Monopole.
- Magnetische Felder werden von mg. Dipolen bzw. elektrischen Strömen erzeugt.
- Magnetische Felder gehorchen dem Superpositionsprinzip.

Quantitativ: Ampère'sches Gesetz ($\hat{=}$ Coulomb-Gesetz der E-Statik)

Betrachte zwei Leiterschleifen in denen die Ströme I_1 bzw. I_2 fließen.

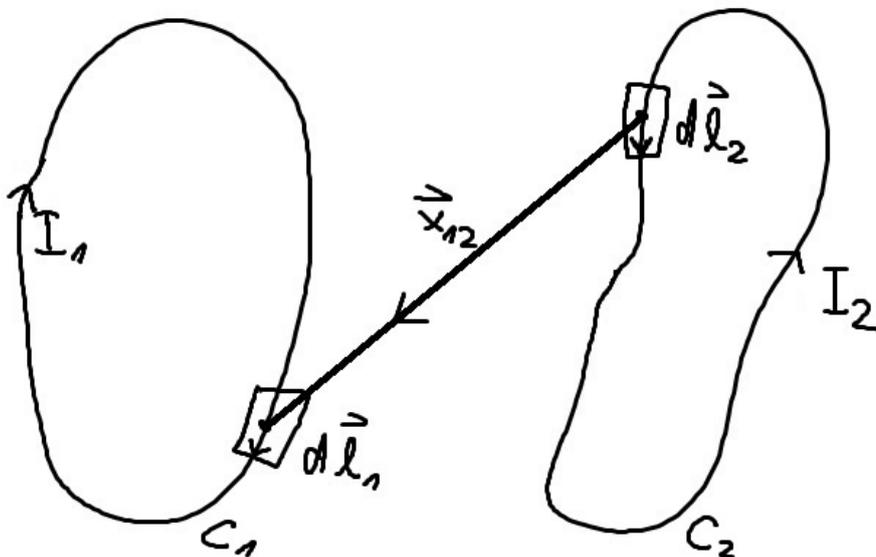


Abbildung 2.4: Zwei Leiterschleifen in denen die Ströme I_1 bzw. I_2 fließen.

Die Kraft F_{12} von Leiterschleife 2 auf 1 ist gegeben durch:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\vec{\ell}_1 \times \frac{(d\vec{\ell}_2 \times \vec{x}_{12})}{|\vec{x}_{12}|^3} \quad (2.16)$$

2. Magnetostatik

wobei $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$.

Zwei parallel hängende Fäden mit gleichgerichteten Strömen ziehen sich also an.

Überprüfung von Actio=Reactio

$$d\vec{\ell}_1 \times (d\vec{\ell}_2 \times \vec{x}_{12}) = (d\vec{\ell}_1 \cdot \vec{x}_{12})d\vec{\ell}_2 - (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2)\vec{x}_{12}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} = -\vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \quad (2.18)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[- \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) \frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} - \oint_{C_2} d\vec{\ell}_2 \underbrace{\oint_{C_1} d\vec{\ell}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}}_{\substack{= 0 \text{ nach Stokes und} \\ \vec{\nabla}_1 \times \vec{\nabla}_1 = 0.}} \right] \quad (2.19)$$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) \frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} \quad (2.20)$$

$$= -\vec{F}_{21}, \text{ da } \vec{x}_{21} = -\vec{x}_{12}.$$

Bemerkung: Die Kraft zwischen zwei geraden Leitern wird zur Einheitendefinition $[I] = 1\text{A}$ herangezogen und somit indirekt für $[q] = 1\text{C}$.

Magnetische Flussdichte/ Induktion

Def:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \begin{array}{l} \text{magnetische Flussdichte,} \\ \text{die vom Strom } I \text{ durch die} \\ \text{Schleife } C \text{ erzeugt wird (} d\vec{x}' = \\ \text{Stromrichtung)} \end{array} \quad (2.21)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \begin{array}{l} \text{Verallgemeinerung auf allge-} \\ \text{meine Stromverteilung in } V \\ \text{durch Superposition} \end{array}$$

„Biot-Savart'sches Gesetz“

\Rightarrow Kraft auf Leiterschleife C_1 bzw. Stromverteilung \vec{j}_1 in V_1 die von einem externen Feld $\vec{B}_2(\vec{x}_1)$ ausgeübt wird (aus \vec{F}_{12} oben!)

$$\vec{F}_{12} = I_1 \oint_{C_1} d\vec{\ell}_1 \times \vec{B}_2(\vec{x}_1) \quad (2.22)$$

$$= \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \vec{j}_1(\vec{x}_1) \times \vec{B}_2(\vec{x}_1).$$

2. Magnetostatik

Lorentz-Kraft:

Kraft, die auf eine bewegte Punktladung bei $\vec{r}(t)$:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q \left[\vec{E}(\vec{r}) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}) \right] \\ &= \int_V d^3\vec{x} \left[\rho(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) + \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) \right].\end{aligned}\quad (2.23)$$

Beachte: Magnetischer Anteil hat analoge Form zum Ampère'schen Gesetz, obwohl Strom der Punktladung nicht stationär. → Experimentelle Bestätigung!

2.3 Feldgleichungen

Verwende

$$\begin{aligned}\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} &= -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \Rightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{\nabla} \frac{-1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)}_{=:\vec{A}(\vec{x})}\end{aligned}\quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{\nabla} \vec{B} &= 0, \quad \text{denn:} \\ \vec{\nabla} \vec{B} &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (\text{Quellfreiheit des } \vec{B}\text{-Feldes})\end{aligned}\quad (2.25)$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\vec{\nabla} \int_V d^3\vec{x}' \left(\vec{j}(\vec{x}') \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}_{=-\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}} \right) - \int_V d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \underbrace{\Delta \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)}_{=-4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\vec{\nabla} \int_V d^3\vec{x}' \left(\vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) + 4\pi \vec{j}(\vec{x}) \right].\end{aligned}\quad (2.26)$$

Nun ist jedoch:

$$\vec{j}(\vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \underbrace{\left(\vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{x}') \right)}_{=0, \text{ Stationarität von } \vec{j}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|},\quad (2.27)$$

2. Magnetostatik

und somit

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \underbrace{\int_V d^3\vec{x}' \vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)}_{\substack{= \oint_{\text{Gauß } A(V)} d\vec{A}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ = 0, \text{ wenn Oberflächenströme} = 0 \\ (V \text{ groß genug wählen!})}} + \mu_0 \vec{j}(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

also

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{„Ampère'sches Durchflutungsgesetz“} \quad (2.29)$$

→ Integrale Form:

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{C(A)} \vec{B} \cdot d\vec{x} = \int_A d\vec{A} \mu_0 \vec{j} = \mu_0 I_A, \quad (2.30)$$

wobei I_A = Strom durch A ist.

Feldgleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}} \quad (2.31)$$

Frage: Ist \vec{B} damit vollständig und allgemein charakterisiert?

Mathematischer Exkurs: Helmholtz-Zerlegung von Vektorfeldern

Ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$, das für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ „hinreichend schnell“ gegen Null strebt, kann in divergenz- und rotationsfreie Anteile zerlegt werden:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}_\ell(\vec{x}) + \vec{F}_t(\vec{x}), \quad \vec{\nabla} \times \vec{F}_\ell = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_t = 0 \quad (2.32)$$

Umgekehrt ist $\vec{F}(\vec{x})$ durch $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_\ell$ und $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}_t$ eindeutig bestimmt.

Beweis:

1) Existenz:

Def.:

$$\vec{F}_t(\vec{x}) := \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \int d^3\vec{x}' \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_t = 0. \quad (2.33)$$

2. Magnetostatik

Auswertung analog zu $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ oben:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right) &= \vec{\nabla} \left(\vec{F}(\vec{x}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \vec{F}(\vec{x}') \Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\
 &= -\vec{\nabla} \left(\vec{F}(\vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) + 4\pi \vec{F}(\vec{x}') \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\
 &= -\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right) + \vec{\nabla} \left(\frac{(\vec{\nabla}' \vec{F}(\vec{x}'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \\
 &\quad + 4\pi \vec{F}(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}')
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Integration über $\frac{1}{4\pi} \int d^3 \vec{x}'$ liefert:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_t(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3 \vec{x}' \vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3 \vec{x}' \frac{(\vec{\nabla}' \vec{F}(\vec{x}'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{F}(\vec{x}) \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{=\text{Oberflächenintegral} \\ \text{im Unendlichen} \\ \text{nach Gau\ss'schem} \\ \text{Satz} \rightarrow 0 \text{ nach} \\ \text{Voraussetzung}}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=:-\vec{F}_\ell(\vec{x}), \text{ wobei } \vec{\nabla} \times \vec{F}_\ell = 0} + \vec{F}(\vec{x})
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_\ell + \vec{F}_t$ per Konstruktion.

2) Eindeutigkeit bei gegeb. $\vec{\nabla} \vec{F}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

Annahme: Sei $\vec{\nabla} \vec{F}_1 = \vec{\nabla} \vec{F}_2$ und $\vec{\nabla} \times \vec{F}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{F}_2$

\rightarrow zu zeigen: $\vec{F}_1 \equiv \vec{F}_2$ bzw. $\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \equiv 0$

Aus $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ folgt $\vec{F} = \vec{\nabla} g$ mit $\Delta g = \vec{\nabla} \vec{F} = 0$.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_V d^3 \vec{x} (\vec{\nabla} g)^2 &= \int_V d^3 \vec{x}' (\vec{\nabla} g) \cdot (\vec{\nabla} g) \\
 &= \int_V d^3 \vec{x} \left[\vec{\nabla} \cdot (g \cdot \vec{\nabla} g) - \underbrace{g(\Delta g)}_{=0} \right] \\
 &\stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \oint_{A(V)} d\vec{A} \cdot g(\vec{\nabla} \vec{g}) \\
 &= \oint_{A(V)} d\vec{A} \cdot g \cdot \vec{F} \rightarrow 0,
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

2. Magnetostatik

wenn $V \rightarrow \mathbb{R}^3$, da Oberfläche selbst $A(V) \rightarrow \infty$ und $\vec{F}(x) \rightarrow 0$ hinreichend schnell.

$$\Rightarrow \vec{\nabla} g \equiv \vec{F} \equiv 0. \quad (2.37)$$

Folgerung:

$\vec{\nabla} \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ zusammen mit RB $\vec{B} \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$ (hinreichend schnell) bestimmen $\vec{B}(\vec{x})$ eindeutig!

2.4 Vektorpotential

Aus der Helmholtz-Zerlegung folgt, dass \vec{B} darstellbar als

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{A} = \text{Vektorpotential}. \quad (2.38)$$

Aber: \vec{A} ist nicht eindeutig, da weder $\vec{\nabla} \vec{A}$ noch RB an \vec{A} festgelegt.

Sei $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{A} - \vec{A}') = 0$

$$\Rightarrow \vec{A}' - \vec{A} = \vec{\nabla} \psi. \quad (2.39)$$

\vec{A} ist nur bis auf ein Gradientenfeld $\vec{\nabla} \psi$ (ψ =beliebig) eindeutig!

\Rightarrow Eichtransformation: $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \psi$, $\phi \rightarrow \phi' + const$ ändern die statischen Felder \vec{B} und \vec{E} nicht.

Feldgleichung für \vec{A} :

- $\vec{\nabla} \vec{B} = 0$ ist automatisch erfüllt: $\vec{\nabla} \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$.
- Aus $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ folgt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \\ \Rightarrow \Delta \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j}, \quad \text{falls } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \text{ (Coulomb-Eichung)}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Explizite Darstellung für \vec{A} :

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 \vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla} \psi(\vec{x}), \quad (2.41)$$

wobei der erste Teil in 2.3 explizit konstruiert wurde und die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ erfüllt für stat. Ströme $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$; der zweite Teil ist ein beliebiges Gradientenfeld, z.B. eine Konstante \vec{A}_0 .

2. Magnetostatik

Beispiele:

1) Homogenes \vec{B} -Feld:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= \vec{B}_0 = \text{const} \\ \Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{1}{2}\vec{B}_0 \times \vec{x} + \vec{\nabla}\psi.\end{aligned}\quad (2.42)$$

Z.B. $\vec{B} = B_0\vec{e}_3$:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2}B_0 \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{\nabla}\psi \quad (2.43)$$

also z.B.:

$$\vec{A}_1 = \frac{B_0}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_2 = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \psi_2 = \frac{1}{2}x_1x_2B_0. \quad (2.44)$$

2) Linearer Stromfaden:

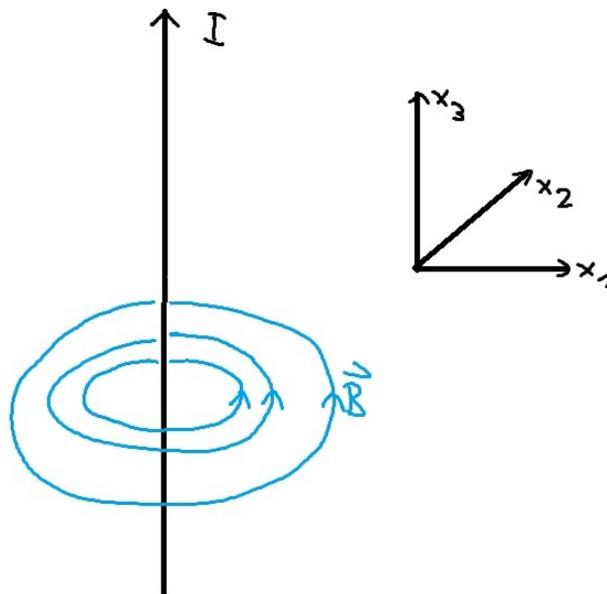


Abbildung 2.5: B -Feld eines linearen Stromfadens

$$\vec{j} = I\vec{e}_3\delta(x_1)\delta(x_2) = I\vec{e}_3\delta^{(2)}(\vec{x}). \quad (2.45)$$

2. Magnetostatik

Wir verwenden auf Grund der Symmetrie Zylinderkoordinaten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_3 \int_{-L}^{+L} dx'_3 \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - x'_3)^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_z \int_{-L}^{+L} dz' \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} \Big|_{L \rightarrow \infty} \rightarrow \infty, \text{ falls Leiterlänge } L \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Problem: Stromverteilung reicht bis ins Unendliche.

→ \vec{A} kann divergieren für $|\vec{x}'| \rightarrow \infty$.

Aber: Divergender Anteil in \vec{A} hängt nicht von \vec{x} ab!

→ Potentialdifferenz $\vec{A}(\vec{x}) - \vec{A}(\vec{x}_0)$, wobei $\vec{A}(\vec{x}_0)$ einen bel. Referenzpunkt angibt, ist wohldefiniert!

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) - \vec{A}(\vec{x}_0) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_z \int_{-L}^{+L} dz' \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - z')^2}} \Big|_{L \rightarrow \infty} \\ &= \underbrace{\left[\ln(z' - z + \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}) - \ln(z' - z_0 + \sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - z')^2}) \right]}_{\Big|_{-\infty}^{+\infty}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_z \ln \left(\frac{z' - z + \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}}{z' - z_0 + \sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - z')^2}} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_z (\ln(z/z) - \ln(\rho^2/\rho_0^2)) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_z \cdot 2 \ln \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \vec{e}_z \ln \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \vec{\nabla} \times (-\vec{e}_z \ln \rho) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (2.49)$$

2. Magnetostatik

wobei die Rotation in Zylinderkoordinaten in diesem Fall gegeben ist durch:

$$\vec{\nabla} \times (f_z \vec{e}_z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_z}{\partial \varphi} \vec{e}_\rho - \frac{\partial f_z}{\partial \rho} \vec{e}_\varphi. \quad (2.50)$$

Nebenprodukt:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A}(\vec{x}) &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \vec{e}_z \cdot \Delta \ln \rho \\ &= -\mu_0 \vec{j} = -\mu_0 I \vec{e}_z \cdot \delta^{(2)}(\vec{x}) \\ \Rightarrow \Delta_2 \ln |\vec{x}^{(2)}| &= 2\pi \delta^{(2)}(\vec{x}^{(2)}), \end{aligned} \quad (2.51)$$

wobei $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

2.5 Magnetisches Dipolmoment

Fernfeld einer stationären Stromverteilung

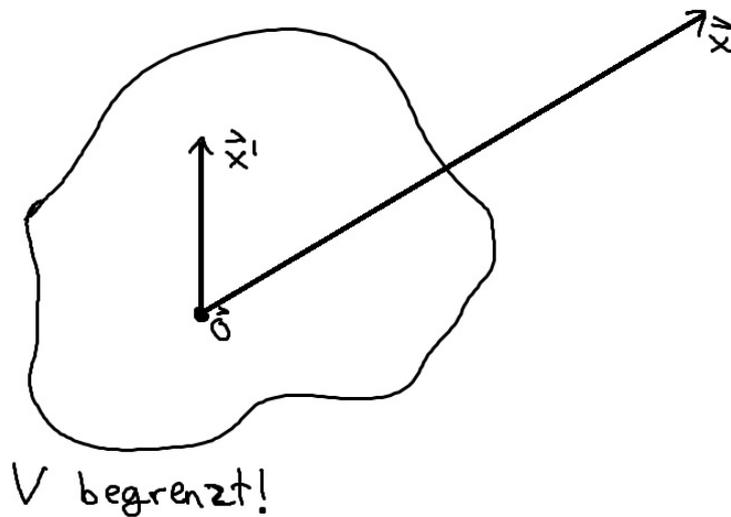


Abbildung 2.6: Begrenztes Volumen V mit $\vec{x}' \in V$.

2. Magnetostatik

$$\begin{aligned}
 \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \underbrace{\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}_{=1/r + \frac{\vec{x}\vec{x}'}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-3})}, \quad r = |\vec{x}| \gg |\vec{x}'| \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} \cdot \vec{x}') + \mathcal{O}(r^{-3}).
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Umformungen für $\vec{\nabla}' \vec{j} = 0$:

$$\begin{aligned}
 \int_V d^3\vec{x}' &= \frac{\int_V d^3\vec{x}' \left(\underbrace{f(\vec{x}') \cdot \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' g(\vec{x}')}_{\vec{\nabla}'(f\vec{j}g)} - \underbrace{g\vec{j}(\vec{\nabla}' f)}_{=0} - \underbrace{fg(\vec{\nabla}' \vec{j})}_{=0} \right)}{\vec{\nabla}'(f\vec{j}g)} = - \int_V d^3\vec{x}' g(\vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') \vec{\nabla}' f(\vec{x}') \\
 &\rightarrow 0, \text{ da Oberflächenintegral verschwindet } (\vec{j} = \vec{0} \text{ außerhalb von } V)
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

- $f \equiv 1, g = x'_k$:

$$\begin{aligned}
 &\vec{j} \cdot (\vec{\nabla}' x'_k) = \vec{j} \vec{e}_k = j_k \\
 \Rightarrow \int_V d^3\vec{x}' j_k(\vec{x}') &= 0, \text{ d.h. } \int_V d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') = \vec{0}.
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

- $f = x'_k, g = x'_\ell$:

$$\int_V d^3\vec{x}' x'_k j_\ell = - \int_V d^3\vec{x}' x'_\ell j_k. \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V d^3\vec{x}' \underbrace{\vec{j}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} \cdot \vec{x}')}_{=\sum_{k,\ell} \vec{e}_k j_k x'_\ell x'_\ell \xrightarrow{(2.55)} -\sum_{k,\ell} \vec{e}_k x'_k j_\ell x'_\ell} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \cdot \frac{1}{2} \int_V d^3\vec{x}' \underbrace{\left[\vec{j}(\vec{x}') \cdot (\vec{x}\vec{x}') - \vec{x}' \left(\vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{x} \right) \right]}_{=-\vec{x} \times (\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}'))} \\
 &= -\vec{x} \times \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \cdot \frac{1}{2} \int_V d^3\vec{x}' \vec{x}' \times \vec{j} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{p}_m \times \vec{x}}{r^3}, \\
 \vec{p}_m &:= \frac{1}{2} \int_V d^3\vec{x}' \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') \text{ „magnetisches Dipolmoment“}.
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

2. Magnetostatik

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{x}(\vec{x}\vec{p}_m) - \vec{p}_m r^2}{r^3} \quad (2.57)$$

Beispiel: Ebene Leiterschleife mit Strom I

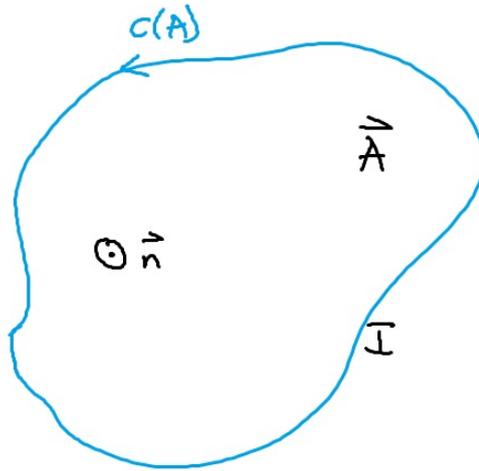


Abbildung 2.7: Ebener Stromfaden der eine Fläche A umschließt

$$\vec{j} d^3\vec{x} = I d\vec{\ell} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_m &= \frac{1}{2} \oint_{C(A)} \vec{x} \times d\vec{\ell} \cdot I \\ &= I \cdot \vec{A}, \quad \vec{A} = A \cdot \vec{n}, \quad \vec{n} = \text{Flächennormale.} \end{aligned} \quad (2.59)$$

2. Magnetostatik

Kraft auf Stromverteilung im äußeren B -Feld

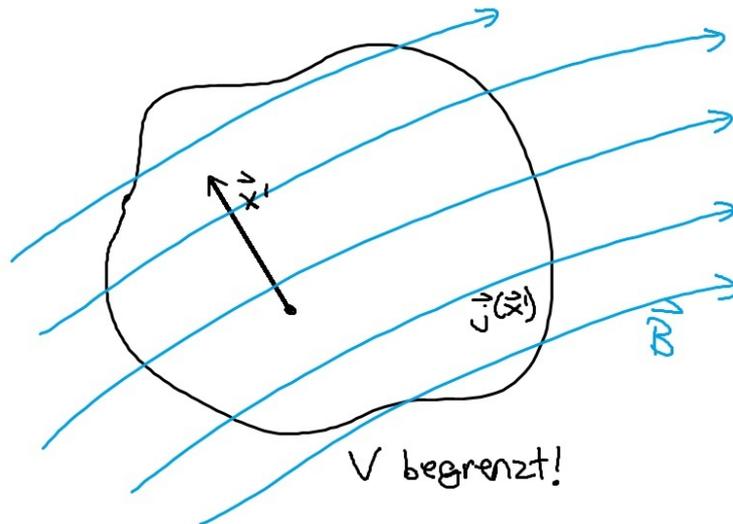


Abbildung 2.8: Das Volumen V wird vom Feld \vec{B} durchsetzt.

$$B_k(\vec{x}) = B_k(\vec{0}) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} B_k(\vec{0}) + \mathcal{O}(\vec{x}^2), \quad (2.60)$$

dabei sei der Abstand \vec{x}' in V klein gegen typische Abstände, in denen \vec{B} variiert. Mit

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (i, j, k) \text{ zyklische Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ -1, & \text{falls } (i, j, k) \text{ anti-zyklische Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.61)$$

2. Magnetostatik

ist die Kraft auf V :

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \int_V d^3 \vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}(\vec{x}') \\
 &= \underbrace{\int_V d^3 \vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}(0)}_{\vec{j} \rightarrow 0} + \int_V d^3 \vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \times \underbrace{\left((\vec{x}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{x}) \right)}_{=\sum_{i,j} x'_i \partial_i B_j \vec{e}_j} \Big|_{\vec{x}=0} + \dots \\
 &= \int_V d^3 \vec{x}' \sum_{k,\ell,j} \epsilon_{k\ell j} \vec{e}_k \underbrace{j_\ell \sum_i x'_i \partial_i}_{\substack{\xrightarrow{(2.55)} \frac{1}{2} \sum_i (j_\ell x'_i - j_i x'_\ell) \partial_i \\ = \frac{1}{2} [j_\ell (\vec{x}' \cdot \vec{\nabla}) - x'_\ell (\vec{j} \cdot \vec{\nabla})] \\ = \frac{1}{2} [(\vec{x}' \times \vec{j}) \times \vec{\nabla}]_\ell}} B_j(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=0} \\
 &= \sum_{k,\ell,j} \vec{e}_k \epsilon_{k\ell j} (\vec{p}_m \times \vec{\nabla})_\ell B_j(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=0} \\
 &= (\vec{p}_m \times \nabla) \times \vec{B}(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=0} \\
 &= \vec{\nabla} \left(\vec{p}_m \cdot \vec{B}(\vec{x}) \right) \Big|_{\vec{x}=0} - \underbrace{\vec{p}_m \cdot (\vec{\nabla} \vec{B}(\vec{0}))}_{=0} \\
 &= \vec{\nabla} \left(\vec{p}_m \cdot \vec{B}(\vec{x}) \right) \Big|_{\vec{x}=0}.
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Für stationäre Felder ($\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$):

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}_m \cdot \vec{B}) = \vec{p}_m \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + (\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = (\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=0} \tag{2.63}$$

⇒ „Orientierungsenergie“ im \vec{B} -Feld:

$$W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}. \tag{2.64}$$

Dies ist *nicht* die Energie, um einen Dipol ins Feld zu bringen!

2. Magnetostatik

Drehmoment auf Dipol im äußeren B -Feld:

$$\begin{aligned}
 \vec{N} &= \int_V \vec{x}' \times \underbrace{d\vec{F}'}_{\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}(\vec{x}') d^3\vec{x}'} \\
 &= \int_V d^3\vec{x}' \underbrace{\vec{x}' \times \left(\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}(\vec{0}) \right)}_{= \vec{j}(\vec{x}') \cdot (\vec{x}' \cdot \vec{B}) - \vec{B} \cdot \left(\underbrace{\vec{x}' \cdot \vec{j}(\vec{x}')}_{\rightarrow 0} \right)} + \dots \\
 &= \frac{1}{2} \int_V d^3\vec{x}' \left[\vec{j}(\vec{x}') \left(\vec{x}' \vec{B}(\vec{0}) \right) - \vec{x}' \left(\vec{j}(\vec{x}') \vec{B}(\vec{0}) \right) \right] \\
 &= \vec{B}_0 \times \frac{1}{2} \int_V d^3\vec{x}' \left(\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') \right) \\
 &= \vec{p}_m \times \vec{B}(\vec{0}).
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

2.6 Makroskopische Magnetostatik

→ Mittelungsprozess über mikroskopische Bereiche analog zur makroskopischen E -Statik.

- B -Feld:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \langle \vec{B}_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle, \tag{2.66}$$

wobei \vec{B}_{mikro} von mikroskopischen Strömen und permanenten Dipolen erzeugt wird. Eine quantitative Erfassung ist zu kompliziert und unnötig!

$$\langle \vec{B}_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V(\vec{x})} d^3\vec{y} \vec{B}_{\text{mikro}}(\vec{x} + \vec{y}), \tag{2.67}$$

$$\vec{\nabla} \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \langle \vec{B}_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle \stackrel{\text{Linearität d. Mittelung}}{=} \langle \vec{\nabla} \vec{B}_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle = \langle 0 \rangle = 0 \tag{2.68}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \tag{2.69}$$

d.h. \vec{B} aus makroskopischem Vektorpotential \vec{A} ableitbar.

- Strom:

$$\langle \vec{j}_{\text{mikro}} \rangle = \vec{j} + \vec{j}_m + \vec{j}_{\text{pol}} =: \vec{j}_{\text{ges}}, \tag{2.70}$$

wobei sich \vec{j} aus der Bewegung freier Ladungsträger ergibt. \vec{j}_m bezeichnet die Magnetisierungsstromdichte durch stationäre Bewegung atomar gebundener Ladungsträger. Stationarität $\rightarrow \vec{\nabla} \vec{j}_m = 0$. \vec{j}_{pol} wird hervorgerufen durch die Verschiebung der Ladung $\rho_{\text{pol}} d^3\vec{x}$, die zu $\vec{P} \neq 0$ führt:

$$\frac{\partial \rho_{\text{pol}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{pol}} = 0 \tag{2.71}$$

2. Magnetostatik

d.h. $\vec{j}_{\text{pol}} = \dot{\vec{P}} \rightarrow \vec{0}$ in der Magnetostatik. (Beitrag = 0 in diesem Kapitel!)

- „Magnetisierung“: $\vec{M}(\vec{x})$ = magnetische Dipoldichte, die durch \vec{j}_m und Ausrichtung permanenter magnetischer Dipole effektiv erzeugt wird.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 \vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 \vec{x}' \underbrace{\frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}_{=\vec{M}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) + \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 \vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}') + \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \end{aligned} \tag{2.72}$$

wobei $\int d^3 \vec{x}' \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \rightarrow 0$ (als Oberflächenintegral).

$$\Rightarrow \vec{j}_m(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{x}) \tag{2.73}$$

Feldgleichungen und mg. Feldstärke

Definition:

$$\vec{H} := \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \tag{2.74}$$

bezeichnet man als *magnetische Feldstärke*

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{=\vec{j}_{\text{ges}} \cdot \mu_0} - \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_{\text{ges}} - \vec{j}_m = \vec{j}, \tag{2.75}$$

d.h. \vec{H} wird durch die frei beweglichen Ladungen bestimmt. Somit sind die Feldgleichungen der Magnetostatik

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} \end{aligned}} \tag{2.76}$$

zum Vergleich die der E-Statik:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \end{aligned}} \tag{2.77}$$

Beachte: \vec{B} und \vec{E} sind die eigentlichen Messgrößen, da die von tatsächlich vorhandenen Ladungen und Strömen erzeugt werden.

Verhalten von \vec{B} und \vec{H} and Grenzflächen:

→ Betrachtung von infinitesimalen Volumen / Wegen wie in der E-Statik!

- Normalkomponenten: $(\vec{B}_I - \vec{B}_{II}) \cdot \vec{n}_I = 0$, da $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

2. Magnetostatik

- a) Diamagnetismus: keine permanenten magnetischen Dipole, d.h. reine Induktionseffekte an mikroskopischen Strömen.
 $\chi_m < 0$, typisch $|\chi_m| \sim 10^{-5}$ (kaum temperaturabhängig). Für $\chi_m = -1$ erhält man einen perfekten Diamagneten, z.B. Supraleiter (Meißner-Ochsenfeld-Effekt).
- b) Paramagnetismus: Ausrichtung permanenter Dipole (z.B. aus Spin und Bahndrehimpuls der e^- , Kernspin, ...).
 $\chi_m = \chi_m(T) > 0$, $\chi_m \sim 10^{-6} - 10^{-2}$ (starke Temperaturabhängigkeit!)
- c) Ferromagnetismus: Spontane Ausrichtung permanenter magnetischer Dipole, falls $T < T_C$ (Curie-Temperatur).
 $\chi_m = \chi_m(T, H)$, typisch:

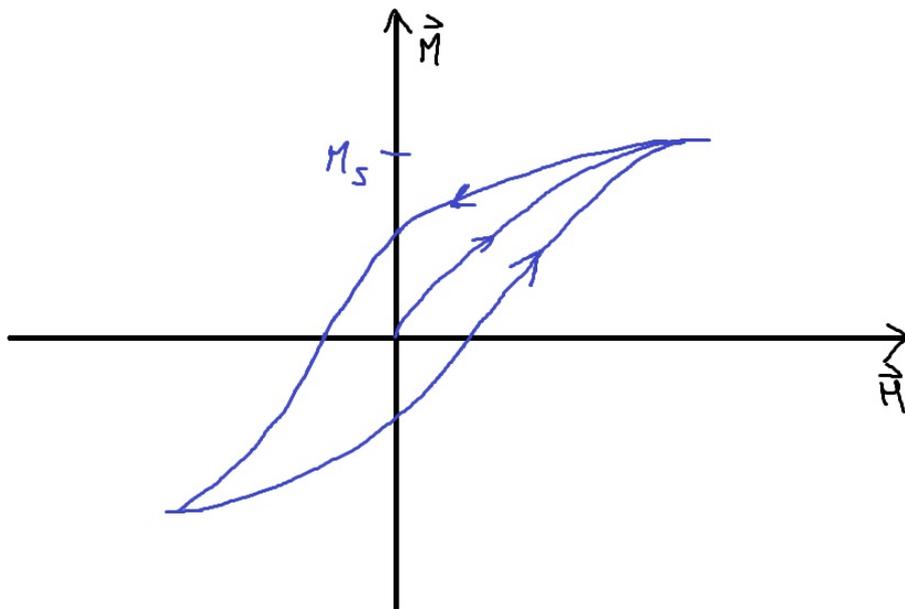


Abbildung 2.10: Typische Hysteresekurve von Ferromagnetika. Der Startwert bei $(0,0)$ gilt nur bei vollständiger Entmagnetisierung (z.B. durch Erwärmung), d.h. mikroskopischer Unordnung. Die Magnetisierungskurve weist eine starke Nicht-Linearität auf.

Zur RWA der Magnetostatik

→ Methoden Analog zur E -Statik, z.T. komplizierter durch Vektorcharakter des Potentials \vec{A} .

Sonderfall $\vec{j} \equiv \vec{0}$:

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \rightarrow \vec{H}$ ist aus einem *magnetischen Skalarpotential* Φ_m ableitbar: $\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_m$.

2. Magnetostatik

- Für lineare Medien ($\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$) folgt zusätzlich:

$$0 = \vec{\nabla} \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{\nabla} \vec{H}, \quad (2.82)$$

d.h. $\Delta \Phi_m = 0$ (Laplace-Gleichung)

Beispiel: Magnetisierbare Kugel im homogenen \vec{B} -Feld

Problem:

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} = \vec{0} \quad (2.83)$$

d.h. $\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_m$.

Randbedingungen:

- B^\perp und H^\parallel sind stetig bei $r = R$ (Kugel vom Radius R ist im Ursprung zentriert)
- $\vec{B} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} B_0 \vec{e}_3$

Methode: Multipolentwicklung für Φ_m !

Innen:

$$\vec{B}^i = \mu_r \mu_0 \vec{H}^i, \quad \Phi_m^i = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell r^\ell P_\ell(\cos \theta). \quad (2.84)$$

Außen:

$$\vec{B}^a = \mu_0 \vec{H}^a, \quad \Phi_m^a = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell r^{-\ell-1} P_\ell(\cos \theta)}_{\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell^a r^\ell P_\ell(\cos \theta)}_{\substack{! \\ \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -x_3 \frac{B_0}{\mu_0} = -\frac{B_0}{\mu_0} r P_1(\cos \theta)}} \quad (2.85)$$

$$\Rightarrow a_1^a = -\frac{B_0}{\mu_0}, \quad a_\ell^a = 0 \quad \forall \ell \neq 1. \quad (2.86)$$

- Normalkomponente bei $r = R$: $B_r^i(r = R) \stackrel{!}{=} B_r^a(r = R)$.

$$B_r^i = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \Phi_m^i = -\mu_r \mu_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \ell r^{\ell-1} P_\ell(\cos \theta), \quad (2.87)$$

$$B_r^a = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \Phi_m^a = +\mu_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell (\ell + 1) r^{-\ell-2} P_\ell(\cos \theta) + B_0 P_1(\cos \theta).$$

$$\Rightarrow -\mu_r a_1 = 2b_1 R^{-3} + B_0/\mu_0, \quad -\mu_r a_\ell \ell R^{\ell-1} = b_\ell (\ell + 1) R^{-\ell-2}, \quad \ell \neq 1. \quad (2.88)$$

2. Magnetostatik

- Tangentialkomponente bei $r = R$: $H_\theta^i(r = R) = H_\theta^a(r = R)$.

$$H_\theta^i = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_m^i = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell r^\ell P'_\ell(\cos \theta) \sin \theta, \quad (2.89)$$

$$H_\theta^a = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_m^a = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell r^{-\ell-1} P'_\ell(\cos \theta) \sin \theta - \frac{B_0}{\mu_0} P'_1(\cos \theta) \sin \theta.$$

$$\Rightarrow a_1 = b_1 R^{-3} - \frac{B_0}{\mu_0}, \quad a_\ell R^{\ell-1} = b_\ell R^{-\ell-2}, \quad \ell > 1. \quad (2.90)$$

Lösung von Gl. (2.88) und (2.90):

$$a_1 = -\frac{3}{\mu_r + 2} \cdot \frac{B_0}{\mu_0}, \quad b_1 = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} R^3 \frac{B_0}{\mu_0}, \quad (2.91)$$

$$a_\ell = 0, \quad b_\ell = 0, \quad \ell \neq 1.$$

a_0, a_0^a sind irrelevante Konstanten.

$$\Rightarrow \Phi_m^a = -\frac{B_0}{\mu_0} x_3 + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{B_0}{\mu_0} R^3 \cdot \frac{x_3}{r^3}, \quad (2.92)$$

wobei der erste Term das homogene äußere Feld widerspiegelt und der zweite Term ein magnetisches Dipolfeld durch die Polarisation der Kugel.

$$\Phi_m^i = -\frac{3}{\mu_r + 2} \frac{B_0}{\mu_0} x_3, \quad \vec{B} = -\mu_r \mu_0 \vec{\nabla} \Phi_m^i = \frac{3\mu_r}{\mu_r + 2} B_0 \vec{e}_3, \quad (2.93)$$

$$\vec{M}^i = \frac{\vec{B}^i - \mu_0 \vec{H}^i}{\mu_0} = \dots = \frac{3(\mu_r - 1)}{\mu_r + 2} B_0 \vec{e}_3. \quad (2.94)$$

2. Magnetostatik

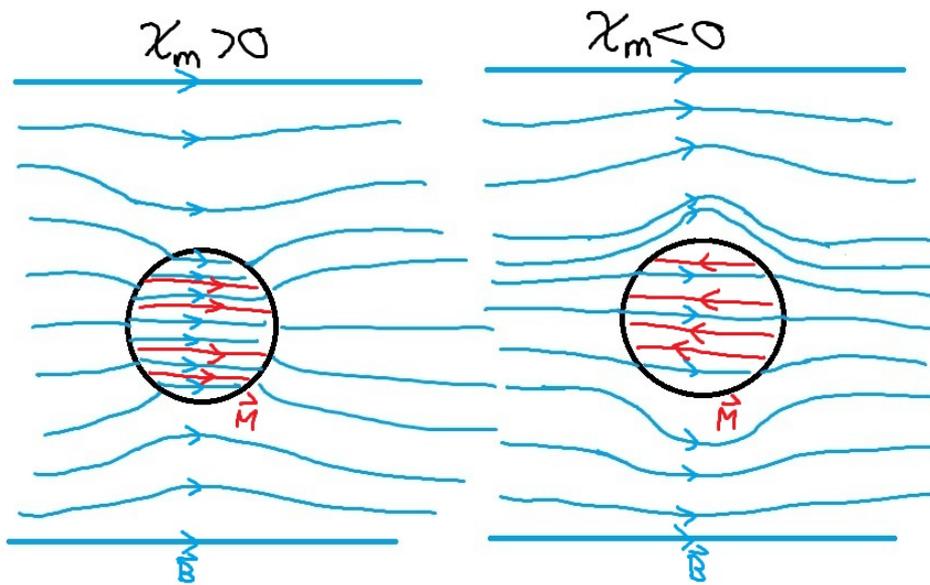


Abbildung 2.11: \vec{B} -Felder und Magnetisierung \vec{M} für zwei Kugeln unterschiedlicher mg. Suszeptibilität.

3. Elektrodynamik - Grundlagen

Bisher (Elektro-Statik und Magneto-Statik) wurden zeitunabhängige Felder untersucht. Zeitunabhängige E - und B -Felder sind unabhängig voneinander und werden erzeugt von statischen Ladungsverteilungen $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ bzw. von stationären Strömen \vec{j} mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

Jetzt: zeitabhängige Felder $\rightarrow E$ - / B -Felder sind nicht mehr unabhängig voneinander!

- belegt durch Experiment (z.B.: Faraday)
- theoretisch erwartet durch Galilei-Invarianz bzw. Lorentz-Invarianz der Lorentz-Kraft:

Beispiel:

System Σ' : ruhende Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$

$\rightarrow \vec{F}' = q\vec{E}'$, Kraft auf Testladung q im Feld \vec{E}' von $\rho'(\vec{x}')$

System Σ : Σ' hat Geschwindigkeit \vec{v} in Σ , d.h. $\rho(\vec{x})$ und q bewegen sich mit \vec{v} .

$\rightarrow \rho$ erzeugt Strom und damit auch $\vec{B} \neq \vec{0}$

$\rightarrow \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.

Galilei ($|\vec{v}| \ll c$): $\vec{F}' = \vec{F}$

$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}(\vec{E}', \vec{B}')$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{E}', \vec{B}')$

3.1 Faraday'sches Induktionsgesetz

Experimenteller Befund:

zeitliche Änderung des magnetischen Flusses bewirken el. Wirbelfelder

3. Elektrodynamik - Grundlagen

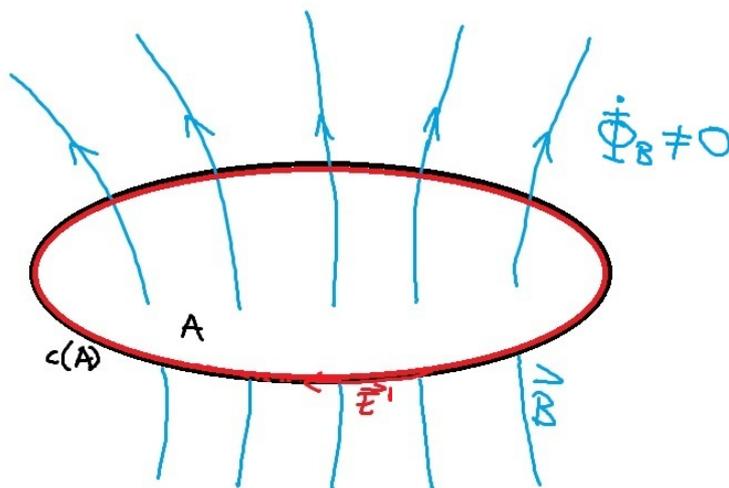


Abbildung 3.1:

$$\oint_{C(A)} \vec{E}' \cdot d\vec{x} = -k \cdot \frac{d}{dt} \int_A d\vec{A} \cdot \vec{B} \quad (3.1)$$

Dabei stellt die linke Seite der Gleichung die elektromotorische Kraft dar, das Vorzeichen "–" auf der rechten Seite bringt die Lenz'sche Regel zum Ausdruck, d.h. Wirbelfelder induzieren Ströme, deren B -Felder der Flussänderung entgegenwirken. $\Phi_B := \int_A d\vec{A} \cdot \vec{B}$ bezeichnet man als magnetischen Fluss.

Wichtig: \vec{E}' ist das E -Feld im System, in dem $d\vec{x}$ ruht!

Wichtig: Der Bewegungszustand von A spielt eine Rolle, da $\int d\vec{A}$ nach t differenziert wird.

Behauptung:

$k = 1$ wegen geforderter Galilei-Invarianz bei kleinen rel. Geschwindigkeiten

Beweis:

- System Σ' : $C =$ ruhende Leiterschleife, somit $A = const$

$$\oint_{C(A)} \vec{E}' d\vec{x} = -k \frac{d}{dt} \int_A d\vec{A} \cdot \vec{B}' = -k \int d\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} \quad (3.2)$$

3. Elektrodynamik - Grundlagen

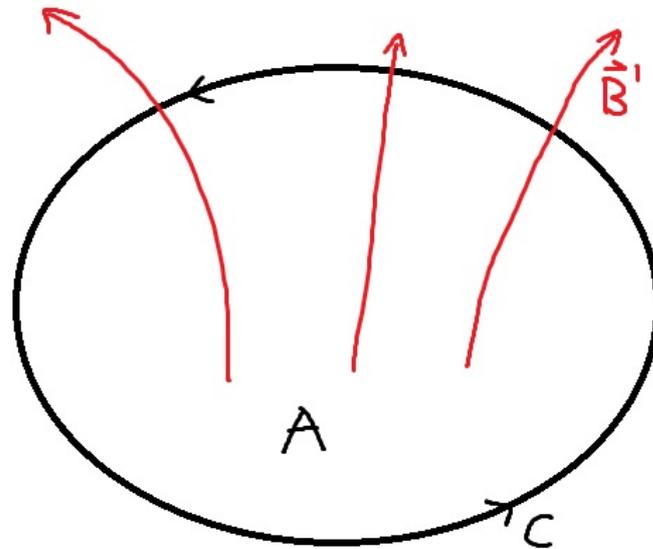


Abbildung 3.2: Von Leiterschleife C umschlossene Fläche A , durch welche das Feld \vec{B}' tritt.

- System Σ : Σ' (d.h. auch C) bewegt sich mit Geschwindigkeit \vec{v}

$$\Phi_B(t) = \int_{A(t)} d\vec{A} \cdot \vec{B}(t) \quad (3.3)$$

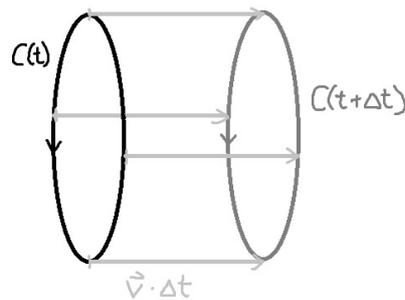


Abbildung 3.3: Die Leiterschleife $C(t)$ ist nicht zeitlich konstant.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \Phi_B = \int_A d\vec{A} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \left(\underbrace{\vec{\nabla} \vec{B}}_{=0} \right) \right) - \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{x} \quad (3.4)$$

3. Elektrodynamik - Grundlagen

Beweis von Gl. (3.4) siehe Übungen, bzw. im Anschluss.

$$\oint_C \vec{E}' d\vec{x} = -k \frac{d}{dt} \Phi_B$$

$$\Rightarrow \oint_{C(A)} d\vec{x} \underbrace{(\vec{E}' - k\vec{v} \times \vec{B})}_{=\vec{E} + \mathcal{O}(v^2/c^2)} = -k \int_A d\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.5)$$

wobei \vec{E} das E -Feld in Σ ist.

Beachte: die Gleichung gilt unabhängig vom Bewegungszustand der Schleife C , da keine Ableitung $\frac{d}{dt}$ auf das Flächenintegral \int_A wirkt!

- Kraft auf Testladung q (ruhend in C , d.h. ruhend in Σ'):

$$\vec{F}' = q\vec{E}', \quad \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q \left(\vec{E}' + (1 - k)\vec{v} \times \vec{B} \right) + \dots \quad (3.6)$$

Galilei-Invarianz: $\vec{F} = \vec{F}' + \mathcal{O}(v^2/c^2) \Rightarrow k = 1. \square$

Beweis von Gl. (3.4):

$$\begin{aligned} \Phi_B(t + \Delta t) - \Phi_B(t) &= \int_{A(t+\Delta t)} d\vec{A} \vec{B}(t + \Delta t) - \int_{A(t)} d\vec{A} \vec{B}(t) \\ &= \Delta t \int_{A(t+\Delta t)} d\vec{A} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t) + \left(\int_{A(t+\Delta t)} d\vec{A} - \int_{A(t)} d\vec{A} \right) \vec{B}(t) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= \Delta t \int_{A(t)} d\vec{A} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t) + \oint_{\substack{A(t+\Delta t) \cup \\ -A(t) \cup \text{Zylin-} \\ \text{dermantel}}} d\vec{A} \vec{B}(t) - \int_{\text{Zyl.}} d\vec{A} \vec{B}(t) + \dots \\ &= \Delta t \int_{A(t)} d\vec{A} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \int_V \underbrace{d^3\vec{x}}_{=d\vec{A} \cdot \vec{v} \Delta t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \int_{\text{Zyl.}} \underbrace{d\vec{A}}_{=d\vec{x} \times (\vec{v} \Delta t)} \cdot \vec{B} + \dots \\ &= \Delta t \left[\int_A d\vec{A} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \int_A d\vec{A} \cdot \vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \underbrace{\int_C (d\vec{x} \times \vec{v}) \cdot \vec{B}}_{=\int_C d\vec{x} (\vec{v} \times \vec{B})} \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

3. Elektrodynamik - Grundlagen

Induktionsgesetz in integrierter Form und lokaler Form:

integriert:

$$\oint_{C(A)} \vec{E}' d\vec{x} = -\frac{d}{dt} \int_A d\vec{A} \cdot \vec{B}, \quad (3.8)$$

wobei \vec{E}' im Ruhesystem von $d\vec{x}$ definiert ist, bzw:

$$\oint_{C(A)} \vec{E} d\vec{x} = -\int_A d\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.9)$$

wobei \vec{E} und \vec{B} im selben System definiert sind!

Benutze Stok'sches Theorem:

$$\oint_{C(A)} \vec{E} d\vec{x} = \int_A d\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (3.10)$$

\Rightarrow Lokale Form, da A beliebig:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.11)$$

3.2 Maxwell'scher Verschiebungsstrom, Maxwell-Gleichungen

Feldgleichungen für \vec{E} und \vec{B} :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

sind experimentell verifiziert, auch für zeitlich veränderliche Felder.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (\text{Faraday}) \quad (3.13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = ? \quad (3.14)$$

Problem: Stationäre Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \mu_0 \vec{j}$ kann nicht für zeitabhängige Felder gelten, da

$$\vec{0} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{D}}. \quad (3.15)$$

wobei hier die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ benutzt wurde.

Ausweg: Maxwell postuliert *Verschiebungsstrom* $\dot{\vec{D}}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \quad (3.16)$$

3. Elektrodynamik - Grundlagen

⇒ Kontinuitätsgleichung erfüllt, Verschiebungsstrom experimentell verifiziert (z.B. Existenz durch EM-Wellen)

Maxwell-Gleichungen

$$\begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \end{array} \quad (3.17)$$

Dies sind gekoppelte, partielle Differentialgleichungen für \vec{E} und \vec{B} , wobei $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$ und $\vec{H} = \vec{H}(\vec{B})$, z.B. für lineare Medien:

$$\begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \end{array} \quad (3.18)$$

Ergänzungen:

- Materialgleichung:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (3.19)$$

$\sigma = \text{const.}$ (Ohm'sches Gesetz)

- Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (3.20)$$

Bemerkung:

Die Anschlussbedingungen der Felder an Grenzflächen ändern sich nicht gegenüber den statischen/stationären Fällen. → Beweis siehe Übungen.

3.3 Elektromagnetische Potentiale

Frage:

Lassen sich die Maxwell-Gleichungen vereinfachen, analog zur Einführung des elektrostatischen Potentials Φ und des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} .

Antwort:

JA!

$$(1) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} \text{ mit } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \text{ (Helmholtz-Zerlegung)}$$

3. Elektrodynamik - Grundlagen

(2)

$$\vec{0} = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\vec{E} + \dot{\vec{A}} \right)}_{\substack{\rightarrow \text{Ableitbar aus} \\ \text{skalarem Potenti-} \\ \text{al}}} \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow \exists \Phi \text{ mit } \vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\vec{\nabla}\Phi$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi - \dot{\vec{A}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Folgerungen:

- Alle Konfigurationen von \vec{B} und \vec{E} sind durch geeignete \vec{A} und Φ darstellbar.
- Ansatz über \vec{A} und Φ erfüllt automatisch die homogenen Maxwell-Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$.
- Inhomogene Maxwell-Gleichungen bestimmen \vec{A} , Φ (aber nicht eindeutig!).

Wichtigste Anwendung: mikroskopische Gleichungen für \vec{A} , Φ

$$\rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

1)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ &= \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}) \\ &= \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \left(\vec{\nabla} \dot{\Phi} + \ddot{\vec{A}} \right), \quad c := \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A}}_{=:\square \vec{A}} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\Phi} \right) = \mu_0 \vec{j}, \quad (3.24)$$

wobei \square als *d'Alembert-Operator* bezeichnet wird.

2)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\epsilon_0 \left(\Delta \Phi + \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} \right) = \rho \quad (3.25)$$

$$\Rightarrow \Delta \Phi + \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.26)$$

3. Elektrodynamik - Grundlagen

- 3) Entkopplung von Gl. (3.24) und (3.26) durch Wahl einer *Eichung*:
 \vec{E} und \vec{B} bleiben unverändert bei folgender *Eichtransformation*:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi, \quad \Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \dot{\chi}, \quad (3.27)$$

wobei $\chi(\vec{x}, t)$ so gewählt werden kann, dass

$$\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi} = 0 \quad (\text{Lorenz-Eichung}) \quad (3.28)$$

Beweis:

$$\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi} \rightarrow \vec{\nabla}\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi}' = \vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi} + \Delta\chi - \frac{1}{c^2}\ddot{\chi} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.29)$$

d.h.

$$\square\chi = \vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi} \quad (3.30)$$

(= Inhomogene Wellengleichung für χ , d.h. Existenz einer Lösung bei sinnvollen Randbedingungen ist garantiert. → Theorie der partiellen DGL bzw. später in der Vorlesung)

⇒ Gleichungen für \vec{A} und Φ in Lorenz-Eichung:

$$\boxed{\begin{aligned} \square\vec{A} &= \mu_0\vec{j} \\ \square\Phi &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}} \quad (3.31)$$

(= Inhomogene Wellengleichung, vollständige Äquivalenz zu Maxwell-Gleichungen)

Bemerkungen:

- Die Lorenz-Bedingung (3.30) fixiert \vec{A} , Φ nicht vollständig, d.h. χ ist nur festgelegt bis auf $\chi \rightarrow \chi' = \chi + \Lambda$ mit $\square\Lambda = 0$.
- Die Lorenz-Bedingung ist Lorentz-invariant (siehe später), d.h. gilt Gl. (3.30) in einem Inertialsystem, dann auch in allen anderen! → Attraktiv für SRT!
- Weitere wichtige Eichbedingung:

$$\vec{\nabla}\vec{A} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{Coulomb-Eichung}) \quad (3.32)$$

$$\rightarrow \Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.33)$$

\vec{A} folgt dann aus inhomogener Wellengleichung...

Die Coulomb-Eichung eignet sich z.B. für die Feldquantisierung!

3.4 Teilchen im elektromagnetischen Feld

Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B} \right) \quad (3.34)$$

Kraft auf ein Teilchen in E/B - Feldern.

→ Frage nach Lagrange-/Hamilton-Funktionen für nicht-relativistische Bewegung!

Lagrange-Funktion:

Bei konservativen Kräften ($V = V(\vec{x})$) gilt:

$$L = T - V \quad (3.35)$$

Ansatz:

$$V = q\Phi + V_A(\vec{A}), \quad (3.36)$$

da $q\Phi =$ potentielle elektrische Energie im statischen Fall.

Weitere Bedingung: Eichinvarianz $\stackrel{!}{=}$ Symmetrie von L

→ L und V dürfen sich unter Eichtrafos nur um eine totale Zeitableitung ändern!

Eichtrafo:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' + \vec{\nabla} \chi \quad (3.37)$$

$$\Rightarrow V \rightarrow V' = q\Phi - q \frac{\partial \chi}{\partial t} + V_A(\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) \quad (3.38)$$

$\frac{\partial \chi}{\partial t}$ und $\vec{\nabla} \chi$ können sich i.A. nicht vollständig kompensieren, aber sie können sich zur totalen Zeitableitung kombinieren:

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= \frac{d}{dt} \chi(\vec{x}(t), t) \\ &= \frac{\partial \chi}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} \chi \end{aligned} \quad (3.39)$$

⇒ Ansatz:

$$V_A = -q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} \quad (3.40)$$

Voller Ansatz für Lagrange-Funktion L :

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - q\Phi + q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} \quad (3.41)$$

für ein Teilchen der Masse m .

Verifikation der Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + q\vec{A} =: \vec{\pi} \quad (3.42)$$

3. Elektrodynamik - Grundlagen

$\vec{\pi}$ bezeichnet den kanonischen Impuls und stimmt nicht mit dem kartesischen Impuls $m\dot{\vec{x}} = \vec{p}$ überein!

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -q\vec{\nabla}\Phi + q\vec{\nabla}(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}) \quad (3.43)$$

Mit

$$\dot{\vec{x}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}) - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} \quad (3.44)$$

ergibt sich hieraus:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -q\vec{\nabla}\Phi + q(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + q\dot{\vec{x}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (3.45)$$

Betrachtet man nun

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{x}(t), t) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}, \quad (3.46)$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} &= -q\vec{\nabla}\Phi + q(\dot{\vec{x}}\vec{\nabla})\vec{A} + q\dot{\vec{x}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= -q\vec{\nabla}\Phi - q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q\dot{\vec{x}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + q\frac{d\vec{A}}{dt} \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = q\left(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}\right) + q\frac{d\vec{A}}{dt} - m\ddot{\vec{x}} - q\frac{d\vec{A}}{dt} \\ &\Rightarrow m\ddot{\vec{x}} = q\left(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}\right) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Hamilton-Funktion:

Mit

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{\pi}}{m} - \frac{q}{m}\vec{A} \quad (3.49)$$

ist

$$\begin{aligned} H(\vec{x}, \vec{\pi}) &= \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{x}} - L \\ &= \vec{\pi} \cdot \left(\frac{\vec{\pi}}{m} - \frac{q}{m}\vec{A}\right) - \frac{m}{2} \left(\frac{\vec{\pi}}{m} - \frac{q}{m}\vec{A}\right)^2 + q\Phi - q\left(\frac{\vec{\pi}}{m} - \frac{q}{m}\vec{A}\right) \\ &= \frac{1}{2m} \left(\vec{\pi} - q\vec{A}\right)^2 + q\Phi \\ \Rightarrow H &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + q\Phi \end{aligned} \quad (3.50)$$

Aber: Die letzte Form ist keine kanonische Form für die Hamilton-Gleichungen, da \vec{p} nicht der kanonisch konjugierte Impuls zu \vec{x} ist!

3. Elektrodynamik - Grundlagen

Energieerhaltung:

Falls Φ und \vec{A} zeitlich konstant sind, d.h. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, dann gilt:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (3.51)$$

Die Gleichheiten hierbei ergeben sich aus den Hamilton- bzw. Lagrange-Gleichungen.
 $\Rightarrow H =$ Gesamtenergie (ohne Feldenergie) ist konstant.

Hamilton-Gleichungen:

$$\underbrace{-\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}}_{\text{Bewegung durch Lorentz-Kraft}} = \dot{\vec{\pi}}$$

Bewegung durch
Lorentz-Kraft
 \rightarrow Übungen. (3.52)

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{\pi}} = \dot{\vec{x}} \Rightarrow m\dot{\vec{x}} = \vec{\pi} - q\vec{A}$$

3.5 Energiesatz der E-Dynamik

Frage:

Welche Arbeit W muss einem System zugeführt werden, um Strom und Ladungsverteilung $\vec{j}(\vec{x}, t)$ und $\rho(\vec{x}, t)$ zu „unterhalten“?

Betrachte einzelne Punktladung q mit Trajektorie $\vec{r}(t)$ in \vec{j}, ρ :

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}, t) &= q\delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \\ \vec{j}(\vec{x}, t) &= q\dot{\vec{x}}\delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Kraft auf q :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \right) \quad (3.54)$$

Daraus folgt die Arbeit in der Zeit δt , die an q verrichtet wird:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}} &= -\vec{F} \cdot \delta\vec{r} = -\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}\delta t \\ &= -q\vec{E}\dot{\vec{r}}\delta t \\ &= -\int_V d^3\vec{x} \underbrace{q\delta(\vec{x} - \vec{r}(t))\dot{\vec{r}}}_{=\vec{j}} \vec{E}\delta t \\ &= -\int d^3\vec{x} \vec{j} \cdot \vec{E}\delta t \\ \Rightarrow \frac{dW_{\text{ext}}}{dt} &= -\int_V d^3\vec{x} \vec{j} \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (3.55)$$

gilt für die gesamte Ladungs-/
Stromverteilung durch Superposition.

3. Elektrodynamik - Grundlagen

Dies ist die Leistung, die einem System zugeführt werden muss, um Ladungs- und Stromverteilung (ρ, \vec{j}) in V aufrecht zu erhalten.

$$\begin{aligned} -\frac{dW_{\text{ext}}}{dt} &= -\int_V d^3\vec{x} \vec{j} \cdot \vec{E} \\ &= -\int_V d^3\vec{x} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E} + \int_V d^3\vec{x} \dot{\vec{D}} \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Nun gilt jedoch:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E} &= (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E} - (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E} \\ &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{E}) + (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{H} \end{aligned} \quad (3.57)$$

wobei hier der Nabla-Operator in Ausdrücken mit Unterstrichungen nur auf die unterstrichenen Größen wirkt. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{\text{ext}}}{dt} &= \int_V d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\vec{E} \times \vec{H})}_{:= \vec{S} \text{ Poynting-Vektor}} + \int_V d^3\vec{x} \left[-(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{H} + \dot{\vec{D}} \cdot \vec{E} \right] \\ &= \int_V d^3\vec{x} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \dot{\vec{B}} \cdot \vec{H} + \dot{\vec{D}} \cdot \vec{E} \right) \end{aligned} \quad (3.58)$$

d.h.

$$\delta W_{\text{ext}} = \underbrace{\int_V d^3\vec{x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{S}) \cdot \delta t}_{= \oint_{\text{Gau\ss}_{A(V)}} d\vec{A} \cdot \vec{S} \delta t} + \underbrace{\int_V d^3\vec{x} \delta B \cdot \vec{H}}_{\text{mg. Feldenergie}} + \underbrace{\int_V d^3\vec{x} \delta \vec{D} \cdot \vec{E}}_{\text{el. Feldenergie, s. } E\text{-Statik}} \quad (3.59)$$

Wobei wir den ersten Term als die aus V entweichende Energie durch Abstrahlung auffassen können. Der zweite Term ist der einzige Term der beim Aufbau eines stationären B -Feldes übrig bleibt.

⇒ Lokale Form (da V beliebig):

$$\dot{w}_{\text{ext}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \dot{\vec{B}} \cdot \vec{H} + \dot{\vec{D}} \cdot \vec{E} \quad (3.60)$$

ist die externe Leistungsdichte. Für lineare Medien:

$$\dot{w}_{\text{ext}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \dot{w}_{\text{mag}} + \dot{w}_{\text{el}} \quad (3.61)$$

wobei

$$\begin{aligned} \dot{w}_{\text{mag}} &= \frac{1}{2} \dot{\vec{B}} \cdot \vec{H} \\ \dot{w}_{\text{el}} &= \frac{1}{2} \dot{\vec{D}} \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (3.62)$$

3. Elektrodynamik - Grundlagen

Bedeutung von \vec{S} :

\vec{S} = Energieflussdichte, aber \vec{S} ist nicht eindeutig über Gl. (3.60) festgelegt (nur $\vec{\nabla} \cdot \vec{S}$ bzw. $\oint d\vec{A} \cdot \vec{S}$), sondern kann durch $\vec{S} \rightarrow \vec{S}' = \vec{S} + \vec{\nabla} \times \vec{f}$ mit bel. \vec{f} geändert werden.

Energiebilanz:

$$\begin{aligned}
 0 &= \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + (\dot{w}_{\text{mag}} + \dot{w}_{\text{el}}) \\
 0 &= \underbrace{\int_V d^3\vec{x} \vec{j} \cdot \vec{E}}_{\dot{E}_{\text{mech}}} + \underbrace{\oint_{A(V)} d\vec{A} \cdot \vec{S}}_{\dot{E}_{\text{rad}}} + \underbrace{\int_V d^3\vec{x} (\dot{w}_{\text{mag}} + \dot{w}_{\text{el}})}_{\dot{E}_{\text{Feld}}} \quad (3.63) \\
 &\Rightarrow E_{\text{mech}} + E_{\text{rad}} + E_{\text{Feld}} = \text{const.}
 \end{aligned}$$

Dabei beschreibt der erste Term die mechanische Arbeit/Leistung, die durch die Felder geleistet wird, der zweite Term die abgestrahlte Energie/Leistung und der letzte Term die in den Feldern gespeicherte Energie (bzw. deren Änderung).

3.6 Impulssatz der E -Dynamik

Impulsänderung der Ladungsträger $\int_V d^3\vec{x} \rho(\vec{x})$ durch Lorentz-Kraft:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{P}_{\text{mech}}}{dt} &= \int_V d^3\vec{x} \underbrace{(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})}_{=\text{Lorentz-Kraft auf } \rho \Delta V} \\
 &= \int_V d^3\vec{x} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \cdot \vec{E} + \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}}) \times \vec{B}} \right] \quad (3.64) \\
 &= (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{B} - \frac{d}{dt} (\vec{D} \times \vec{B}) + \vec{D} \times \dot{\vec{B}} \\
 &= (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B} - \frac{d}{dt} (\vec{D} \times \vec{B}) + \vec{D} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})
 \end{aligned}$$

Ab hier: Einschränkung auf lineare, isotrope Medien, d.h.

$$\begin{aligned}
 \vec{D} &= \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \\
 \vec{B} &= \mu_r \mu_0 \vec{H}
 \end{aligned} \quad (3.65)$$

3. Elektrodynamik - Grundlagen

Anwendung:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad [(\vec{\nabla} \vec{D}) \cdot \vec{E} - \vec{D} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})]_k &= \epsilon_r \epsilon_0 \left[\vec{E} (\vec{\nabla} \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right]_k \\
 &= \epsilon_r \epsilon_0 \left[\vec{E} (\vec{\nabla} \vec{E}) - \vec{\nabla} (\vec{E} \vec{E}) + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \right]_k \\
 &= \sum_{\ell} \epsilon_r \epsilon_0 \left[E_k (\partial_{\ell} E_{\ell}) - \partial_k (E_{\ell} E_{\ell}) + (E_{\ell} \partial_{\ell}) E_k \right] \\
 &= \epsilon_r \epsilon_0 \left[\sum_{\ell} \partial_{\ell} (E_{\ell} E_k) - \frac{1}{2} \sum_n \partial_k (E_n \cdot E_n) \right] \\
 &= \epsilon_r \epsilon_0 \sum_{\ell} \partial_{\ell} \left[E_{\ell} E_k - \frac{1}{2} \delta_{k\ell} \left(\sum_n E_n E_n \right) \right] \\
 &= \epsilon_r \epsilon_0 \sum_{\ell} \partial_{\ell} \left[E_{\ell} E_k - \frac{1}{2} \delta_{k\ell} \vec{E} \cdot \vec{E} \right] \\
 &= \sum_{\ell} \partial_{\ell} \left[D_{\ell} E_k - \frac{1}{2} \delta_{k\ell} (\vec{D} \cdot \vec{E}) \right]
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

- Analog (da keine Annahmen über \vec{E} -Feld, außer Linearität):

$$\left[(\vec{\nabla} \vec{B}) \vec{H} + (\vec{\nabla} \times H) \times \vec{B} \right]_k = \dots = \sum_{\ell} \partial_{\ell} \left[B_{\ell} H_k - \frac{1}{2} \delta_{k\ell} (\vec{B} \times \vec{H}) \right] \tag{3.67}$$

Definition: Maxwell'scher Spannungstensor (für lineare, isotrope Medien)

$$\boxed{T_{k\ell} = T_{\ell k} = D_{\ell} E_k + B_{\ell} H_k - \frac{1}{2} \delta_{k\ell} (\vec{D} \vec{E} + \vec{B} \vec{H})} \tag{3.68}$$

⇒ Für ein zeitlich konstantes Volumen:

$$\frac{dP_{\text{mech},k}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V d^3 \vec{x} (\vec{D} \times \vec{B})_k + \int_V d^3 \vec{x} \sum_{\ell} \partial_{\ell} T_{k\ell} \tag{3.69}$$

Schreibweise:

$$T = \sum_{k,\ell} T_{k\ell} \vec{e}_k \cdot \vec{e}_{\ell}^T = \sum_{k,\ell} T_{k\ell} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_{\ell} \tag{3.70}$$

$$\frac{dP_{\text{mech},k}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V d^3 \vec{x} (\vec{D} \times \vec{B})_k + \underbrace{\int_V d^3 \vec{x} \sum_{\ell} \partial_{\ell} T_{k\ell}}_{\stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_{A(V)} d\vec{A} \cdot (\sum_{\ell} T_{k\ell} \vec{e}_{\ell})} \tag{3.71}$$

3. Elektrodynamik - Grundlagen

Def: Feldimpuls

$$\vec{P}_{\text{Feld}} := \int_V d^3\vec{x} \quad \underbrace{\vec{D} \times \vec{B}}_{:=\vec{p}_{\text{Feld}}=\text{Feldimpulsdichte}} \quad (3.72)$$

Impulsbilanz:

$$\underbrace{\frac{d\vec{P}_{\text{mech}}}{dt}}_{\substack{\text{Änderung des} \\ \text{mech. Impulses} \\ \text{der Ladungen in} \\ V}} + \underbrace{\frac{d\vec{P}_{\text{Feld}}}{dt}}_{\substack{\text{Änderung des} \\ \text{Impulses, der} \\ \text{von Feldern in } V \\ \text{getragen wird}}} - \underbrace{\oint_{A(V)} T \cdot d\vec{A}}_{\substack{\text{Impuls, der pro} \\ \text{Zeit durch } A(V) \\ \text{entweicht}}} = \vec{0}, \quad (3.73)$$

wobei T in Matrixschreibweise aufgefasst wird.

⇒ Abgeschlossenes System bzw. $V = \mathbb{R}^3$ und $\vec{E}, \vec{B} \rightarrow \vec{0}$ für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ (hinreichend schnell):

$$\vec{P}_{\text{mech}} + \vec{P}_{\text{Feld}} = \text{const.} \quad (3.74)$$

Strahlungsdruck

$T \cdot d\vec{A} = T\vec{n}dA = -\text{Kraft auf } dA$ (nicht notwendigerweise parallel zu $d\vec{A}$)

⇒ Druck auf $dA = -\vec{n}^T T \vec{n}$

$$\vec{p}_{\text{Strahlung}} = -\vec{n}^T T \vec{n} \quad (3.75)$$

Beispiel: Kometenschweif

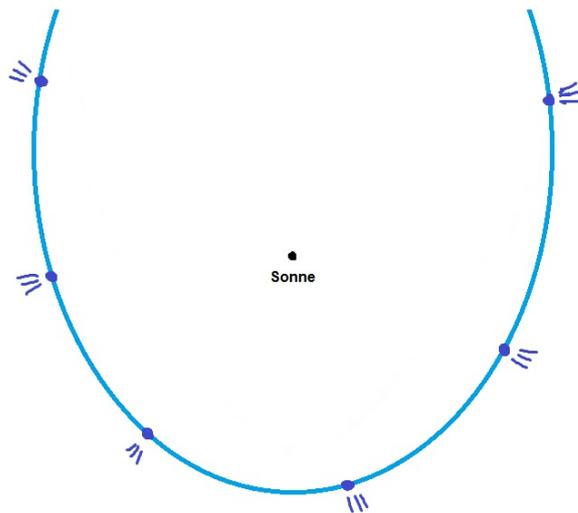


Abbildung 3.4: Der Schweif eines Kometen wird durch den Strahlungsdruck der Sonne erzeugt und zeigt deshalb immer von der Sonne weg!

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

4.1 Grundpostulate

Erfahrungstatsachen \rightarrow 2 Postulate:

- (1) Relativitätsprinzip:
Physikalische Gesetze nehmen dieselbe Form in allen Inertialsystemen an.
- (2) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:
Die Vakuumlichtgeschwindigkeit besitzt in allen Inertialsystemen (IS) den selben Wert c , unabhängig von der Richtung. (Michelson-Morley-Experiment)

Vergleich mit Newton-Mechanik:

- Relativitätsprinzip ebenfalls verankert.
 \rightarrow Inertialsysteme sind durch Galilei-Trafos verbunden:

$$\begin{aligned} \underline{x}' &= D\underline{x} - \underline{v}t - \underline{s}, \quad \underline{v} = \text{Relativgeschwindigkeit der Systeme} \\ t' &= t, \text{ d.h. die Zeit hat absoluten Charakter} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Im Folgenden werden Vektoren wie \vec{x} von deren Koordinatentupeln \underline{x} unterschieden.

\rightarrow Newton'sches Bewegungsgesetz gleich in allen IS:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{x}} \text{ für } m = \text{const.} \quad (4.2)$$

Beachte: $\vec{F}, \ddot{\vec{x}}$ sind gleich in allen IS (nicht unbedingt deren Komponenten/Koordinaten)

- Aber: Galilei-Trafos widersprechen (2)!
Seien Systeme Σ und Σ' verbunden über $\underline{x}' = \underline{x} - \underline{v}t$.
 \rightarrow Wenn Licht sich in Σ mit \underline{c} ausbreitet, dann breitet es sich in Σ' mit $\underline{c}' = \underline{c} - \underline{v}$ aus, d.h. im Allgemeinen ist $|\underline{c}'|^2 = |\underline{c} - \underline{v}|^2 = c^2 + v^2 - 2\underline{v} \cdot \underline{c} \neq c^2$. \nexists
 \Rightarrow Galilei-Trafos müssen verändert werden! \rightarrow Lorentz-Trafo.

4.2 Lorentz-Transformation

Begriffe und Notation

- *Orts-Vierervektor*:

$$(x^\mu) := (\underbrace{x^0}_{=ct}, \underbrace{x^1, x^2, x^3}_{=\underline{x}}) = (ct, \underline{x}) \quad (4.3)$$

Im Folgenden: $\mu, \nu, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3$ und $u, \ell, m, \dots = 1, 2, 3$

- **Summenkonvention**: Summation über paarweise gleiche Indices in Produkten („oben“ · „unten“), d.h.

$$a^\mu b_\mu = \sum_{\mu=0}^3 a^\mu b_\mu \quad (4.4)$$

- *Ereignis* = Punkt (x^μ) , d.h. Orts- und Zeitangabe.
Weltlinie: $(x^\mu(s)) = (ct(s), \underline{x}(s))$, wobei der Kurvenparameter s auch $s = t$ sein kann. Die Weltlinie beschreibt den Weg eines Punktes in Raum und Zeit.

Linearität:

Trägheitsprinzip: geradlinige, gleichförmige Bewegung kräftefreier Körper in allen IS.

Im IS sei Σ :

$$\underline{x}(t) = \underline{v}_0 \cdot t + \underline{x}_0, \quad (4.5)$$

was durch die Lorentz-Trafo in Σ' die Form annehmen muss:

$$\underline{x}'(t') = \underline{v}'_0 t' + \underline{x}'_0 \quad (4.6)$$

⇒ Da $\underline{v}_0, \underline{x}_0$ beliebig sind, müssen (x^μ) und (x'^μ) (affin) linear zusammenhängen:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (\text{Poincaré-Trafo}) \quad (4.7)$$

Koordinatenwahl ⇒ Koordinatenursprünge ($\underline{x} = 0, \underline{x}' = 0$) sollen bei $t = 0$ zusammenfallen; außerdem wird dort $t' = 0$ gesetzt.

$$\Rightarrow a^\mu = 0, \text{ d.h. } x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (\text{Lorentz-Trafo}) \quad (4.8)$$

wobei Λ eine 4×4 -Matrix ist.

Berechnung von Λ^μ_ν für Relativbewegung

1) Wahl der x^1 - und x'^1 -Achsen als Richtung der Relativbewegung:

- Ursprung von Σ' ($\underline{x}' = 0$) bewegt sich in Σ mit v in positiver x^1 -Richtung.
- Ursprung von Σ ($\underline{x} = 0$) bewegt sich in Σ' mit $-v$ in positiver x'^1 -Richtung.

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

Für $\underline{x} = 0$ gilt:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{0} x^0 + \underbrace{\Lambda^{\mu}_{k} x^k}_{=0} \quad (4.9)$$

d.h.

$$\begin{aligned} x'^0 &= \Lambda^0_0 x^0 \\ x'^1 &= \Lambda^1_0 x^0 \stackrel{!}{=} -v \cdot t' = -\beta x'^0, \quad \beta := \frac{v}{c} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$x'^2 = \Lambda^2_0 x^0 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{aligned} x'^3 &= \Lambda^3_0 x^0 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \Lambda^1_0 &= -\beta \Lambda^0_0, \quad \Lambda^2_0 = \Lambda^3_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

2) Raumisotropie \Rightarrow Die x^1 und x'^1 -Achsen transformieren sich in einander, unabhängig von x^2, x^3, x'^2, x'^3 , d.h.:

$$\begin{aligned} x'^1 &= \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1 + \underbrace{\Lambda^1_2 x^2 + \Lambda^1_3 x^3}_{\text{Isotropie in } \Sigma} \\ x'^2 &= \cancel{\Lambda^2_0 x^0} + \underbrace{\Lambda^2_1 x^1}_{\text{Isotropie in } \Sigma'} + \Lambda^2_2 x^2 + \Lambda^2_3 x^3 \\ x'^3 &= \cancel{\Lambda^3_0 x^0} + \underbrace{\Lambda^3_1 x^1}_{\text{Isotropie in } \Sigma'} + \Lambda^3_2 x^2 + \Lambda^3_3 x^3 \end{aligned} \quad (4.12)$$

d.h. nach 1) und 2):

$$(\Lambda^{\mu}_{\nu}) = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

3) Wahl der x'^2 -Richtung, so dass x^2 und x'^2 -Achsen sich ineinander transformieren:

$$x'^2 = \Lambda^2_2 x^2 + \Lambda^2_3 x^3 \quad (4.13)$$

d.h. $\Lambda^2_3 = 0$, außerdem ist $\Lambda^2_2 > 0$ wählbar.

Betrachte Abstände r_{\perp} und r'_{\perp} in der Ebene senkrecht zu x^1 bzw. x'^1 -Achsen:

$$\begin{aligned} r_{\perp}^2 &= (x^2)^2 + (x^3)^2 \\ r'_{\perp}^2 &= (x'^2)^2 + (x'^3)^2 = (\Lambda^2_2 x^2)^2 + (\Lambda^3_2 x^2 + \Lambda^3_3 x^3)^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Isotropie erfordert Unabhängigkeit von der Richtung in der x^2 - x^3 -Ebene:

$$r'_{\perp} = \lambda(v) \cdot r_{\perp} \quad (4.15)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

für alle Richtungen in x^2 - x^3 -Ebene, wobei λ nur von der Relativgeschwindigkeit von Σ und Σ' abhängt.

$$\Rightarrow \Lambda^3_2 = 0, \Lambda^2_2 = \Lambda^3_3 = \lambda(v) \quad (4.16)$$

Parität (Spiegelsymmetrie) impliziert, dass $\lambda(v) = \lambda(-v)$.
Relativität fordert ferner:

$$\begin{aligned} r_\perp &= \lambda(-v)r'_\perp \\ &= \lambda(-v)\lambda(v)r_\perp \\ &= \lambda^2(v)r_\perp \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\Rightarrow 1 = \lambda(v) = \Lambda^2_2 = \Lambda^3_3 \quad (4.18)$$

\Rightarrow Form vom Λ :

$$(\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Betrachte Lichtstrahlen in $\pm x^1$ -Richtung:

- in Σ : $x^1 = \pm ct = \pm x^0, x^2 = x^3 = 0$
- in Σ' : $x'^1 = \pm ct = \pm x'^0, x'^2 = x'^3 = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x'^0 &= \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1 = (\Lambda^0_0 \pm \Lambda^0_1) x^0 \\ x'^1 &= \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1 = (\Lambda^1_0 \pm \Lambda^1_1) x^0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

d.h. $x'^1 = \pm x'^0$ erfordert:

$$\Lambda^0_0 = \Lambda^1_1, \Lambda^1_0 = \Lambda^0_1 \quad (4.20)$$

5) Betrachte Lichtstrahl in x^2 - x^3 -Ebene:

in Σ :

$$\begin{aligned} x^2 &= ct \cos \varphi = x^0 \cos \varphi, \quad \varphi = \text{bel.}, \quad x^1 = 0 \\ x^3 &= ct \sin \varphi = x^0 \sin \varphi \\ \Rightarrow d &= \sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2} = x^0 = \text{zurückgelegte Distanz für } x^0 > 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

in Σ' :

$$\begin{aligned} x'^0 &= \Lambda^0_0 + \Lambda^0_2 x^2 + \Lambda^0_3 x^3 = (\Lambda^0_0 + \Lambda^0_2 \cos \varphi + \Lambda^0_3 \sin \varphi) x^0 \\ x'^1 &= \Lambda^1_0 x^0 = -\beta \Lambda^0_0 x^0 \\ x'^2 &= x^2 = x^0 \cos \varphi \\ x'^3 &= x^3 = x^0 \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.22)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow d' &= \sqrt{(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2} \\
 &= \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + (-\beta \Lambda^0_0)^2 x^0} \text{ für } x^0 > 0 \\
 &= \sqrt{1 + \beta^2 (\Lambda^0_0)^2} x^0 \\
 &\stackrel{!}{=} c \cdot t' \text{ Nach Konstanz der Lichtgeschwindigkeit!} \\
 &= (\Lambda^0_0 + \Lambda^0_2 \cos \varphi + \Lambda^0_3 \sin \varphi) x^0
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 + \beta^2 (\Lambda^0_0)^2} &\stackrel{!}{=} \Lambda^0_0 + \Lambda^0_2 \cos \varphi + \Lambda^0_3 \sin \varphi \text{ für beliebige } \varphi \\
 \Rightarrow \Lambda^0_2 &= \Lambda^0_3 = 0, \quad 1 + \beta^2 (\Lambda^0_0)^2 = (\Lambda^0_0)^2
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\Rightarrow \Lambda^0_0 = \gamma, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{4.25}$$

Die Vorzeichenwahl erfolgte durch die Forderung nach gleicher Zeitrichtung in Σ und Σ'

\Rightarrow Resultat:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Explizit:

$$\begin{aligned}
 t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c} x^1 \right) \\
 x'^1 &= \gamma (x^1 - vt) \\
 x'^2 &= x^2 \\
 x'^3 &= x^3 \text{ Boost in } x^1\text{-Richtung!}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Eigenschaften eines Boosts:

- $c \rightarrow \infty$: $t = t'$, $x'^1 = x^1 - vt$, $x'^2 = x^2$, $x'^3 = x^3$,
d.h. Lorentz-Trafo $\xrightarrow{c \rightarrow \infty}$ Galilei-Trafo

- Umkehrtrafo:

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu \tag{4.28}$$

Relativität impliziert:

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu \Big|_{v \rightarrow -v} \tag{4.29}$$

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

- **Zeitdilatation** : Ursprung von $\Sigma' (x' = 0)$ = Uhr mit Zeit t'
 → Ablesen der Uhr in Σ zur Zeit t :

$$x'^1 = 0 \Rightarrow x^1 = vt$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} \cdot vt \right) = \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) t = \underbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{<1} \cdot t \quad (4.30)$$

⇒ Uhr geht von Σ aus betrachtet langsamer.

Konsequenz:

Instabiles Teilchen mit Zerfallszeit τ ($\hat{=} t'$ in Σ') hat von Σ aus betrachtet eine längere Lebensdauer:

$$\tau(v) = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.31)$$

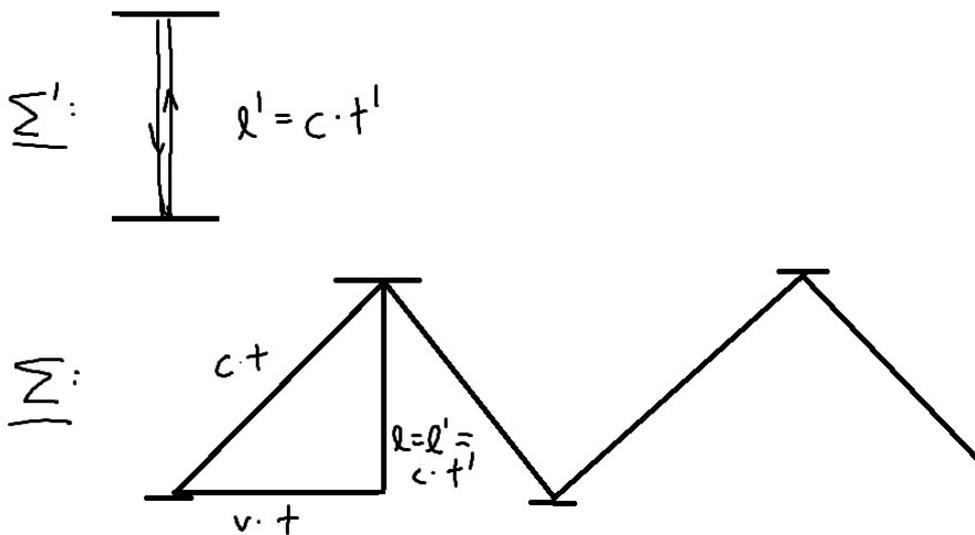


Abbildung 4.1: Einstein'sche Lichtuhr: Im System Σ' geht der Lichtstrahl in der Lichtuhr lediglich senkrecht, im System Σ hingegen legt er eine größere Strecke zurück. Man benötigt hier lediglich noch die Annahme, dass die Ausdehnung orthogonal zur Bewegungsrichtung unverändert bleibt, um die Zeitdilatation mit Hilfe des Satzes von Pythagoras herzuleiten.

- **Längenkontraktion**: Messe Distanz (=Maßstab) $\ell' = x'_A - x'_E$ im System

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

Σ' , d.h. x_A^1 und x_E^1 werden gleichzeitig ($t = t_A = t_E$) bestimmt:

$$\begin{aligned} \ell' &= x_A^1 - x_E^1 = \gamma(x_A^1 - vt - x_E^1 + vt) = \gamma(x_A^1 - x_E^1) = \gamma\ell \\ \ell &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ell' \end{aligned} \quad (4.32)$$

d.h. in Σ gemessene Länge ℓ scheint verkürzt (ℓ' = Ruhelänge in Σ')

- Grund für Zeitdilatation/Längenkontraktion:
Gleichzeitigkeit ist nicht mehr absolut, sondern hängt vom System ab.

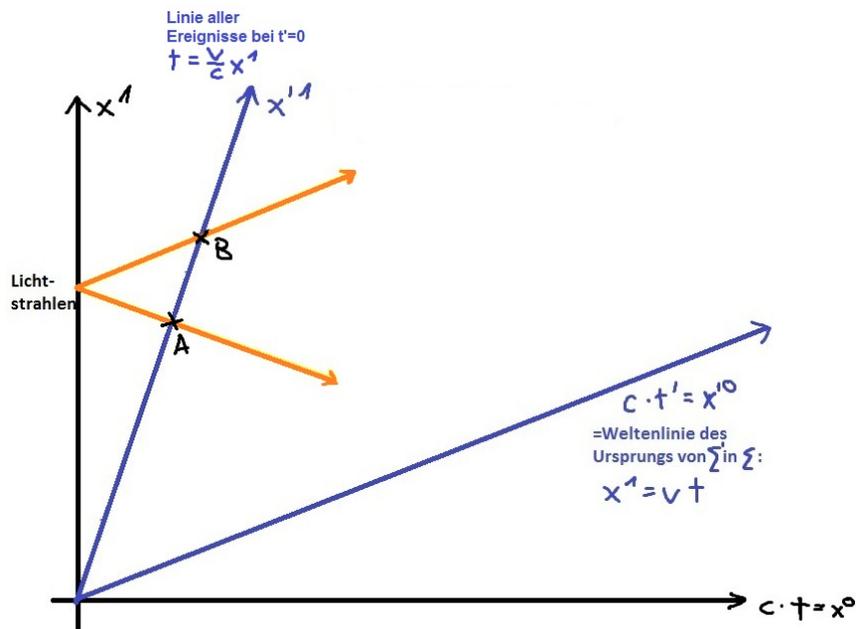


Abbildung 4.2: in Σ' : Lichtstrahlen kommen gleichzeitig in A und B an: $t'_A = t'_B$; in Σ : Lichtstrahl kommt in A eher an als in B: $t_A < t_B$

- Relativistischer Abstand:

$$s^2 := (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0)^2 - \underline{x}^2 =: x^2 \quad (4.33)$$

Alle Lorentz-Trafo's (Boosts und Drehungen) lassen s^2 invariant: $s'^2 = s^2$. Daher liefert das Vorzeichen des Abstandes $\Delta s^2 = (x - y)^2$ eine Charakterisierung der relativen Lage von Ereignissen x und y :

- $(x - y)^2 > 0$: Beobachter kann mit Geschwindigkeit $v < c$ von x nach y reisen. \rightarrow Es existiert eine kausale Verbindung zwischen x und y .
- $(x - y)^2 = 0$: x und y sind durch ein Lichtsignal verbunden.
- $(x - y)^2 < 0$: Es gibt ein Inertialsystem, in dem x und y gleichzeitig stattfinden. \rightarrow Es existiert keine Kausale Verbindung.

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

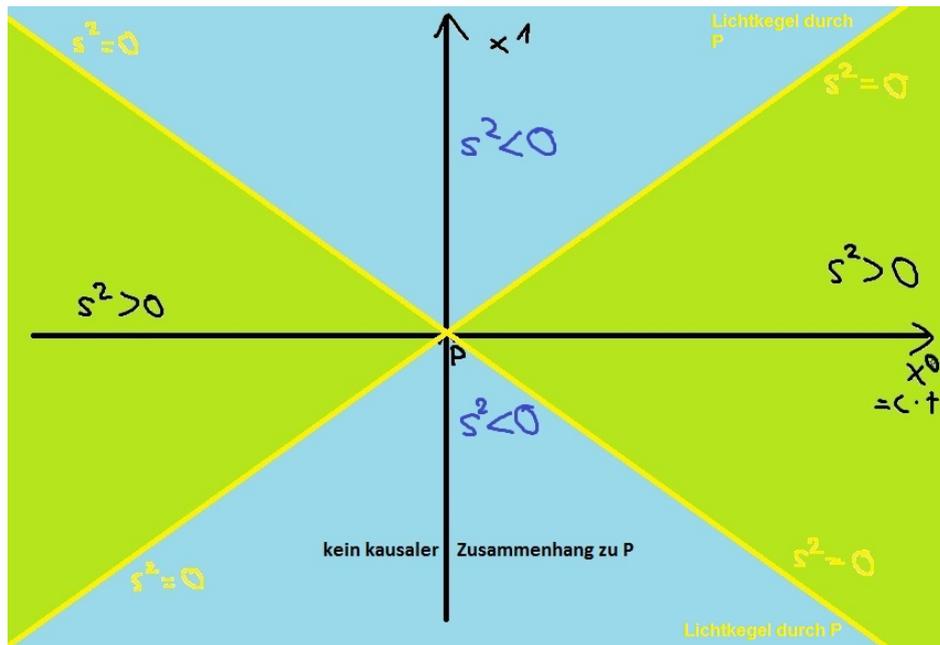


Abbildung 4.3: Die Punkte im Lichtkegel links von P bezeichnet man als die Vergangenheit von P , die im rechten als Zukunft.

Relativistische Geschwindigkeitsaddition:

Beachte 3 Systeme:

- Σ
- Σ' bewegt sich von Σ aus gesehen mit v_1 in x_1 -Richtung
- Σ'' bewegt sich von Σ' aus gesehen mit v_2 in x'_1 -Richtung

→ Berechne v_{12} , mit der sich Σ'' in Σ bewegt:

$$\begin{aligned}
 t'' &= \gamma_2 \left(t' - \frac{v_2}{c^2} x'^1 \right) = \gamma_2 \gamma_1 \left[t - \frac{v_1}{c^2} x^1 - \frac{v_2}{c^2} (x^1 - v_1 t) \right] \\
 &= \gamma_1 \gamma_2 \left[\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right) t - \frac{v_1 + v_2}{c} x^1 \right] \\
 &= \gamma_{12} \left[t - \frac{v_{12}}{c^2} x^1 \right] \\
 \Rightarrow v_{12} &= \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

$\Rightarrow |v_{12}| < c$, falls $|v_1|, |v_2| < c$

Allgemeine Lorentz-Trafos

- 6 Grundtypen kontinuierlicher Trafos:

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

- 3 Boosts x^1 -, x^2 -, x^3 - Richtungen
- 3 Drehungen von x^1 -, x^2 -, x^3 -Richtungen:

$$(\Lambda(D)^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & D & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

wobei D =Drehmatrix, $\underline{x}' = D\underline{x}$, $D^{-1} = D^T$.

Alle 6 Transformationen generieren die *eigentliche* ($\det \Lambda = 1$), *orthochrone* (erhält Zeitrichtung: $\Lambda^0_0 > 0$) *Lorentz-Gruppe* L_+^\uparrow .

Gruppenmultiplikation:

$$\Lambda_{12\nu}^\mu = (\Lambda_1 \Lambda_2)^\mu{}_\nu = \Lambda_{1\rho}^\mu \Lambda_{2\nu}^\rho \quad (4.36)$$

- Volle Lorentz-Gruppe:

$$L = L_+^\uparrow \times \underbrace{T}_{\text{Zeitumkehr:}} \times \underbrace{P}_{\text{Paritätstrafo:}} \quad (4.37)$$

$$\Lambda_T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad \Lambda_P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

- Allgemeine Vierervektoren:

Def.:

$$(a^\mu) := (a^0, \underline{a}) = \text{kontravarianter Vierervektor} \quad (4.38)$$

$$(a_\mu) := (a_0, -\underline{a}) = \text{kovarianter Vierervektor}$$

falls $a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$ bei Lorentz-Trafo $\Sigma \xrightarrow{\Lambda} \Sigma'$

$$g = (g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) := \text{diag}(1, -1, -1, -1) = \text{metrischer Tensor} \quad (4.39)$$

\Rightarrow Metrik hebt/senkt Indizes:

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu, \quad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu \quad (4.40)$$

- Lorentz-Trafo kovarianter Vektoren:

$$a'_\mu = g_{\mu\alpha} a'^\alpha = g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta a^\beta = \underbrace{g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta g^{\beta\nu}}_{=: \Lambda_\mu{}^\nu \text{ Heben/Senken der Indices}} a_\nu \quad (4.41)$$

$$\Rightarrow a'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu.$$

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

- Skalarprodukt von Vierervektoren a, b :

Mit a^2, b^2 und $(a + b)^2$ ist $a \cdot b$ auch Lorentz-invariant:

$$\begin{aligned} a \cdot b &:= \frac{1}{2} [(a + b)^2 - a^2 - b^2] \\ &= a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 \cdot b^0 - \underline{a} \cdot \underline{b} \\ &= a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu \\ &= a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu \end{aligned} \quad (4.42)$$

- Invarianz-Eigenschaft der Λ -Matrizen:

$$\begin{aligned} a'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu a^\nu, \quad b'^\mu = \Lambda^\mu_\nu b^\nu \\ \Rightarrow a' \cdot b' &= a'^\mu g_{\mu\nu} b'^\nu = \Lambda^\mu_\alpha a^\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta b^\beta \\ &= a \cdot b = a^\alpha g_{\alpha\beta} b^\beta \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Lambda^\mu_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta &= g_{\alpha\beta}, \quad \text{d.h. } \Lambda^\mu_\alpha \Lambda_\mu^\beta = \delta_\alpha^\beta \\ &\text{und } (\Lambda^{-1})^\beta_\mu = \Lambda_\mu^\beta. \end{aligned} \quad (4.44)$$

bzw. in Matrixform:

$$\begin{aligned} \Lambda^T g \Lambda &= g \\ \det g &= \det(\Lambda^T g \Lambda) = \det g \cdot (\det \Lambda)^2 \\ \Rightarrow \det \Lambda &= \pm 1 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Jedes Λ mit $\Lambda^T g \Lambda = g$ definiert eine Lorentz-Transformation, d.h.

$$L = \{ \Lambda \mid \Lambda = \text{reelle } 4 \times 4\text{-Matrix mit } \Lambda^T g \Lambda = g \} \quad (4.46)$$

- *Tensoren*:

$$T = \overbrace{T^{\alpha\beta\dots}}^{m \text{ Indizes}} \underbrace{\mu\nu\dots}_{n \text{ Indizes}} \quad (4.47)$$

heißt m -fach kontravarianter und n -fach kovarianter Tensor $(m + n)$ -ter Stufe, falls T sich genauso transformiert wie das entsprechende Produkt aus 4er-Vektoren:

$$a^\alpha b^\beta \dots m_\mu n_\nu \dots \quad (4.48)$$

d.h.

$$T'^{\alpha'\beta'\dots} = \Lambda^{\alpha'}_\alpha \Lambda^{\beta'}_\beta \dots \Lambda_{\mu'}^\mu \Lambda_{\nu'}^\nu T^{\alpha\beta\dots} \quad (4.49)$$

Beispiele:

$\overline{g^{\mu\nu}}, \overline{\delta^\mu_\nu}, \delta_\mu^\nu, g_{\mu\nu} =$ Tensoren 2. Stufe.

Beachte: g und δ sind sogar invariant, d.h. $g' = g$, etc.

→ Kontraktion bzw. Verjüngung von Tensoren sind kovariante Operationen, d.h. sie vertauschen mit Lorentz-Trafos:

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

– Verjüngung:

$$\left(T^{\alpha\beta\dots}_{\alpha\nu\dots}\right)' = \left(T^{\alpha\beta\dots}_{\mu\nu\dots}\right)' \cdot \delta^\mu_\alpha \quad (4.50)$$

– Kontraktion:

$$\left(T^{\alpha\beta\dots}_{\mu\nu\dots} \cdot a_\alpha\right)' = \left(T^{\alpha\beta\dots}_{\mu\nu}\right)' a'_\alpha \quad (4.51)$$

4.3 Relativistische Dynamik

Vierergeschwindigkeit und Eigenzeit

$(x^\mu) = (ct, \underline{x})$, $(dx^\mu) = (cdt, d\underline{x})$ sind 4er-Vektoren.

$$\Rightarrow \left(\frac{dx^\mu}{dt}\right) = \left(c, \frac{d\underline{x}}{dt}\right) = (c, \dot{\underline{x}}) \quad (4.52)$$

ist kein Vierervektor, da dt nicht invariant ist!

Ausweg: ersetze dt durch *Eigenzeit*

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (4.53)$$

wobei $|\underline{v}| = v = |\dot{\underline{x}}|$. Die Eigenzeit stellt eine Art „innere Uhr“ eines Teilchens/Beobachters dar.

Definition: Vierergeschwindigkeit

$$(u^\mu) := \left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\underline{x}}{d\tau}\right) = (c\gamma, \underline{v}\gamma) \quad (4.54)$$

Analog: Viererbeschleunigung

$$(b^\mu) := \left(\frac{du^\mu}{d\tau}\right) \quad (4.55)$$

Frage: Ist $(p^\mu) := (mu^\mu)$ die relativistische Verallgemeinerung eines Teilchenimpulses (Teilchenmasse = konstant) ?

→ Durch Dynamik (Bewegungsgleichung) zu beantworten!

Lagrange-Formalismus:

Wirkung S = zentrale Größe der Lagrange-Mechanik.

→ Forderung, dass S Lorentz-invariant ist, um kovariante Bewegungsgleichungen zu erhalten.

Anwendung auf freies Teilchen der Masse m :

$x^\mu(\tau)$ = Trajektorie („Weltlinie“) des Teilchens = 4er-Vektor

$$ds^2 = dx^2 = dx_\mu dx^\mu = \text{invariantes Linienelement} \quad (4.56)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

$$\Rightarrow \int_a^b ds = \text{invariante Länge der Weltlinie} = \text{einfachste Invariante einer Weltlinie!} \quad (4.57)$$

→ Ansatz für Wirkung:

$$S = k \cdot \int_a^b ds \quad (4.58)$$

mit einer Konstanten k . Parametrisierung im System Σ :

$$\begin{aligned} (x^\mu(\tau)) &= (ct(\tau), \underline{x}(\tau)) \\ (dx^\mu) &= (cdt, d\underline{x}) \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - d\underline{x}^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \quad \underline{v} = \dot{\underline{x}} = \frac{d\underline{x}}{dt} \quad (4.60)$$

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow S = \int_{t_a}^{t_b} dt \underbrace{kc \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{:=L=\text{Lagrangefunktion} \neq \text{invariant}} \quad (4.61)$$

Identifikation von k für $v \ll c$:

$$L = kc \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = kc \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \right) = \underbrace{kc}_{const.} \underbrace{-\frac{k}{2c} v^2}_{\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} m v^2 \text{ nicht-relat. kinetische Energie}} + \dots \Rightarrow k = -mc \quad (4.62)$$

$$\Rightarrow L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{mc^2}{\gamma} \quad (4.63)$$

Relativistischer Impuls:

$$p^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial L}{\partial v^k} = -mc^2 \frac{-2 \frac{v^k}{c^2}}{2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m v^k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m v^k = m u^k \quad (4.64)$$

$p^k = m u^k$ entspricht der Erwartung, $k = 1, 2, 3$.

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

Lagrange-Gleichung: (aus Hamilton-Prinzip, $\delta S = \delta \int dt L = 0$)

$$0 = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^k}}_{=0} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) = -\dot{p}^k \Rightarrow \underline{p} = const \quad (4.65)$$

$\Rightarrow x^k = \text{zyklisch}$

Definition: Impuls-Vierer-Vektor

$$p^\mu := mu^\mu \quad (4.66)$$

Es stellt sich also die Frage nach der Bedeutung von $p^0 = mu^0 = mc\gamma$?

Hamilton-Funktion und Energie:

$$\begin{aligned} H(x^k, p^k) &= \underbrace{\dot{x}^k p^k}_{= \sum_{k=1}^3 \dot{x}^k p^k} - L(x^k, \dot{x}^k), \quad \dot{x}^k = v^k \\ &= \gamma m v^k v^k + \frac{mc^2}{\gamma} = \gamma mc^2 \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) = \gamma mc^2 \\ &= p^0 c = \sqrt{m^2 c^4 + \underline{p}^2 c^2} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Da $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ist, gilt $H = const =: E$.

Bemerkung:

- Die Folgerung von $H = T + V$ aus $L = T - V$ gilt nicht, da T keine bilineare Funktion der v^k ist!
- Da $E = const$ aus $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ folgt, wird $E = p^0 c = h$ als Energie des Systems definiert.

Hamilton-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{p}^k &= -\frac{\partial H}{\partial x^k} = 0, \quad x^k = \text{zyklisch}, \quad p^k = const. \\ \dot{x}^k &= \frac{\partial H}{\partial p^k} = \frac{2p^k c^2}{2\sqrt{m^2 c^4 + \underline{p}^2 c^2}} = \frac{p^k c}{\sqrt{m^2 c^2 + \underline{p}^2}} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Die letzte Gleichung ist somit konsistent mit $p^k = \gamma m \dot{x}^k$.

4er-Impuls freier Teilchen $p^\mu = mu^\mu$

- Energie-/Impulserhaltung ($E = const$ und $\vec{p} = const.$) wird in der SRT zur 4er-Impulserhaltung $p^\mu = const.$

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

- Invariante:

$$\begin{aligned} p^2 &= (p^0)^2 - \underline{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2 \\ &= m^2 u^2 = m^2 c^2 = \text{const} \end{aligned} \quad (4.69)$$

→ Energie-Impuls-Relation (*Massenschalenbedingung* für Teilchen)

Bemerkung:

Gilt auch für masselose Teilchen ($m = 0$) → z.B. für Photonen:

$$E = c|p| \quad (4.70)$$

- Lorentz-Trafo:

$$p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}, \quad (4.71)$$

falls

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (4.72)$$

d.h. $p^0 = E/c$ transformiert sich wie $x^0 = ct$ und \underline{p} wie \underline{x} .

- Gesamt-4er-Impuls ist erhalten bei Teilchenstößen:

N freie Teilchen $\{p_i^{\mu}\}_{i=1}^N$, $p_i^2 = m_i^2 c^2$.

Das Experiment zeigt, dass beim Stoß (Wechselwirkung) Teilchen sich umwandeln können, oder auch ganz neue Teilchen entstehen können. Man erhält dann:

M freie Teilchen $\{k_j^{\mu}\}_{j=1}^M$, $k_j^2 = M_j^2 c^2$.

Der Energie-Impuls-Satz liefert dann:

$$\sum_{i=1}^N p_i^{\mu} = \sum_{j=1}^M k_j^{\mu} \quad (4.73)$$

Bemerkung:

Der Satz gilt klassisch und quantenmechanisch stets bei zeitlicher und räumlicher Translationsinvarianz ($\hat{=}$ abgeschlossenem System!)

Z.B.: elastische, klassische Streuung: ($M = N$, $m_i = M_i$):

$$\begin{aligned} L(\{x_i^{\mu}\}, \{\dot{x}_i^{\mu}\}) &= L(\{x_i^{\mu} + a^{\mu}\}, \{\dot{x}_i^{\mu}\}) \\ \Rightarrow 0 &= \frac{\partial}{\partial a^k} L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i^k} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^k} \right) = \sum_{i=1}^N \dot{p}_i^k \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial a^0} L = \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{dH}{dt} \quad (4.75)$$

Beispiel: Teilchenzerfall $\pi^- \rightarrow \mu^- \nu_{\mu}$

Das Pion π^- habe die Masse m_{π} , das Myon μ^- habe die Masse m_{μ} und das

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

Myon-Neutrino die Masse $m_\nu \approx 0$.

Im Ruhesystem des π^- :

$$(p_\pi^\alpha) = (m_\pi c, \underline{0}), \quad p_\pi^2 = m_\pi^2 c^2 \quad (4.76)$$

$$(p_\mu^\alpha) = (E_\mu/c, \underline{p}_\mu), \quad p_\mu^2 = E_\mu^2/c^2 - \underline{p}_\mu^2 = m_\mu^2 c^2 \quad (4.77)$$

$$(p_\nu^\alpha) = (E_\nu/c, \underline{p}_\nu), \quad p_\nu^2 = E_\nu^2/c^2 - \underline{p}_\nu^2 = 0 \quad (4.78)$$

Energieerhaltung:

$$m_\pi c = E_\mu/c + E_\nu/c \quad (4.79)$$

Impulserhaltung:

$$\underline{0} = \underline{p}_\mu + \underline{p}_\nu \quad (4.80)$$

Setzen wir nun Gl. (4.80) in (4.77)-(4.78) ein:

$$(E_\mu^2 - E_\nu^2)/c^2 = m_\mu^2 c^2, \quad (4.81)$$

d.h.

$$(E_\mu + E_\nu)(E_\mu - E_\nu) = m_\mu^2 c^4. \quad (4.82)$$

Gleichung (4.79) besagt, dass

$$E_\mu + E_\nu = m_\pi c^2 \quad (4.83)$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_\pi c^2 (E_\mu - E_\nu) &= m_\mu^2 c^4 \\ \Rightarrow E_\mu &= \frac{1}{2} m_\pi c^2 + \frac{m_\mu^2 c^2}{2m_\pi}, \quad E_\nu = \frac{1}{2} m_\pi c^2 - \frac{m_\mu^2 c^2}{2m_\pi} \end{aligned} \quad (4.84)$$

Bemerkung:

Die Zerfallsrichtung ist nicht festgelegt: Isotroper Zerfall bei unpolarisierten π^- !

4.4 Kovariante Formulierung der Maxwell - Gleichungen

Kovariante Differenziation und Integration

- Betrachte Lorentz-Transformation $\Sigma \xrightarrow{\Lambda} \Sigma'$

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu \\ x'_\mu &= \Lambda_\mu^\nu x_\nu, \quad x_\mu = \Lambda_\mu^\nu x'_\nu \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \Lambda_\nu^\mu \quad (4.86)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

- 4er-Gradient:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \xrightarrow{\Lambda} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (4.87)$$

d.h. $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ transformiert sich kovariant (wie x_μ)

Wir definieren:

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \underline{\nabla} \right), \quad \underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\underline{\nabla} \right)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \underline{\nabla}^2 = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta = \square = \text{invariant} \quad (4.89)$$

- Volumenintegral:

$$d^4 x := dx^0 d^3 \underline{x} = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (4.90)$$

$$d^4 x \xrightarrow{\Lambda} d^4 x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4 x = \underbrace{|\det \Lambda|}_{=1} d^4 x \quad (4.91)$$

$$= d^4 x = \text{invariant}$$

Aber:

$$d^3 \underline{x} = \frac{1}{\gamma} d^3 \underline{x}' \quad (4.92)$$

gilt für ein Volumenelement, das in Σ' ruht. Dabei ist $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ der Boostfaktor für die Längenkontraktion in Boostrichtung!

Invarianz der Ladung:

Beobachtung: Ladungsmengen q sind Lorentz-invariant, d.h. q = intrinsische Kenngröße von Teilchen.

→ Frage nach dem Transformationsverhalten von ρ und \vec{j} ?

Betrachte ein Ladungselement Δq :

Σ_0 : Ruhesystem von Δq , d.h.

$$\Delta q = \rho_0 dV_0, \quad \underline{j}_0 = 0, \quad \rho_0 = \text{Ladungsdichte im Ruhesystem} \quad (4.93)$$

Σ : System, in dem sich Σ_0 (d.h. Δq) mit \underline{v} bewegt.

$$\Rightarrow \Delta q = \rho dV = \rho_0 dV_0 = \text{invariant}$$

$$dV = \frac{1}{\gamma} dV_0 \Rightarrow \rho = \gamma \rho_0 \quad (4.94)$$

$$\Rightarrow \underline{j} = \rho \cdot \underline{v} = \gamma \underline{v} \rho_0$$

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

Somit erhalten wir

$$(c \cdot \rho, \underline{j}) = \rho_0 (c\gamma, \underline{v}\gamma) = \rho_0 (u^\mu) = \text{kontravariant}, \quad (4.95)$$

denn ρ_0 ist per Definition invariant und (u^μ) ist kontravariant.

Wir definieren also:

$$(j^\mu) := (c\rho, \underline{j}) = \text{4er-Stromdichte} \quad (4.96)$$

Die Kontinuitätsgleichung erhalten wir somit in Σ zu:

$$0 = \partial_t \rho + \underline{\nabla} \cdot \underline{j} = \frac{1}{c} \partial_t j^0 + \partial_k j^k = \partial_\mu j^\mu = \text{invariant} \quad (4.97)$$

4.4.1 Maxwell-Gleichungen für Φ , \underline{A}

In Lorenz-Eichung gilt unter Einschränkung auf Felder im Vakuum:

$$\begin{aligned} \square \Phi &= \rho / \epsilon_0 \\ \square \underline{A} &= \mu_0 \underline{j} \\ 0 &= \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \underline{\nabla} \cdot \underline{A} \end{aligned} \quad (4.98)$$

Die Inhomogenität

$$j^\mu = (c\rho, \underline{j}) \quad (4.99)$$

ist ein kovariantes Objekt und bestimmt Φ , \underline{A} .

→ Vermutung, dass eine Kombination aus Φ , \underline{A} einen 4er-Vektor bilden.

Ansatz:

$$A^\mu = (k\Phi, \underline{A}) \quad (4.100)$$

→ Einsetzen:

$$\bullet \quad 0 = \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \underline{\nabla} \cdot \underline{A} = \underbrace{\frac{1}{c}}_{=k} \partial_0 \Phi + \partial_k A^k = \partial_\mu A^\mu \quad (4.101)$$

$$\Rightarrow A^\mu = \left(\frac{1}{c} \Phi, \underline{A} \right)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \square A^\mu &= \square \left(\frac{\Phi}{c}, \underline{A} \right) = \left(\frac{1}{c} \square \Phi, \square \underline{A} \right) \\ &= \left(\frac{\rho}{c\epsilon_0}, \mu_0 \underline{j} \right) = \mu_0 \left(\frac{\rho}{c\epsilon_0 \mu_0}, \underline{j} \right) = \mu_0 (c\rho, \underline{j}) = \mu_0 j^\mu \end{aligned} \quad (4.102)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

⇒ Maxwell-Gleichungen für $A^\mu = (\Phi/c, \underline{A})$ in Lorenz-Eichung:

$$\boxed{\square A^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad \partial_\mu A^\mu = \partial A = 0} \quad (4.103)$$

A^μ wird als *4er-Potential* bezeichnet.

Zur Eichfreiheit:

- Eichtransformationen lassen sich ebenfalls kovariant schreiben:

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi - \partial_t \chi, \\ \underline{A} &\rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla} \chi, \\ \Leftrightarrow A^\mu &\rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi, \end{aligned} \quad (4.104)$$

wobei χ eine beliebige Funktion $\chi(\underline{x}, t)$ ist.

- Durch die Invarianz von $\partial A = 0$ gilt die Lorenz-Eichung in allen Inertialsystemen gleichermaßen oder in keinem. Es verbleibt eine Eichfreiheit trotz $\partial A = 0$:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi \quad \text{mit} \quad \underbrace{\square \chi = 0}_{\substack{\text{invariante} \\ \text{Bedingung}}} \quad (4.105)$$

- Nicht kovariante Eichungen sind zulässig (z.B. $\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$), aber die Eichbedingung ändert ihre Form unter Lorentz-Transformationen. Solche Eichungen sind durch nicht-Lorentz-invariante $\chi(\underline{x}, t)$ realisiert.

Kovariante Form der Feldstärken $\underline{E}, \underline{B}$ ($\underline{E}, \underline{B}$) sollte ein kovariantes Objekt bilden (Tensor!) aus 4er-Vektoren A^μ, ∂^μ sein.

→ 6 Komponenten, d.h. Rang > 1 (entspricht 4er-Vektor mit 4 Komponenten)

→ Tensor $F^{\mu\nu}$ 2. Stufe?

- allgemein: $4 \times 4 = 16$ Komponenten → Einschränkungen?
- $F^{\mu\nu} = F^{\nu\mu}$: 10 Komponenten
- $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$: 6 Komponenten! Ok?

Zusammenhang zwischen $(\underline{E}, \underline{B})$ und A^μ :

- Umformung von B^i (mit Summenkonvention):

$$\begin{aligned} B^i &= (\underline{\nabla} \times \underline{A})^i \\ &= \epsilon^{ijk} \nabla^j A^k = -\epsilon^{ijk} \partial^j A^k \\ B^1 &= -\epsilon^{1jk} \partial^j A^k = -\epsilon^{123} \partial^2 A^3 - \epsilon^{132} \partial^3 A^2 = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 \\ B^2 &= \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \\ B^3 &= \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 \end{aligned} \quad (4.106)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

Wir machen somit den Ansatz:

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (4.107)$$

- Es ist also noch zu überprüfen, ob $\underline{E} = -\underline{\nabla}\Phi - \partial_t \underline{A}$ Teil von $F^{\mu\nu}$ ist:

$$\begin{aligned} F^{k0} &= \partial^k A^0 - \partial^0 A^k \\ &= \partial^k \frac{\Phi}{c} - \partial^0 A^k \\ &= -\partial_k \frac{\Phi}{c} - \frac{1}{c} \partial_t A^k = \frac{1}{c} E^k. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Der Ansatz ist also in Ordnung.

Wir nennen folglich

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E^1/c & -E^2/c & -E^3/c \\ E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.109)$$

den *Elektromagnetischen Feldstärketensor*

Verifikation der Eichinvarianz von $F^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu \chi) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \chi) \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.110)$$

Maxwell-Gleichungen für $F^{\mu\nu}$:

- Inhomogene Gleichungen:

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu \text{ mit } \partial A = 0$$

$$\begin{aligned} \mu_0 j^\nu &= \square A^\nu = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu) \\ &= \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu) - \underbrace{\partial^\nu (\partial_\mu A^\mu)}_{=0} \\ &= \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu} \quad (4.112)$$

kovariante Form von $\underline{\nabla} \underline{E} = \rho/\epsilon_0$ und $\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \partial_t \underline{E}/c^2$. Die Verifikation erfolgt durch Einsetzen (\rightarrow Übung)

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

- Homogene Gleichungen:

$$\begin{array}{l|l} \text{Inhomogene Gleichungen für } j^\mu = 0: & \text{Homogene Gleichungen:} \\ \nabla \underline{E} = 0, \nabla \times \underline{B} = \partial_t \underline{E}/c^2 & \nabla \underline{B} = 0, \nabla \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B} \end{array}$$

⇒ Falls es eine kovariante Operation gibt, für die

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \left| \begin{array}{l} \underline{E} \rightarrow c\underline{B} \\ \underline{B} \rightarrow -\underline{E}/c \end{array} \right., \quad (4.113)$$

so dass $\tilde{F}^{\mu\nu} = \text{Tensor 2. Stufe}$, so lassen sich die homogenen Maxwell-Gleichungen schreiben als $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$.

Konstruktion:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (4.114)$$

wobei hierbei der total asymmetrische Tensor im 4-dim. Minkovskiraum auftritt:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & (\mu\nu\rho\sigma) = \text{gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & (\mu\nu\rho\sigma) = \text{ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.115)$$

Bemerkungen zu $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$:

- Es gilt:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g_{\rho\gamma} g_{\sigma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.116)$$

- $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ist ein invarianter (Pseudo-)Tensor:

$\epsilon \xrightarrow{\Lambda} \epsilon'$ mit

$$\begin{aligned} \epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} &= \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \underbrace{\det \Lambda}_{=\pm 1} \cdot \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \end{aligned} \quad (4.117)$$

Bei *eigentlichen* Transformationen ist $\det \Lambda = 1$

Anwendung:

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{01} &= \frac{1}{2} \epsilon^{0123} F_{23} + \frac{1}{2} \epsilon^{0132} F_{32} = F_{23} \\ &= g_{2\mu} g_{3\nu} F^{\mu\nu} = F^{23} = -B_1 \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{12} &= \frac{1}{2} \epsilon^{1203} F_{03} + \frac{1}{2} \epsilon^{1230} F_{30} = F_{03} \\ &= g_{0\mu} g_{3\nu} F^{\mu\nu} = -F^{03} = E^3/c \end{aligned} \quad (4.119)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

analog erhält man die weiteren Komponenten:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3/c & -E^2/c \\ B^2 & -E^3/c & 0 & E^1/c \\ B^3 & E^2/c & -E^1/c & 0 \end{pmatrix} = F \begin{array}{l} \underline{E} \rightarrow c\underline{B} \\ \underline{B} \rightarrow -\underline{E}/c \end{array} \quad (4.120)$$

= Dualer Feldstärketensor

$\Rightarrow \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$, kovariante Form von $\nabla \cdot \underline{B} = 0$, $\nabla \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B}$
(Verifikation durch Einsetzen = Übung)

Lorentz-Transformation für Felder

$\Sigma \xrightarrow{\Lambda} \Sigma'$, Σ' bewegt sich in Σ mit der konstanten Geschwindigkeit $\underline{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta},$$

$$\begin{aligned} (\Lambda^\mu_\nu) &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \Lambda, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Lambda \begin{pmatrix} 0 & -E^1/c & -E^2/c & -E^3/c \\ E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda \\ &= \dots \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -E^1/c & \gamma(-E^2/c + \beta B^3) & \gamma(-E^3/c - \beta B^2) \\ E^1/c & 0 & \gamma(\beta E^2/c - B^3) & \gamma(\beta E^3/c + B^2) \\ \gamma(E^2/c - \beta B^3) & \gamma(-\beta E^2/c + B^3) & 0 & -B^1 \\ \gamma(E^3/c + \beta B^2) & \gamma(-\beta E^3/c - B^2) & B^1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.121)$$

d.h.

$$E'^1 = E^1$$

$$E'^2 = \gamma(E^2 - vB^3) = \gamma(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})^2 \quad (\text{Index oben, kein Quadrat!}) \quad (4.122)$$

$$E'^3 = \gamma(E^3 + vB^2) = \gamma(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})^3$$

B'^k analog!

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

⇒ Verhalten der Anteile \parallel bzw. \perp zu $\underline{v} = v\underline{e}_1$:

$$\bullet \underline{E}'_{\parallel} = E'^1 \underline{e}_1 = E^1 \underline{e}_1 = \underline{E}_{\parallel}, \quad (4.123)$$

$$\bullet \underline{E}'_{\perp} = \gamma(\underline{E}_{\perp} + \underline{v} \times \underline{B}), \quad (4.124)$$

wobei $\underline{E}_{\perp} = E^2 \underline{e}_2 + E^3 \underline{e}_3$, etc.

Zusammenfassung:

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \underline{E}_{\parallel} + \underline{E}_{\perp} \\ \underline{E}_{\parallel} &= (\underline{E} \cdot \underline{v}) \cdot \frac{\underline{v}}{v^2} = \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma^2 - 1)} (\underline{E} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{v} \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} \underline{E}' &= \underline{E}'_{\parallel} + \underline{E}'_{\perp} \\ &= \underline{E}_{\parallel} + \gamma(\underline{E}_{\perp} + \underline{v} \times \underline{B}) \\ &= (1 - \gamma)\underline{E}_{\parallel} + \gamma(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \end{aligned} \quad (4.126)$$

$$\boxed{\underline{E}' = -\frac{\gamma^2}{c^2(1 + \gamma)} (\underline{E} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{v} + \gamma(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})} \quad (4.127)$$

Die Transformation von \underline{B} wird analog berechnet, bzw. eleganter abgekürzt:

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\mu\nu} &= F^{\mu\nu} \Big|_{\substack{E \rightarrow cB \\ B \rightarrow -E/c}} \\ \tilde{F}'^{\mu\nu} &= F'^{\mu\nu} \Big|_{\substack{E' \rightarrow cB' \\ B' \rightarrow -E'/c}} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta} \Big|_{\substack{E \rightarrow cB \\ B \rightarrow -E/c}} \end{aligned} \quad (4.128)$$

⇒ Anwendung der Ersetzungen $\underline{E}^{(\prime)} \rightarrow c\underline{B}^{(\prime)}$, $\underline{B}^{(\prime)} \rightarrow -\underline{E}^{(\prime)}/c$ auf Gl. (4.127) möglich:

$$\boxed{\underline{B}' = -\frac{\gamma^2}{c^2(1 + \gamma)} (\underline{B} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{v} + \gamma \left(\underline{B} - \frac{1}{c^2} \underline{v} \times \underline{E} \right)} \quad (4.129)$$

Invarianten der Felder

$$\bullet F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \dots = \underbrace{-2\underline{E}^2/c^2}_{<0} + \underbrace{2\underline{B}^2}_{>0} = -2\underline{E}'^2/c^2 + 2\underline{B}'^2 \quad (4.130)$$

⇒ Ein reines \underline{E} -Feld kann durch Lorentz-Transformationen nicht in ein reines \underline{B} -Feld verwandelt werden und umgekehrt! (Invarianz des Vorzeichens von $F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}$!)

$$\bullet \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -4\underline{E} \cdot \underline{B}/c \quad (4.131)$$

4.4.2 Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung

Betrachte Σ, Σ' wie oben mit:

- Punktladung q ruht in Σ'
- Beobachter, der im Ursprung von Σ sitzt.

In Σ' : q ruht in $\underline{a}' = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h.

$$\underline{E}'(\underline{x}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\underline{x}' - \underline{a}'}{|\underline{x}' - \underline{a}'|^3}, \quad \underline{B}'(\underline{x}') = 0. \quad (4.132)$$

Der Beobachter befindet sich im Punkt $\underline{x}'(t') = \begin{pmatrix} -vt' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (aus Sicht von Σ')

In Σ : q ist lokalisiert in $\underline{a}(t) = \begin{pmatrix} vt \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$.

→ E-Feld, das in $\underline{x} = 0$ in Σ gemessen wird:

- \parallel -Komponente:

$$\begin{aligned} E^1 = E'^1 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-vt'}{(v^2t'^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-v\gamma t}{(v^2\gamma^2t^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (4.133)$$

- \perp -Komponente:

$$E^2 = \gamma(E'^2 - v \underbrace{B'^3}_{=0}) = \gamma E'^2 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma a}{(v^2\gamma^2t^2 + a^2)^{3/2}} \quad (4.134)$$

$$E^3 = \gamma \left(E'^3 + v \underbrace{B'^2}_{=0} \right) = \gamma E'^3 = 0 \quad \text{in } \underline{x} = 0 \quad (4.135)$$

Eigenschaften:

- Richtung von \underline{E} :

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{a_1}{a_2} = \frac{vt}{a} \\ \frac{E^1}{E^2} &= \frac{vt}{a} = \tan \alpha \end{aligned} \quad (4.136)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

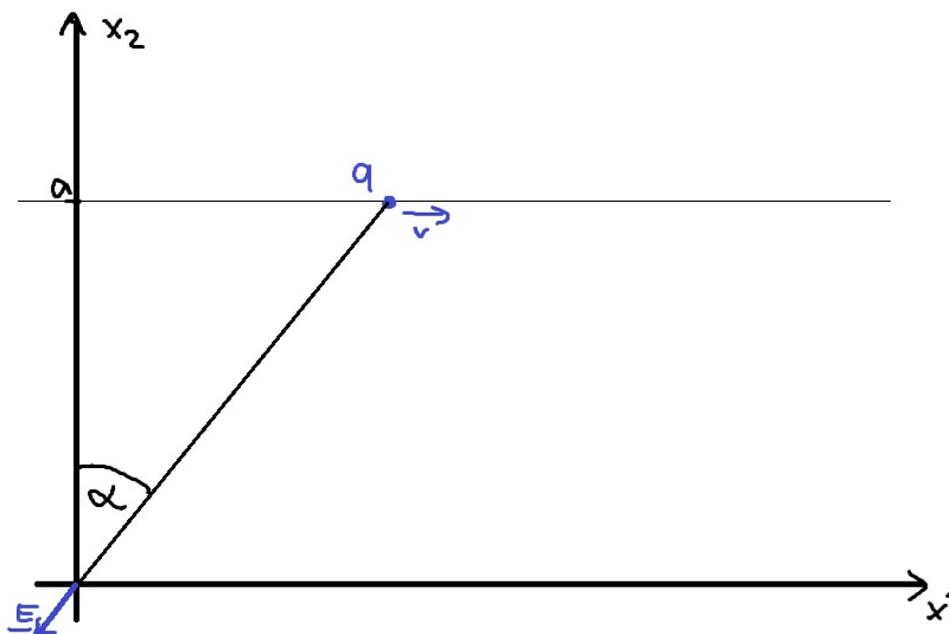


Abbildung 4.4: Die in Σ bewegte Ladung q erzeugt im Ursprung von Σ ein E -Feld, welches immer radial von ihr weg zeigt.

- Zeitverlauf der Komponenten in $x = 0$:

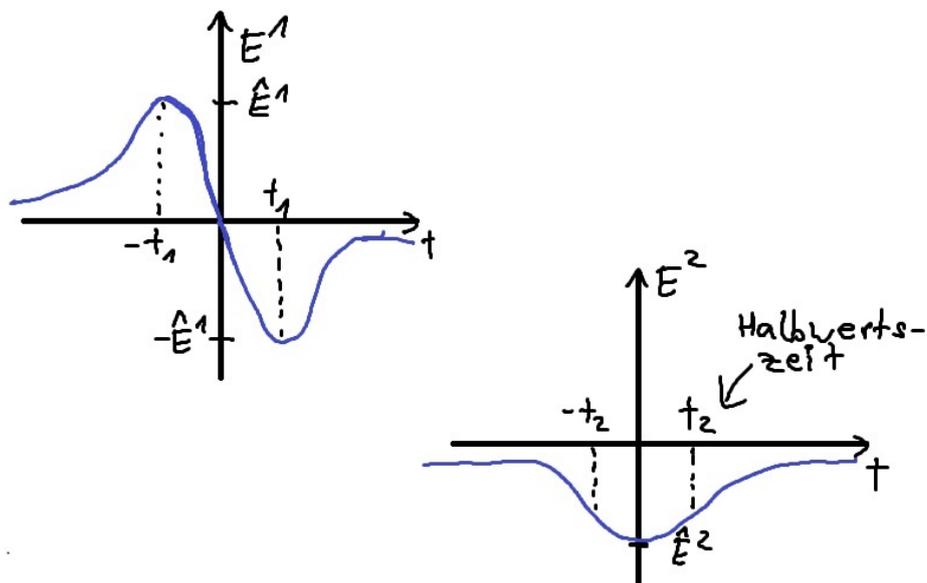


Abbildung 4.5: Der zeitliche Verlauf der Komponenten des E -Feldes beim Vorbeifliegen der Ladung q .

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

$$\hat{E}^1 = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2} = \text{const.}, \quad t_1 = \frac{a}{\sqrt{2}v\gamma} \underset{v \rightarrow c}{\sim} \frac{\text{const}}{\gamma}, \quad (4.137)$$

$$\hat{E}^2 = -\gamma \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \sim \text{const} \cdot \gamma, \quad t_2 = \frac{a}{v\gamma} \left(2^{2/3} - 1\right)^{1/2} \sim \frac{\text{const}}{\gamma}. \quad (4.138)$$

⇒ Für $v \sim c$ ($\gamma \gg 1$) wird der Feldpuls zeitlich in Flugrichtung kontrahiert und die Komponente $E_{\perp} \propto \gamma$ überhöht!

($\gamma, 1/\gamma$ = relativistische Verstärkungsfaktoren)

- Feldlinienverlauf:

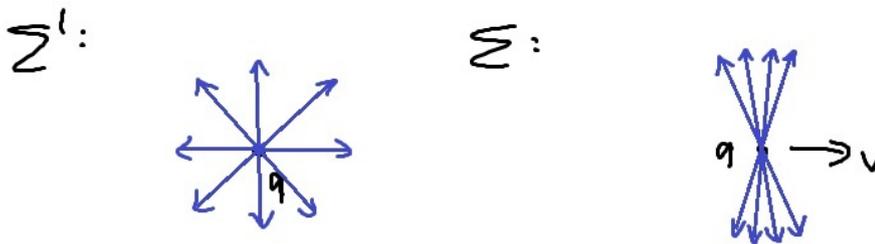


Abbildung 4.6: In Σ sind die Feldlinien „zusammengeschoben“.

B-Feld, das in $\underline{x} = 0$ gemessen wird:

- \parallel -Komponente: $B^1 = B'^1 = 0$
- \perp -Komponenten:

$$B^2 = -\gamma \frac{v}{c^2} E'^3 = 0$$

$$B^3 = \gamma \frac{v}{c^2} E'^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-\frac{v}{c^2} \gamma a}{(v^2 \gamma^2 t^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0, \quad (4.139)$$

d.h.

$$\underline{B} = \gamma \frac{\mu_0 q}{4\pi} \cdot \frac{-\underline{v} \times \underline{a}(t)}{(v^2 \gamma^2 t^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \underline{a}(t) = \begin{pmatrix} vt \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.140)$$

γ -Faktor $\hat{=}$ relativistische Abweichungen vom Biot-Sarvat-Gesetz.

4.5 Lorentz-Kraft als 4er-Kraft

Im Folgenden betrachten wir ein Teilchen mit Masse m und Ladung q im EM-Feld.

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

Lagrange-Dichte:

Nicht relativistisch:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - q\Phi + q\dot{x} A \quad (4.141)$$

relativistisch:

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} - \frac{qu_\mu A^\mu}{\gamma} \quad (4.142)$$

Beachte: Der Wechselwirkungsterm ist bereits Lorentz-invariant, da $\gamma L =$ Lorentz-invariant, und somit

$$S = \int dt L = \int d\tau (\gamma L) = \text{invariant.} \quad (4.143)$$

Wir können somit die Lagrangegleichung formulieren als:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial L}{\partial x^k} \quad (4.144)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^\ell \dot{x}^\ell}{c^2}} - q\Phi + q\dot{x}^\ell A^\ell \right) \\ &= \underbrace{\gamma m \dot{x}^k}_{= p^k = \text{kartesischer Impuls}} + qA^k =: \pi^k \text{ kanonischer Impuls} \end{aligned} \quad (4.145)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^k} &= -q\partial_k \Phi + q\dot{x}^\ell \partial_k A^\ell \\ &= qc\partial^k A^0 - q\dot{x}^\ell \partial^k A^\ell \\ &= qc \left(\partial^k A^0 - \partial^0 A^k \right) - q\dot{x}^\ell \left(\partial^k A^\ell - \partial^\ell A^k \right) + qc\partial^0 A^k - q\dot{x}^\ell \partial^\ell A^k \\ &= qcF^{k0} - q\dot{x}^\ell F^{k\ell} + q \underbrace{\left(\partial_t A^k + \dot{x}^\ell \partial_\ell A^k \right)}_{= q \frac{dA^k}{dt}} \\ &= q \frac{F^{k\nu} u_\nu}{\gamma} + q \frac{dA^k}{dt} \end{aligned} \quad (4.146)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{dp^k}{dt} + q \frac{dA^k}{dt} - q \frac{F^{k\nu} u_\nu}{\gamma} - q \frac{dA^k}{dt} \quad (4.147)$$

$$\Rightarrow \frac{dp^k}{dt} = \frac{qF^{k\nu} u_\nu}{\gamma} \quad (4.148)$$

Man definiert die relativistische Kraft

$$K^k = \frac{dp^k}{d\tau} \quad (4.149)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

und erhält weiterhin:

$$\frac{dp^k}{d\tau} = \frac{dp^k}{dt} \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\gamma} = qF^{k\nu}u_\nu \quad (4.150)$$

$$\Rightarrow \frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu, \text{ Lorentz-4er-Kraft } \boxed{K^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu} \quad (4.151)$$

Bedeutung der 0-Komponente:

$$K^0 = qF^{0\nu}u_\nu = -q\frac{E^k}{c}u_k = \frac{\gamma}{c}q\underline{E} \cdot \underline{\dot{x}} \quad (4.152)$$

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{\gamma}K^0 = \frac{1}{c}(q\underline{E} \cdot \underline{\dot{x}}) \quad (4.153)$$

= Leistung, die von Feldern an q geleistet wird, im Einklang mit cp^0 = kinetische Energie (+Ruheenergie) des Teilchens

Vergleich mit konventioneller Schreibweise:

$$\begin{aligned} \frac{dp^k}{dt} &= qF^{k\nu}\frac{u_\nu}{\gamma} = q\left(F^{k0}c + F^{k\ell}\dot{x}_\ell\right) \\ &= q\left(E^k - \epsilon^{k\ell m}\dot{x}_\ell B_m\right) \\ &= q\left(\underline{E} + \underline{\dot{x}} \times \underline{B}\right)^k \end{aligned} \quad (4.154)$$

Wir erhalten also wieder die gleiche Form wie im nicht-relativistischen Fall, jedoch ist zu beachten, dass

$$p^k = \gamma m \dot{x}^k \quad (4.155)$$

→ d.h. keine weiteren relativistischen Korrekturen (z.B. durch weitere γ -Faktoren)

Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H(\underline{x}, \underline{\pi}) &= \underline{\pi} \cdot \underline{\dot{x}} - L \\ &= \underline{\pi} \cdot \underline{\dot{x}} + \frac{(mc^2 + qu_k A^k)}{\gamma} \\ &= \frac{m^2 c^2 + (\underline{\pi} - q\underline{A})^2}{m\gamma} + q\Phi \\ &= \frac{(m^2 c^2 + \underline{p}^2)}{m\gamma} + q\Phi \\ &= p^0 c + q\Phi \\ &= c\sqrt{m^2 c^2 + \underline{p}^2} + q\Phi \\ &= c\sqrt{m^2 c^2 + (\underline{\pi} - q\underline{A})^2} + q\Phi \end{aligned} \quad (4.156)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik

Dies ist die Gesamtenergie des Teilchens, welche konstant ist, falls $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, also falls

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 = \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (4.157)$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

5.1 Wellengleichung und ebene Wellen

Wellengleichung für E und B :

Wir betrachten lineare, isotrope Medien, d.h. $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$. Entkopplung von E und B in den Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left(\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{-\dot{\vec{B}}} \right) &= \vec{\nabla} \left(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{\frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0}} \right) - \Delta \vec{E} \\ &= -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = -\mu_0 \mu_r \vec{\nabla} \times \dot{\vec{H}} = -\mu_r \mu_0 \dot{\vec{j}} - \mu_r \mu_0 \ddot{\vec{D}} \quad (5.1) \\ \Rightarrow \underbrace{\epsilon_r \mu_r \epsilon_0 \mu_0}_{=\frac{1}{c'^2} = \frac{n^2}{c^2}} \partial_t^2 \vec{E} - \Delta \vec{E} &= -\frac{\vec{\nabla} \rho}{\epsilon_r \epsilon_0} - \mu_r \mu_0 \dot{\vec{j}}, \end{aligned}$$

wobei $c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$, $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} =$ Brechungsindex.

$$\square := \frac{1}{c'^2} \partial_t^2 - \Delta \quad \text{d'Alembert-Operator für Medium} \quad (5.2)$$

Somit können wir schreiben

$$\square \vec{E} = -\frac{\vec{\nabla} \rho}{\epsilon_r \epsilon_0} - \mu_r \mu_0 \dot{\vec{j}}. \quad (5.3)$$

c' ist die Lichtgeschwindigkeit im Medium. Analog hierzu erhält man durch $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$, dass

$$\square \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{\nabla} \times \dot{\vec{j}} \quad (5.4)$$

Bei Einschränkung auf nicht-leitende Materialien $\rho = 0$, $\dot{\vec{j}} = 0$

$$\Rightarrow \square \vec{E} = 0, \quad \square \vec{B} = 0. \quad (5.5)$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

Betrachtung der 1-dim. Wellengleichung:

$$\frac{1}{c'^2} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, \quad u = u(x, t) \quad (5.6)$$

Variablentransformation: $\xi = x - c't$, $\eta = x + c't$

$$\rightarrow x = \frac{1}{2} (\xi + \eta), \quad t = \frac{1}{2c'} (\eta - \xi) \quad (5.7)$$

$$\rightarrow \partial_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi} \partial_x + \frac{\partial t}{\partial \xi} \partial_t = \frac{1}{2} \partial_x - \frac{1}{2c'} \partial_t, \quad \partial_\eta = \frac{1}{2} \partial_x + \frac{1}{2c'} \partial_t \quad (5.8)$$

Somit kann man schreiben:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{c'^2} \partial_t^2 - \partial_x^2 \right) u \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{c'} \partial_t + \partial_x \right)}_{=2\partial_\eta} \underbrace{\left(\frac{1}{c'} \partial_t - \partial_x \right)}_{=-2\partial_\xi} u \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\Rightarrow 0 = \partial_\eta \underbrace{\partial_\xi \bar{u}(\xi, \eta)}_{=:v(\xi, \eta)} \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow \partial_\eta v = 0$$

Also ist $v = \bar{f}(\xi)$ eine beliebige Funktion von ξ .

$$\begin{aligned} \partial_\xi \bar{u} &= \bar{f}(\xi) \\ \Rightarrow \bar{u}(\xi, \eta) &= \underbrace{\int d\xi \bar{f}(\xi)}_{:=f(\xi)} + g(\eta) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Somit erhalten wir, dass

$$u(x, t) = f(x - c't) + g(x + c't), \quad (5.12)$$

wobei f, g beliebige Funktionen sind, wobei die Funktion f einen „Wellenberg“ beschreibt, der sich mit der Geschwindigkeit c' nach rechts bewegt, und g einen Wellenberg, der sich mit c' nach links bewegt.

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

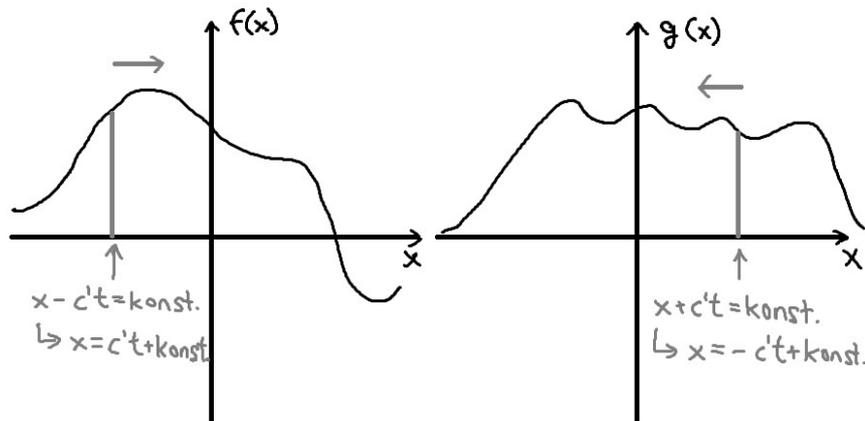


Abbildung 5.1: Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.

3-dimensionale Wellengleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{c'^2} \partial_t^2 u - \Delta u \\ &= \left(\frac{1}{c'^2} \partial_t^2 - \Delta \right) u(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (5.13)$$

→ Übertragung der Lösung des 1-dimensionalen Falles:

$$u(\vec{x}, t) = f(\vec{x} - \vec{c}'t) + g(\vec{x} + \vec{c}'t), \quad (5.14)$$

wobei f, g beliebige Funktionen sind und $\vec{c}' = c' \cdot \vec{e}$, \vec{e} = beliebiger Einheitsvektor.

Wellenfronten = Punkte gleicher Phase → charakterisiert durch

$$\vec{x} \mp \vec{c}'t = \text{const} \Leftrightarrow \underbrace{\vec{c}' \cdot \vec{x} = \pm c'^2 t + \text{const.}}_{\text{=Gleichung für Ebenen } \perp \vec{c}'}, \quad (5.15)$$

d.h. Gl. (5.14) beschreibt *ebene Wellen*.

$$\begin{aligned} f(\vec{x} - \vec{c}'t) &: \text{Wellenfronten mit Geschwindigkeit } \vec{c}' \\ g(\vec{x} + \vec{c}'t) &: \text{Wellenfronten mit Geschwindigkeit } -\vec{c}' \end{aligned} \quad (5.16)$$

Aber: Gl. (5.14) beschreibt *nicht* die allgemeinste Lösung der Wellengleichung!

Der Weg zur allgemeinen Lösung der Wellengleichung

1) Separationsansatz: $u(\vec{x}, t) = v(\vec{x}) \cdot w(t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{c'^2} \frac{\ddot{w}}{w} = \frac{\Delta v}{v} \stackrel{!}{=} \text{const} =: -k^2 \quad (5.17)$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

$$\Leftrightarrow \ddot{w} + (c'k)^2 w = 0, \quad \Delta v + k^2 v = 0. \quad (5.18)$$

Wir wenden uns zunächst der zeitlichen Komponente $w(t)$ zu:

→ Lösungen:

$$w = e^{\pm i\omega t}, \quad \omega := c'k > 0 \quad (5.19)$$

falls $k^2 \geq 0$. D.h. falls $c' = \text{const}$ (unabhängig von k) liegt eine harmonische Schwingung vor mit:

- Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Frequenz: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

Nun betrachten wir die räumliche Komponente:

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad (5.20)$$

Dies ist eine homogene Helmholtz-Gleichung.

→ Eigenwertgleichung für $v(\vec{x})$ vom mehrdimensionalen Sturm-Liouville-Typ.

→ Lösungen und Eigenwertspektrum hängen von Randbedingungen ab.

Meistens gilt aber: $k^2 \geq 0$

Wir erhalten somit insgesamt:

$$u_k^{(\pm)}(\vec{x}, t) = e^{\mp i\omega t} \cdot v^{(k)}(\vec{x}) \quad (5.21)$$

2) Spezialfall: harmonische ebene Wellen (keine Randbedingungen an $v(\vec{x})$)

Nochmals Separationsansatz:

$$v(\vec{x}) = v_1(x_1)v_2(x_2)v_3(x_3) \quad (5.22)$$

$$\Rightarrow \frac{v_n''}{v_n} = \text{const} =: -k_n^2 \quad (5.23)$$

wobei $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2$. D.h.

$$v_n'' + k_n^2 v_n = 0. \quad (5.24)$$

Lösungen:

$$v_n = e^{ik_n x_n}, \quad k_n \in \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{l} k_n = \text{reell durch geforderte} \\ \text{Beschränktheit für } |x_n| \rightarrow \infty \end{array} \right) \quad (5.25)$$

Lösung für v :

$$v^{(\vec{k})}(\vec{x}) = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} e^{ik_3 x_3} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \text{Wellenvektor} \quad (5.26)$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

Wir erhalten somit harmonische Wellen zu:

$$u_{\vec{k}}^{(\pm)}(\vec{x}, t) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} \mp i\omega t} \quad (5.27)$$

mit $\omega = c'|\vec{k}|$, $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$. Reelle Lösungen bekommt man durch Bilden von Realteil bzw. Imaginärteil der obigen Lösung.

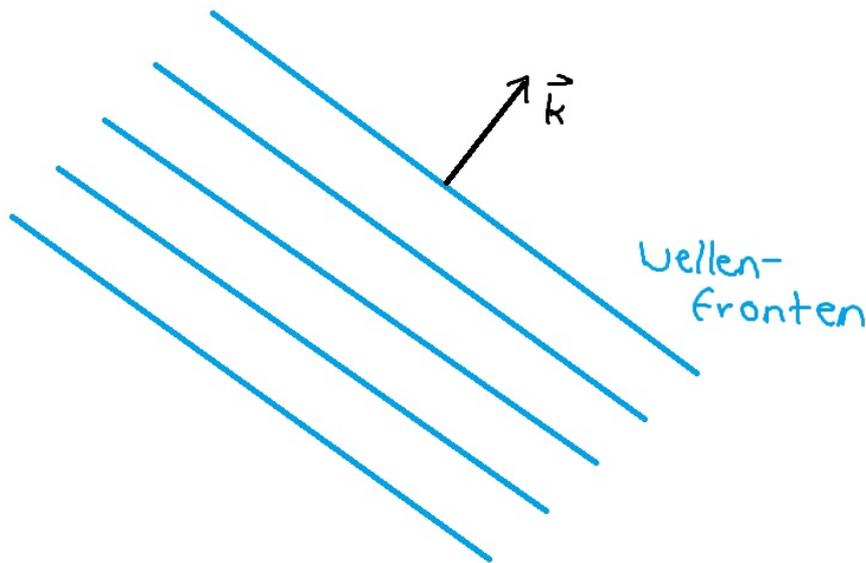


Abbildung 5.2: Die Wellenfronten genügen der Bedingung $\vec{k}\vec{x} = \pm\omega t + const.$

Wellenlänge = Abstand von Wellenfronten gleicher Phase:

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} \quad (5.28)$$

$$\Rightarrow \lambda\nu = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = c' \quad (5.29)$$

Allgemeine reelle Lösung

Die allgemeine reelle Lösung erhalten wir durch Superposition \rightarrow *Fourier-Integral*

$$u(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} + \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} b(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x} + i\omega t} \quad (5.30)$$

wobei $a(\vec{k})$ und $b(\vec{k})$ beliebige Funktionen sind, so dass das Integral wenigstens als Distribution existiert.

Wellenpaket und Dispersion

Wellenpaket:

Spektralfunktionen $a(\vec{k})$, $b(\vec{k})$ umfassen nur einen beschränkten Bereich, der sich um ein festes \vec{k}_0 konzentriert. Mittels Fourier-Transformation kann man sehen, dass sich die Wellenanregung im Bereich um $(\vec{x} \pm \vec{c}'t)$ konzentriert. Mittels

$$\begin{aligned}\Delta x^2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle, \\ \Delta k^2 &= \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle\end{aligned}\quad (5.31)$$

(Mittlere Schwankungsquadrate von $u(\vec{x})$ und $a(\vec{k})$ in einer Dimension) erhält man die Unschärferelation:

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2} \quad (5.32)$$

Beispiel: Gauß'sches Wellenpaket in x_3 -Richtung

$$g(\vec{k}) = (2\pi)^3 \delta(x_1) \delta(x_2) \frac{1}{\Delta k \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(k_3 - k_0)^2}{2\Delta k^2} \right] \quad (5.33)$$

Erwartungswert von \vec{k} :

$$\begin{aligned}\langle \vec{k} \rangle &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \vec{k} g(\vec{k}) = \vec{k}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_0 \end{pmatrix}, \\ \langle \vec{k}^2 \rangle &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \vec{k}^2 g(\vec{k}) = \vec{k}_0^2 + \Delta k^2,\end{aligned}\quad (5.34)$$

d.h.

$$\langle (\vec{k} - \langle \vec{k} \rangle)^2 \rangle = \Delta k^2 \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}u(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} g(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \frac{1}{\Delta k \sqrt{2}} \exp \left[-\frac{(k_3 - k_0)^2}{2\Delta k^2} + ik_3 x_3 - i \underset{=c'k_3}{\omega} t \right]\end{aligned}\quad (5.36)$$

Bemerkung: Man kann dies auch schreiben mit $a(\vec{k}) = g(\vec{k})\theta(\omega)$, $b(\vec{k}) = g(\vec{k})\theta(-\omega)$,

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

so dass die Welle nur in positive x_3 -Richtung läuft.

$$\begin{aligned}
 u(\vec{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \frac{1}{\Delta k \sqrt{2\pi}} \exp \left[- \left(\frac{k_3 - k_0}{\sqrt{2}\Delta k} - \sqrt{2}\Delta k i(x_3 - c't) \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2\Delta k^2(x_3 - c't)^2 + ik_0(x_3 - c't) \right] \\
 &= \exp \left[-2\Delta k^2(x_3 - c't)^2 \right] e^{ik_0(x_3 - c't)} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \frac{1}{\Delta k \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(k_3 - \kappa)^2}{2\Delta k^2} \right]}_{= 1, \text{ obwohl } \kappa \in \mathbb{C} \text{ (Beweis} \rightarrow \text{Funktionentheorie)}} \\
 &= \underbrace{\exp \left[-\frac{(x_3 - c't)^2}{2\Delta x^2} \right]}_{\text{Gaußverteilung um } (x_3 - c't) \text{ mit Schwankungsquadrat } \Delta x^2, \text{ wobei } \Delta x \cdot \Delta k = \frac{1}{2}} \cdot e^{ik_0(x_3 - c't)}
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Wellenpaket mit Dispersion

$\omega(k) \neq \text{const} \cdot k$, da $c' = c'(k)$, $n = n(k)$

→ Entwicklung für schmale Wellenpakete im \vec{k} -Raum:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_k \omega(k) \Big|_{k_0}}_{= \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} \cdot \vec{e}_{k_0}} + \dots, \tag{5.38}$$

wobei wir die *Gruppengeschwindigkeit* c_g definieren:

$$c_g := \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0}, \quad \vec{c}_g := c_g \vec{e}_{k_0} \tag{5.39}$$

sowie die *Phasengeschwindigkeit* c_p :

$$c_p := \frac{\omega(k_0)}{k_0}, \quad \vec{c}_p := c_p \vec{e}_{k_0} \tag{5.40}$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

Anwendung auf ein Wellenpaket: $a(\vec{k}) \neq 0$ für $|\vec{k} - \vec{k}_0| < \Delta k$:

$$\begin{aligned}
 u(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} a(\vec{k}) \underbrace{e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega(k)t)}}_{= \exp[i(\vec{k} - \vec{k}_0)\vec{x} + i\vec{k}_0\vec{x} - i\omega(k)t - i(\vec{k} - \vec{k}_0)\vec{c}_g t + \dots]} \\
 &= \underbrace{e^{i\vec{k}_0(\vec{x} - \vec{c}_p t)}}_{\text{Phasenfaktor}} \cdot \underbrace{\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} a(\vec{k}) e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0)(\vec{x} - \vec{c}_g t)} + \dots}_{= f(\vec{x} - \vec{c}_g t) \rightarrow \text{Wellenform}}
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

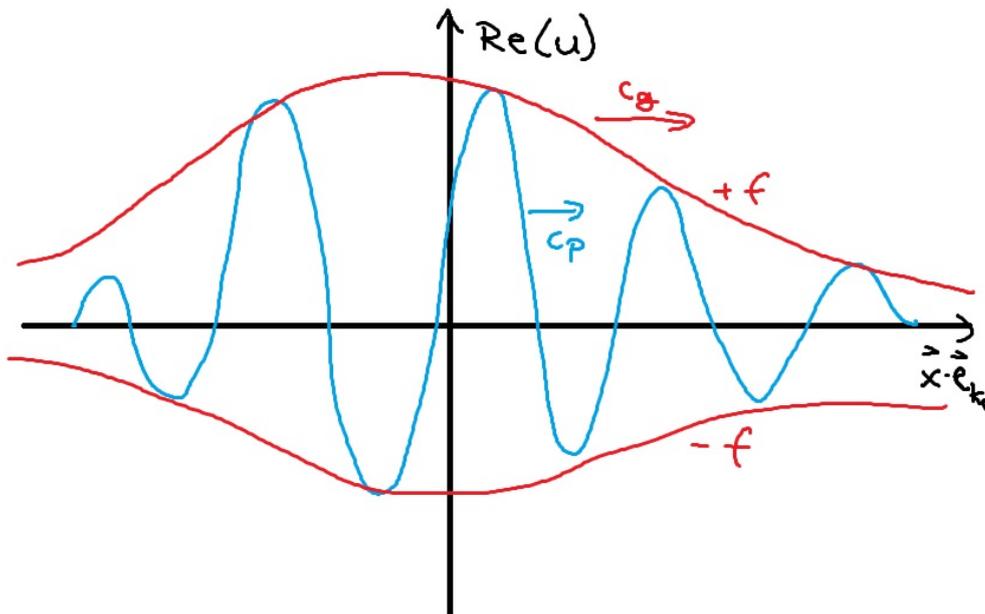


Abbildung 5.3: Zu beachten ist, dass $c_p > c$ möglich ist, jedoch $c_g > c$ nicht möglich ist (Relativitätstheorie). Mit c_p wird keine Information transportiert!

5.2 Ebene, monochromatische, elektromagnetische Wellen

Wir betrachten den Fall der Ausbreitung im freien Raum (keine Ladungen/Ströme). Dann genügen die Felder den Wellengleichungen:

$$\square \vec{E} = \vec{0}, \quad \square \vec{B} = \vec{0}, \quad \square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \tag{5.42}$$

Ebene Wellen in \vec{k} -Richtung:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{x}, t) \\ \vec{B}(\vec{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} e^{i\vec{k}(\vec{x} - c't)}, \tag{5.43}$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

wobei $\vec{k} = k\vec{e}_k$, $\omega = c'k$, $\vec{c} = c'\vec{e}_k$. Dabei werden \vec{E} und \vec{B} zu reellen Lösungen durch Bilden von Realteil/Imaginärteil. \vec{E}_0 und \vec{B}_0 sind im Allgemeinen komplex.

Zusammenhang zwischen $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}$ durch Maxwellgleichungen:

- $$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}, \vec{E}_0 \quad (5.44)$$

- $$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = i\vec{k} \cdot \vec{B} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}, \vec{B}_0 \quad (5.45)$$

- $$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E} \stackrel{!}{=} -\dot{\vec{B}} = i\omega\vec{B} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0 \Rightarrow \vec{E}, \vec{E}_0 \perp \vec{B}, \vec{B}_0 \quad (5.46)$$

$\Rightarrow (\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ bilden ein „Rechtssystem“.

- $\vec{\nabla} \times \vec{H} = -\dot{\vec{D}}$ liefert keine neue Bedingung (automatisch erfüllt).

Polarisation:

Die Polarisation ist bestimmt durch die Festlegung der komplexen Amplituden \vec{E}_0 und \vec{B}_0 . O.B.d.A. sei $\vec{k} = k\vec{e}_3$.

Parametrisierung von \vec{E}_0 :

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{10} \\ E_{20} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_{10}| \cdot e^{i\varphi} \\ |E_{20}| \cdot e^{i\varphi+i\delta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

Somit folgt, dass

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0 = \frac{1}{c'} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{10} \\ E_{20} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c'} \begin{pmatrix} -E_{20} \\ E_{10} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

wobei $-\pi < \varphi, \delta \leq \pi$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) := \Re \left\{ \vec{E}_0 e^{ikx_3 - i\omega t} \right\} = \begin{pmatrix} |E_{10}| \cos(kx_3 - \omega t + \varphi) \\ |E_{20}| \cos(kx_3 - \omega t + \varphi + \delta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) := \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} = \frac{1}{c'} \begin{pmatrix} -|E_{20}| \cos(kx_3 - \omega t + \varphi + \delta) \\ |E_{10}| \cos(kx_3 - \omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

Eigenschaften der Welle:

- Für jedes \vec{k} gibt es zwei Polarisationsfreiheitsgrade, z.B. $x_{1,2}$ -Richtungen für $\vec{k} = k\vec{e}_3$. Die Intensität der Richtungen ist durch $|E_{10}|$ und $|E_{20}|$ festgelegt.

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

- φ ist eine globale Phasenverschiebung (also physikalisch uninteressant).
- δ legt den *Polarisationstyp* fest:

– $\delta = 0 \vee \pi$:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} |E_{10}| \\ \pm |E_{20}| \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kx_3 - \omega t + \varphi) \quad (5.51)$$

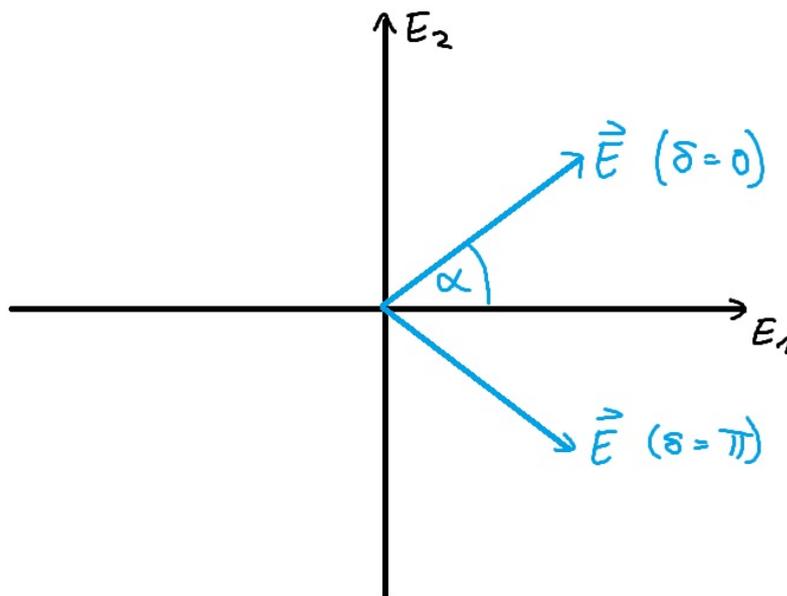


Abbildung 5.4: Der Winkel α ist gegeben durch $\tan \alpha = \pm \frac{|E_{20}|}{|E_{10}|}$, d.h. er ändert sich zeitlich nicht! Wir erhalten somit eine *lineare Polarisation* in der Ebene, die um α ggü. der x_1 -Richtung geneigt ist.

– $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} |E_{10}| \cos(kx_3 - \omega t + \varphi) \\ \mp |E_{20}| \sin(kx_3 - \omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

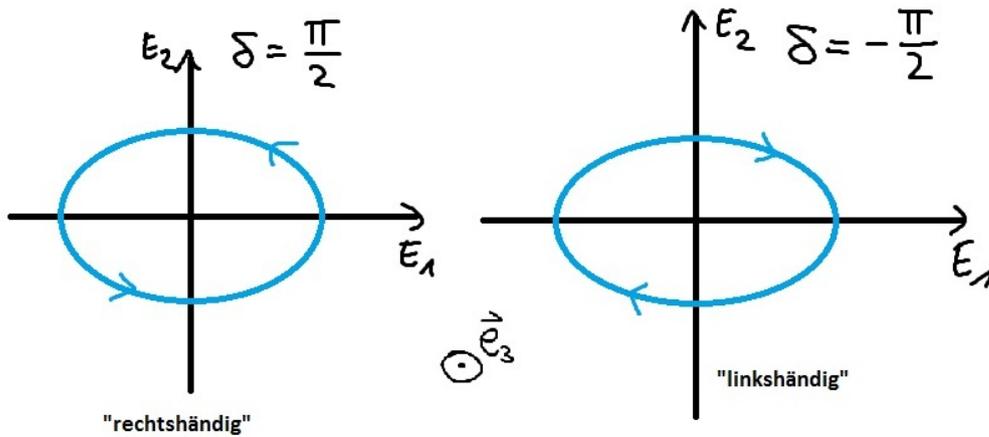


Abbildung 5.5: *Elliptische Polarisation*: mit x_1/x_2 -Achsen als Hauptachsen. Für $|E_{10}| = |E_{20}|$ spricht man von *zirkularer Polarisation*.

- andere δ : auch für andere δ erhält man elliptische Polarisation, jedoch mit gedrehten Hauptachsen.

Energie-/Impulsfluss:

$$\begin{aligned}
 \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \vec{B}/(\mu_r \mu_0) \\
 &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} \vec{E} \times \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} \right) \\
 &= \vec{E}^2 \cdot \frac{\vec{k}}{\omega} \cdot \frac{1}{\mu_r \mu_0} - \left(\vec{E} \cdot \frac{\vec{k}}{\omega} \right) \vec{E} \cdot \frac{1}{\mu_r \mu_0} \\
 &= \frac{\vec{k}}{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \omega} (\vec{D} \cdot \vec{E}) = \frac{c'^2 \vec{k}}{\omega} (\vec{D} \vec{E}) = \vec{c}' (\vec{D} \vec{E}) \\
 &= \dots \\
 &= \vec{c}' \cdot \underbrace{\frac{1}{2} (\vec{D} \vec{E} + \vec{B} \vec{H})}_{w_{\text{el}} + w_{\text{mg}}},
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

wobei

$$w_{\text{el}} = w_{\text{mg}} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{2} [|E_{10}|^2 \cos^2(kx_3 - \omega t + \varphi) + |E_{20}|^2 \cos^2(kx_3 - \omega t + \varphi + \delta)] \tag{5.54}$$

Zeitmittel:

$$\overline{w_{\text{el}}} = \overline{w_{\text{mg}}} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{4} (|E_{10}|^2 + |E_{20}|^2), \tag{5.55}$$

d.h. für den Poynting-Vektor:

$$\langle \vec{S} \rangle = \vec{c}' \cdot (\overline{w_{\text{el}}} + \overline{w_{\text{mg}}}) \tag{5.56}$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

Strahlungsdruckdruck:

Die Impulsdichte ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{\text{Feld}} &= \vec{D} \times \vec{B} \\ &= \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \vec{E} \times \vec{H} \\ &= \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{1}{c} \vec{e}_k (w_{\text{el}} + w_{\text{mg}})\end{aligned}\tag{5.57}$$

Bemerkung zur Quantenmechanik (im Vakuum):

Die von uns soeben betrachtete ebene Welle mit \vec{k} der E-Dynamik entspricht einem Photonenstrahl in \vec{e}_k :

$$E_\gamma = h\nu = \hbar\omega = \text{feste } \gamma\text{-Energie, } n_\gamma = \text{Dichte der Photonen}\tag{5.58}$$

Die Energiedichte ist dann also

$$w = E_\gamma \cdot n_\gamma = n_\gamma \hbar\omega.\tag{5.59}$$

Falls die klassische Relation von oben weiterhin gilt, ist

$$\vec{p}_{\text{Feld}} = \frac{w}{c} \vec{e}_k = \frac{\hbar\omega}{c} \vec{e}_k \cdot n_\gamma = \underbrace{\hbar\vec{k}}_{\text{deBroglie-Impuls eines Photons}} \cdot n_\gamma,\tag{5.60}$$

d.h. in der klassischen E-Dynamik hergeleitete Zusammenhang macht auch in der QM noch Sinn.

5.3 Wellengleichung – Cauchy-Problem und Huygens-Prinzip

Typische Anfangs- und Randwertaufgaben:

Suche Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\square u(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t)\tag{5.61}$$

mit gegebener Inhomogenität $f(\vec{x}, t)$ zu Anfangswerten $u(\vec{x}, t_0)$ und $\dot{u}(\vec{x}, t_0) = \partial_t u(\vec{x}, t_0)$

a) mit Dirichlet'schen RB bzw. mit von Neumann'schen RB, oder

b) $|u(\vec{x}, t)| \rightarrow 0$ für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, für feste t „hinreichend schnell“ (= *Cauchy-Problem*).

Eindeutigkeit der Lösung:

Beh.: Die Lösung des obigen Anfangswertproblems a) bzw. b) ist eindeutig.

Beweis:

Seien u_1 und u_2 derartige Lösungen, d.h. $u \equiv u_1 - u_2$ erfüllt $\square u(\vec{x}, t) \equiv 0$ mit $u(\vec{x}, t_0) \equiv 0 \equiv \dot{u}(\vec{x}, t) \forall x$.

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

→ Zu zeigen ist nun also, $u(\vec{x}, t) \equiv 0, \forall \vec{x}, t$

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V d^3 \vec{x} \dot{u} \square u, \quad \text{da } \square u \equiv 0 \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V d^3 \vec{x} \left[\frac{1}{c^2} \dot{u} \ddot{u} - \dot{u} \Delta u \right] \\
 &= \frac{1}{2c^2} \int_V d^3 \vec{x} \dot{u}^2 \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V d^3 \vec{x} \left[\vec{\nabla} \left(\dot{u} \vec{\nabla} u \right) - \left(\vec{\nabla} \dot{u} \right) \left(\vec{\nabla} u \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2c^2} \int_V d^3 \vec{x} \dot{u}^2 \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \underbrace{\oint_{A(V)} d\vec{A} \cdot \left(\dot{u} \vec{\nabla} u \right)}_{= 0 \text{ durch Randbedingungen}} + \frac{1}{2} \int_V d^3 \vec{x} \left(\vec{\nabla} u \right)^2 \Big|_{t_0}^{t_1} \\
 &= \frac{1}{2} \int_V d^3 \vec{x} \left[\frac{1}{c^2} \dot{u}(\vec{x}, t_1)^2 + \left(\vec{\nabla} u(\vec{x}, t_1) \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \int_V d^3 \vec{x} \underbrace{\left[\frac{1}{c^2} \dot{u}(\vec{x}, t_0)^2 + \left(\vec{\nabla} u(\vec{x}, t_0) \right)^2 \right]}_{= 0 \text{ wegen Anfangsbedingungen}} \\
 & \hspace{20em} = 0 \text{ wegen Anfangsbedingungen} \tag{5.62}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \dot{u}(\vec{x}, t_1) \equiv 0$ und $\vec{\nabla} u(\vec{x}, t_1) = 0$ für beliebige (\vec{x}, t_1)
 $\Rightarrow u(\vec{x}, t_1) \equiv 0 \forall \vec{x}, t_1$ **q.e.d.**

Cauchy-Problem der homogenen WG in 1 dim.

Problem: $\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_x^2 \right) u(x, t) = 0$ mit $u(x, 0) = \varphi_0(x), \dot{u}(x, 0) = \varphi_1(x)$.

Aus 5.1 ist bereits bekannt, dass $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$, wobei f, g beliebig.

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(x) &\stackrel{!}{=} u(x, 0) = f(x) + g(x) \\
 \Rightarrow \varphi_0'(x) &= f'(x) + g'(x) \tag{5.63}
 \end{aligned}$$

$$\varphi_1(x) \stackrel{!}{=} -cf'(x) + cg'(x) \tag{5.64}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi_0'(x) + \frac{1}{c} \varphi_1(x) \right] \tag{5.65}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} \varphi_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x d\bar{x} \varphi_1(\bar{x}) + k, \quad k = \text{const.}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f(x) &= \varphi_0(x) - g(x) \\
 &= \frac{1}{2} \varphi_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x d\bar{x} \varphi_1(\bar{x}) - k \tag{5.66}
 \end{aligned}$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

Somit ist die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x - ct) + g(x + ct) \\ &= \frac{1}{2} [\varphi_0(x - ct) + \varphi_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\bar{x} \varphi_1(\bar{x}) \end{aligned} \quad (5.67)$$

Man bezeichnet diese Lösung auch als *d'Alembert'sche Lösungsformel*, wobei:

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = u_t(x, 0) = \varphi_1(x). \quad (5.68)$$

Betrachte nun das sog. *Abhängigkeitsgebiet*, d.h. den Bereich in (x, t) , der durch eine Störung bei (x_0, t_0) beeinflusst wird. Wähle o.B.d.A. $(x_0, t_0) = (0, 0)$:

- $\varphi_0(0)$ beeinflusst $(x, t) = (\pm ct, t) = 2$ Punkte für festes t , diese entsprechen den Wellenfronten mit scharfer Begrenzung in t .
- $\varphi_1(0)$ beeinflusst (x, t) mit $x + ct > 0 \wedge x - ct < 0$, d.h. $|x| < c|t|$
 → Abhängigkeitsgebiet = Intervall in x für festes t .
 → Wellenfronten bei $x = \pm ct$ haben *keine* scharfe Begrenzung in t .
 ⇒ *Nachhallen* der Welle

Cauchy-Problem der homogenen Wellengleichung in 3 Dimensionen

Analogon zu d'Alembert-Formel der 1-dim. Wellengleichung:

$$u(\vec{x}, t) = \partial_t \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\vec{x}-\vec{x}'|=ct} dA' \varphi_0(\vec{x}') \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\vec{x}-\vec{x}'|=ct} dA' \varphi_1(\vec{x}') \quad (5.69)$$

(=Poisson-Formel) löst $\square u = 0$ mit $u(\vec{x}, 0) = \varphi_0(\vec{x})$ und $\dot{u}(\vec{x}, 0) = \varphi_1(\vec{x})$.

Beachte:

Das Abhängigkeitsgebiet zu $\varphi_0(\vec{0})$ und $\varphi_1(\vec{0}) =$ Kugelschale mit $|\vec{x}| = c|t|$
 → Wellenfronten zu „Elementarwellen“, kein Nachhallen! (*Huygens'sches Prinzip*)

Beweis der Poisson-Formel in 3 Schritten:

Schritt 1:

Betrachte die über die Kugelschale um \vec{x}_0 gemittelte Funktion:

$$\bar{u}(r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{K_r(\vec{x}_0)} dA' u(\vec{x}', t), \quad (5.70)$$

wobei $K_r(\vec{x}_0)$ dafür steht, dass hier über \vec{x}' integriert wird, für welche gilt $|\vec{x}' - \vec{x}_0| = r$.
 (Später wollen wir hieraus $u(\vec{x}_0, t)$ durch $r \rightarrow 0$ rückgewinnen.)

Behauptung: $\bar{u}(r, t)$ erfüllt die 3-dimensionale Wellengleichung:

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \right) \bar{u}(r, t) = 0, \quad (5.71)$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

falls $\square u = 0$

Beweis von Gl. (5.71): Auswertung von

$$A(r, t) := \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \int_{|\vec{x}' - \vec{x}_0| < r} d^3 \vec{x}' u(\vec{x}', t) \quad (5.72)$$

auf zwei Arten:

$$A(r, t) = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \int_0^r dr' r'^2 \int d\Omega' u(\vec{x}', t) \Big|_{|\vec{x}' - \vec{x}_0| = r'}, \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} A(r, t) &= \int_{|\vec{x}' - \vec{x}_0| < r} d^3 \vec{x}' \underbrace{\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u(\vec{x}', t)}_{= \Delta u = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} u), \text{ da } \square u = 0} \\ &\stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \oint_{K_r(\vec{x}_0)} d\vec{A}' \cdot \vec{\nabla} u(\vec{x}, t) \\ &= \int d\Omega' r^2 \partial_r u(\vec{x}, t) \Big|_{|\vec{x}' - \vec{x}_0| = r} \\ &= r^2 \partial_r \int d\Omega' u(\vec{x}', t) \Big|_{|\vec{x}' - \vec{x}_0| = r}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Bilde nun jeweils $\partial_r A(r, t)$:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 r^2 \underbrace{\int d\Omega' u(\vec{x}, t) \Big|_{|\vec{x}' - \vec{x}_0| = r}}_{= 4\pi \bar{u}(r, t)} = \partial_r r^2 \partial_r \underbrace{\int d\Omega' u(\vec{x}', t) \Big|_{|\vec{x}' - \vec{x}_0| = r}}_{= 4\pi \bar{u}(r, t)} \quad (5.75)$$

Also erf\u00fcllt $\bar{u}(r, t)$ die Wellengleichung (5.71).

Schritt 2:

Betrachte die Funktion $v(r, t) := r\bar{u}(r, t)$. v erf\u00fcllt die 1-dimensionale Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 v &= \frac{r}{c^2} \partial_t^2 \bar{u} \\ &\stackrel{(5.71)}{=} r \cdot \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \left(\frac{v}{r} \right) \\ &= \frac{1}{r} \partial_r \left[r^2 \left(\frac{\partial_r v}{r} - \frac{v}{r^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r v - v) \\ &= \frac{1}{r} (\partial_r v + r \partial_r^2 v - \partial_r v) = \partial_r^2 v \end{aligned} \quad (5.76)$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

⇒ Lösung: $v(r, t) = f(r - ct) + g(r + ct)$.

Aber: f, g sind nicht völlig beliebig, da $\bar{u} = \frac{v}{r}$ bei $r \rightarrow 0$ beschränkt bleiben muss.

→ $f(-ct) \stackrel{!}{=} -g(+ct)$

$$\Rightarrow \bar{u}(r, t) = \frac{v(r, t)}{r} = \frac{1}{r} [g(r + ct) - g(ct - r)] \quad (5.77)$$

Dies beschreibt eine allgemeine Kugelwelle mit $g =$ beliebig.

Schritt 3:

Anwendung auf $u(\vec{x}_0, t)$:

$$\begin{aligned} u(\vec{x}_0, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(r, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{[g(r + ct) - g(ct)] - [g(ct - r) - g(ct)]}{r} \\ &= g'(ct) - g'(ct) \cdot (-1) \\ &= 2g'(ct) \end{aligned} \quad (5.78)$$

Drücke $g'(ct)$ durch Anfangsbedingungen aus:

- $$\begin{aligned} \bar{u}(r, 0) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|\vec{x}' - \vec{x}_0| = r} dA' \varphi_0(\vec{x}') \\ &= \frac{1}{r} [g(r) - g(-r)] \end{aligned} \quad (5.79)$$

Setze $r = ct$:

$$\boxed{g(ct) - g(-ct) = ct\bar{u}(ct, 0) = \frac{1}{4\pi ct} \int_{|\vec{x}' - \vec{x}_0| = ct} dA' \varphi_0(\vec{x}')} \quad (5.80)$$

- $$\dot{\bar{u}}(r, 0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|\vec{x}' - \vec{x}_0| = r} dA' \varphi_1(\vec{x}') = \frac{c}{r} [g'(r) - g'(-r)] \quad (5.81)$$

Setze wieder $r = ct$:

$$\boxed{g'(ct) - g'(-ct) = t\dot{\bar{u}}(ct, 0) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\vec{x}' - \vec{x}_0| = ct} dA' \varphi_1(\vec{x}')} \quad (5.82)$$

$$\Rightarrow u(\vec{x}_0, t) = 2g'(ct) = (5.80)' + (5.82)$$

$$= \partial_t \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\vec{x}' - \vec{x}_0| = ct} dA' \varphi_0(\vec{x}') \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\vec{x}' - \vec{x}_0| = ct} dA' \varphi_1(\vec{x}') \quad (5.83)$$

□

Bemerkung:

Das Huygens'sche Prinzip gilt in $n > 1$ Raumdimensionen, falls n ungerade ist, jedoch nicht, falls n gerade ist!

5.4 Green'sche Funktion der Wellengleichung

Ziel:

Lösung der inhomogenen Wellengleichung:

$$\square u = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \Delta u = f(\vec{x}, t) \quad (5.84)$$

durch Integraldarstellung der Form

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int dt' \int d\vec{x}' G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') f(\vec{x}', t') + u_0(\vec{x}, t), \quad (5.85)$$

wobei $u_0(\vec{x}, t)$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung ist (kann an Anfangsbedingungen bzw. Randbedingungen angepasst werden). Der erste Term ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Wellengleichung.

→ Suche die Green'sche Funktion mit der Eigenschaft:

$$\square G = \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \right) G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = 4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') \quad (5.86)$$

Konstruktion von G :

1) Fourier-Trafo der Zeitabhängigkeit:

$$\tilde{u}(\vec{x}, \omega) := \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} u(\vec{x}, t) \quad (5.87)$$

$$\tilde{f}(\vec{x}, \omega) := \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(\vec{x}, t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} (\square u - f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \Delta u - f \right) \end{aligned} \quad (5.88)$$

Mittels zweifacher partieller Integration, wobei nach den Voraussetzungen für u die Randterme verschwinden, erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} u - \Delta u - f \right) \\ &= - \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \Delta \right) \tilde{u}(\vec{x}, \omega) - \tilde{f}(\vec{x}, \omega), \end{aligned} \quad (5.89)$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

d.h.

$$(\Delta + k^2) \tilde{u}(\vec{x}, \omega) = -\tilde{f}(\vec{x}, \omega), \quad (5.90)$$

wobei $k := \frac{|\omega|}{c}$. Man bezeichnet diese Gleichung als *inhomogene Helmholtz-Gleichung*.

2) Berechne Green'sche Funktion G_k für die Helmholtz-Gleichung.

$$(\Delta + k^2)G_k(\vec{x}, \vec{x}') \stackrel{!}{=} -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (5.91)$$

Lösungsansatz:

$$G_k = G_k(R) \quad (5.92)$$

mit $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$.

(Motivation: $G_k = G(\vec{x} - \vec{x}')$ wegen Translationsinvarianz, $G_k = G(|\vec{x} - \vec{x}'|)$ wegen Rotationsinvarianz).

- Für $R \neq 0$:

$$(\Delta + k^2)G_k(R) = \left(\frac{1}{R} \partial_r^2 R + k^2 \right) G_k(R) \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.93)$$

$$\Leftrightarrow \partial_R^2(RG_k) + k^2(RG_k) \stackrel{!}{=} 0, \quad k^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow G_k(R) = \frac{1}{R} \left(A e^{ikR} + B e^{-ikR} \right) \quad (5.94)$$

- Für beliebige R -Werte:

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)G_k(R) &= (\Delta + k^2) \left(\frac{A}{R} e^{ikR} + \frac{B}{R} e^{-ikR} \right) \\ &= A \left[\Delta \left(\frac{1}{R} \right) e^{ikR} + 2 \left(\vec{\nabla} \frac{1}{R} \right) \left(\vec{\nabla} e^{ikR} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R} \left(\Delta e^{ikR} \right) + \frac{k^2}{R} e^{ikR} \right] + B [\dots(k \rightarrow -k)] \end{aligned} \quad (5.95)$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

Mit $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$, $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$:

$$\begin{aligned}
 (\Delta + k^2)G_k(R) &= A \left[-4\pi\delta(\vec{R}) \underbrace{e^{ikR}}_{\rightarrow 1} - 2\frac{\vec{R}}{R^3} \cdot ike^{ikR} \cdot \frac{\vec{R}}{R} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{R^2}\partial_R^2 (Re^{ikR}) + \frac{k^2}{R}e^{ikR} \right] + B[\dots] \\
 &= A \left[-4\pi\delta(\vec{R}) - \cancel{\frac{2ik}{R^2}e^{ikR}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{R^2} (2ik\cancel{e^{ikR}} + R(ik)^2\cancel{e^{ikR}}) + \cancel{\frac{k^2}{R}e^{ikR}} \right] + B[\dots] \\
 &= (A + B)(-4\pi)\delta(\vec{x} - \vec{x}') \\
 &\Rightarrow A + B \stackrel{!}{=} 1
 \end{aligned}
 \tag{5.96}$$

3) Zeitabhängigkeit durch inverse Fourier-Transformation:

$$\begin{aligned}
 (-k^2 - \Delta)G_k(\vec{x}, \vec{x}') &= 4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad \Bigg| \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \dots \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\underbrace{-\frac{1}{c^2}\omega^2}_{\rightarrow \frac{1}{c^2}\partial_t^2} - \Delta \right) e^{-i\omega(t-t')} G_k(\vec{x}, \vec{x}') &= 4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')}}_{=\delta(t-t')} \\
 \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} G_k(\vec{x}, \vec{x}') &= 4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t') \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Identifikation mit } G(\vec{x}, t; \vec{x}', t')}
 \end{aligned}
 \tag{5.97}$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \frac{1}{R} \left(A e^{ikR} + B e^{-ikR} \right), \quad \omega = ck \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{R} \left(A e^{i\omega(t'-t+\frac{R}{c})} + B e^{i\omega(t'-t-\frac{R}{c})} \right) \\
 &= \frac{1}{R} \left[A \delta \left(t' - \left(t - \frac{R}{c} \right) \right) + B \delta \left(t' - \left(t + \frac{R}{c} \right) \right) \right], \quad A + B = 1
 \end{aligned} \tag{5.98}$$

4) Retardierte und avancierte Green'sche Funktion: $A = 1$ bzw. $B = 1$

$$G^{(\pm)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') := \frac{\delta \left(t' - \left(t \mp \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c} \right) \right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{5.99}$$

=Retardierte ($A = 1$) bzw. avancierte ($B = 1$) Green'sche Funktion.

⇒ Retardierte bzw. avancierte Lösungen der Wellengleichung:

$$\begin{aligned}
 u^{(\pm)}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3\vec{x}' G^{(\pm)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') f(\vec{x}', t') + u_0(\vec{x}, t) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \frac{f \left(\vec{x}', t \mp \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c} \right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + u_0(\vec{x}, t)
 \end{aligned} \tag{5.100}$$

- Retardierte Lösung $u^{(+)}$:

Quelle f zur Zeit t' beeinflusst Lösung $u^{(+)}$ zu späteren Zeiten $t = t' + \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c} > t'$.

≙ Situation der Aussendung (elektromagnetischer) Wellen durch einen Sender $f(\vec{x}', t')$. Sei $f(\vec{x}', t') = 0$ für $t' < t_0 \rightarrow u^{(+)}(\vec{x}, t) = u_0(\vec{x}, t)$ für $t < t_0$.

- Avancierte Lösung $u^{(-)}$:

Lösung $u^{(-)}$ zur Zeit t steht mit Quelle f zu späteren Zeiten $t' = t + \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c} > t$ in Beziehung.

≙ unrealistische Situation, dass die Quelle einlaufende Wellen weginterferiert. Sei $f(\vec{x}', t') = 0$ für $t' > t_0 \rightarrow u^{(-)}(\vec{x}, t) = u_0(\vec{x}, t)$ für $t > t_0$.

Kovariante Form der Green'schen Funktion:

Wellengleichung:

$$\square u(\vec{x}, t) = \partial^\mu \partial_\mu u(x) = f(x), \quad x^\mu = (ct, \vec{x}) \tag{5.101}$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

$$\begin{aligned}
 \delta((x-x')^2) &= \delta\left(\underbrace{(x_0-x'_0)^2 - (\underline{x}-\underline{x}')^2}_{=f(x'_0)}\right) = \delta(f(x'_0)) \\
 &= \sum_i \frac{\delta(x'_0 - x'_{0,i})}{|f'(x'_0)|} \quad \text{Summe über Nullstellen } x'_{0,i} \quad (5.102) \\
 &= \underbrace{\frac{\delta(x_0 - x'_0 - |\underline{x} - \underline{x}'|)}{2|\underline{x} - \underline{x}'|}}_{\rightarrow G^{(+)}, x_0 > x'_0} + \underbrace{\frac{\delta(x_0 - x'_0 + |\underline{x} - \underline{x}'|)}{2|\underline{x} - \underline{x}'|}}_{\rightarrow G^{(-)}, x_0 < x'_0}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G^{(\pm)}(x, x') := \frac{1}{2\pi} \theta(\pm(x_0 - x'_0)) \delta((x - x')^2) = \frac{1}{4\pi c} G(\underline{x}, t; \underline{x}', t') \quad (5.103)$$

$$u^{(\pm)}(x) = \int d^4 x' G^{(\pm)}(x, x') f(x) + u_0(x), \quad \square G^{(\pm)}(x, x') = \delta(x - x'), \quad (5.104)$$

wobei $\square u_0 = 0$ und

$$\int d^4 x' = \int dx'_0 \int d^3 \underline{x}' = c \int dt' \int d^3 \underline{x}' \quad (5.105)$$

das Volumenintegral über den gesamten Minkowski-Raum ist.

5.5 Abstrahlung elektromagnetischer Wellen

Betrachte eine zeitlich veränderliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}, t)$, $\vec{j}(\vec{x}, t)$ im begrenzten Volumen V .

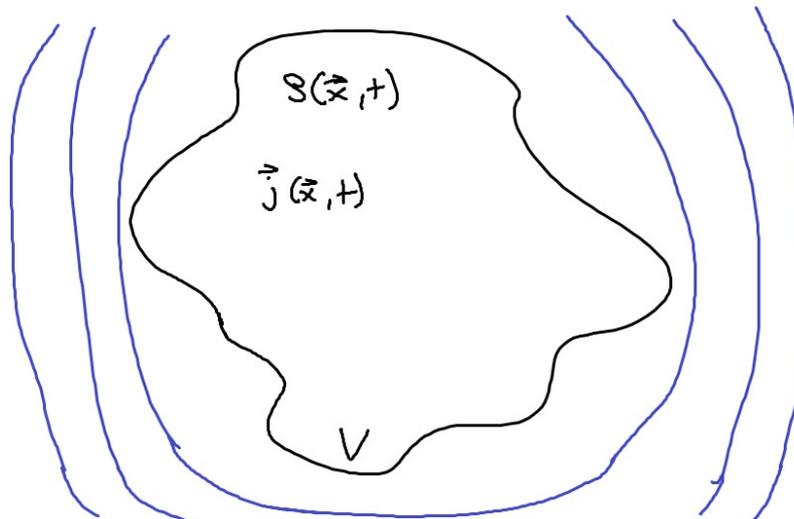


Abbildung 5.6: Information über das System (z.B. $\Phi = const$) dringt mit endlicher Geschwindigkeit c nach außen.

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

In Lorenz-Eichung gilt (vgl. 3.3):

$$\square A = \mu_0 \vec{j}, \quad \square \Phi = \rho / \epsilon_0 \quad (5.106)$$

⇒ Explizite Lösungen durch retardierte Green'sche Funktionen:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 \vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (5.107)$$

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3 \vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (5.108)$$

→ Verifikation der Lorenz-Bedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\phi} = 0$ durch explizites Nachrechnen!
Kovariante Form:

$$(\Phi/c, \underline{A}) = A^\mu(x) = \mu_0 \int d^4 x' \underbrace{G^{(+)}(x, x')}_{\frac{1}{2\pi} \theta(x_0 - x'_0) \delta((x - x')^2)} \underbrace{j^\mu(x')}_{(c\rho, \vec{j})} \quad (5.109)$$

Felder einer (beschleunigt) bewegten Punktladung:

Betrachte eine Punktladung q auf der Trajektorie $\vec{r}(t)$:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}, t) &= q \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \\ \vec{j}(\vec{x}, t) &= q \vec{v}(t) \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)), \quad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t), \quad \vec{\beta}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{c} \end{aligned} \quad (5.110)$$

→ Retardierte Potentiale beschreiben die Abstrahlung:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \vec{x}' \int dt' G^{(+)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') \rho(\vec{x}', t') \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta(t' - t + \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{r}(t')|)}{|\vec{x} - \vec{r}(t')|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta(f(t'))}{R(t')}, \quad f(t') = t' - t + \frac{1}{c} R(t'), \quad R(t') = |\vec{x} - \vec{r}(t')| \end{aligned} \quad (5.111)$$

$\vec{A}(\vec{x}, t)$ analog.

Behauptung: $f(t') = 0$ hat genau eine Lösung.

Beweis:

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

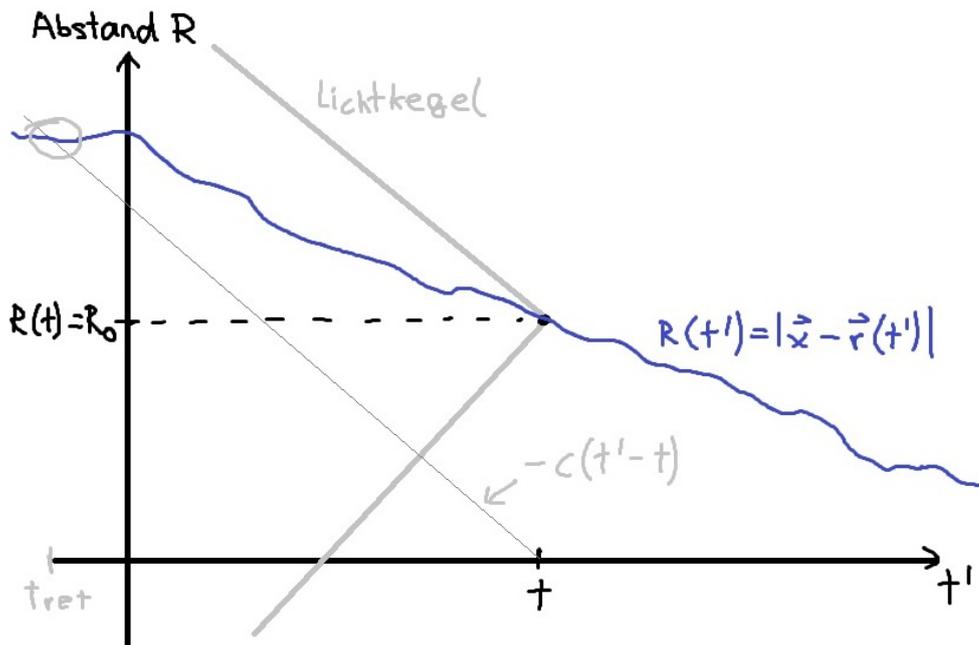


Abbildung 5.7:

$$-c(t_{\text{ret}} - t) = R(t_{\text{ret}}) =: R_{\text{ret}}, \text{ d.h. } f(t_{\text{ret}}) = 0.$$

Beachte:

$$||\vec{x} - \vec{r}(t')| - R_0| < v_{\text{max}}|t' - t|, \quad (5.112)$$

da $|\dot{\vec{r}}(t')| < v_{\text{max}} < c$ (Beschränkung der Geschwindigkeit durch $v_{\text{max}} < c$)

$$\Rightarrow R(t') \leq R_0 + v_{\text{max}}|t' - t| = R_0 - v_{\text{max}}(t' - t), \quad t' < t \quad (5.113)$$

$$\Rightarrow f(t') \leq t' - t + \frac{1}{c}(R_0 - v_{\text{max}}(t' - t)) = \frac{R_0}{c} + \underbrace{\left(1 - \frac{v_{\text{max}}}{c}\right)}_{>0}(t' - t) \quad (5.114)$$

= streng monoton steigend für $t' < t$

Außerdem:

$$f(t) = |\vec{x} - \vec{r}(t)| > 0 \quad (5.115)$$

$\Rightarrow f(t')$ hat genau eine Nullstelle. \square

Retardierte Zeit t_{ret} :

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{r}(t_{\text{ret}})| = t - \frac{1}{c}R_{\text{ret}} \quad (5.116)$$

Dies ist der Zeitpunkt, zu dem ein Lichtsignal bei $\vec{r}(t_{\text{ret}}) = \vec{r}_{\text{ret}}$ startet, so dass es zur Zeit t am Ort \vec{x} ankommt.

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

Auswertung von $\delta(f(t')) = \frac{\delta(t' - t_{\text{ret}})}{|f'(t_{\text{ret}})|}$:

$$\begin{aligned} f'(t') &= \frac{d}{dt'} \left(t' - t + \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{r}(t')| \right) = 1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \sqrt{(\vec{x} - \vec{r}(t'))^2} \\ &= 1 + \frac{1}{c} \cdot \frac{2(\vec{x} - \vec{r}(t')) \cdot (-\dot{\vec{r}}(t'))}{2\sqrt{(\vec{x} - \vec{r}(t'))^2}} \\ &= 1 - \vec{e}(t') \cdot \vec{\beta}(t'), \end{aligned}$$

$$f'(t_{\text{ret}}) = 1 - \vec{e}_{\text{ret}} \cdot \vec{\beta}_{\text{ret}} =: \kappa_{\text{ret}}, \quad f'(t_{\text{ret}}) > 0. \quad (5.117)$$

Resultat: *Lienard-Wiechert-Potentiale*:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R(t_{\text{ret}})} \cdot \frac{1}{f'(t_{\text{ret}})} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_{\text{ret}} \kappa_{\text{ret}}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}_{\text{ret}}| - \underbrace{(\vec{x} - \vec{r}_{\text{ret}}) \cdot \vec{\beta}_{\text{ret}}}_{\text{Effekt der Retardierung}}}, \end{aligned} \quad (5.118)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q\mu_0 \vec{v}_{\text{ret}}}{4\pi R_{\text{ret}} \kappa_{\text{ret}}} = \frac{q\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{v}_{\text{ret}}}{|\vec{x} - \vec{r}_{\text{ret}}| - (\vec{x} - \vec{r}_{\text{ret}}) \cdot \vec{\beta}_{\text{ret}}} \quad (5.119)$$

Betrachtung der Trajektorie:

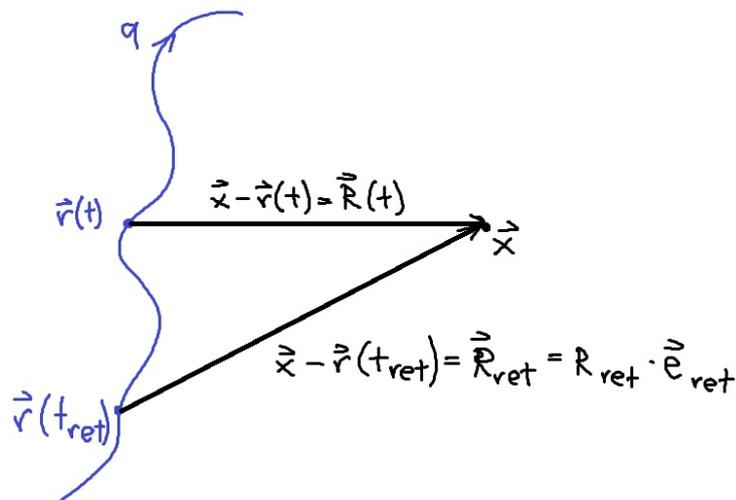


Abbildung 5.8: Das Potential bei \vec{x} zur Zeit t wird bestimmt durch q bei $\vec{r}(t_{\text{ret}})$ zur Zeit $t_{\text{ret}} < t$.

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

Durch längere Rechnung erhält man die elektrischen und magnetischen Felder zu:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\kappa_{\text{ret}}^3} \cdot \left\{ \underbrace{\frac{1}{R_{\text{ret}}^2} \cdot (\vec{e}_{\text{ret}} - \vec{\beta}_{\text{ret}}) \cdot (1 - \beta_{\text{ret}}^2)}_{\text{Geschwindigkeitsfeld}} + \underbrace{\frac{1}{cR_{\text{ret}}} \cdot e_{\text{ret}} \times \left[(\vec{e}_{\text{ret}} - \vec{\beta}_{\text{ret}}) \times \dot{\vec{\beta}}_{\text{ret}} \right]}_{\text{Beschleunigungsfeld}} \right\} \quad (5.120)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \vec{e}_{\text{ret}} \times \vec{E}(\vec{x}, t)$$

Geschwindigkeitsfelder:

- enthalten alle statischen Anteile,
- sind auch $\neq 0$ bei gleichförmiger Bewegung ($\vec{\beta}_{\text{ret}} = \text{const}$),
- fallen mit $\frac{1}{R_{\text{ret}}^2} \sim \frac{1}{r^2}$ für große $r = |\vec{x}|$ ab.

Beschleunigungsfelder:

- sind $\neq 0$ nur bei Beschleunigung $\dot{\vec{\beta}}_{\text{ret}} \neq 0$,
- fallen mit $\frac{1}{R_{\text{ret}}} \sim \frac{1}{r}$ für große r ab.

Energieabstrahlung durch Punktladung:

Berechne den Fluss von $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ durch eine Kugelschale K_R um q mit Radius $R \rightarrow \infty$!

\Rightarrow Nur Beschleunigungsfelder von \vec{E} und \vec{B} sind relevant für $R \rightarrow \infty$, alle anderen Beiträge zu \vec{S} fallen schneller als $\frac{1}{R^2}$ ab für $R \rightarrow \infty$.

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_{\text{ret}} \kappa_{\text{ret}}^3} \right)^2 \cdot \frac{1}{c^3 \mu_0} (\vec{e}_{\text{ret}} \times \vec{a}) \times [\vec{e}_{\text{ret}} \times (\vec{e}_{\text{ret}} \times \vec{a})] + \mathcal{O}(R_{\text{ret}}^{-3}), \quad (5.121)$$

wobei

$$\vec{a} := (\vec{e}_{\text{ret}} - \vec{\beta}_{\text{ret}}) \times \dot{\vec{\beta}}_{\text{ret}} \quad (5.122)$$

Weiter gerechnet erhält man

$$\vec{S} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c R_{\text{ret}}^2 \kappa_{\text{ret}}^6} \cdot |\vec{e}_{\text{ret}} \times \vec{a}|^2 \cdot \vec{e}_{\text{ret}} + \mathcal{O}(R_{\text{ret}}^{-3}), \quad (5.123)$$

d.h. Abstrahlung findet in \vec{e}_{ret} -Richtung statt.

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

Wir wählen nun eine Kugelschale $K_{R_{\text{ret}}}(\vec{r}_{\text{ret}})$ um Punkt \vec{r}_{ret} :

$$\begin{aligned}\hat{P}(t) &= \oint_{K_{R_{\text{ret}}}} \vec{S} d\vec{A} \\ &= \int d\Omega R_{\text{ret}}^2 |\vec{S}| = \text{Energiefluss pro Zeit durch Kugelschale } K_{R_{\text{ret}}}(\vec{r}_{\text{ret}}) \text{ zur Zeit } t\end{aligned}\quad (5.124)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow W_{ab} &= \int_{t_a}^{t_b} dt \hat{P}(t) = \text{abgestrahlte Energie zwischen den Zeiten } t_{\text{ret},a} \text{ und } t_{\text{ret},b} \\ &= \int_{t_{\text{ret},a}}^{t_{\text{ret},b}} dt_{\text{ret}} \cdot \underbrace{\frac{dt}{dt_{\text{ret}}}}_{=: P(t_{\text{ret}})} \cdot \hat{P}(t)\end{aligned}\quad (5.125)$$

$P(t_{\text{ret}})$ ist nun der Energiefluss pro Abstrahlungszeit t_{ret} .

$$\frac{dt}{dt_{\text{ret}}} = \frac{d}{dt_{\text{ret}}} \left(t_{\text{ret}} + \frac{1}{c} R(t_{\text{ret}}) \right) = f'(t_{\text{ret}}) = \kappa_{\text{ret}} \quad (5.126)$$

Zusammengefasst erhalten wir die Strahlungsleitung in ein Raumwinkelement $d\Omega$:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\Omega} &= |\vec{S}| R_{\text{ret}}^2 \kappa_{\text{ret}} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c \kappa_{\text{ret}}^5} |\vec{e}_{\text{ret}} \times \vec{a}|^2 \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \cdot \frac{\left| \vec{e}_{\text{ret}} \times \left[(\vec{e}_{\text{ret}} - \vec{\beta}_{\text{ret}}) \times \dot{\vec{\beta}}_{\text{ret}} \right] \right|^2}{\left(1 - \vec{e}_{\text{ret}} \cdot \vec{\beta}_{\text{ret}} \right)^5}\end{aligned}\quad (5.127)$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

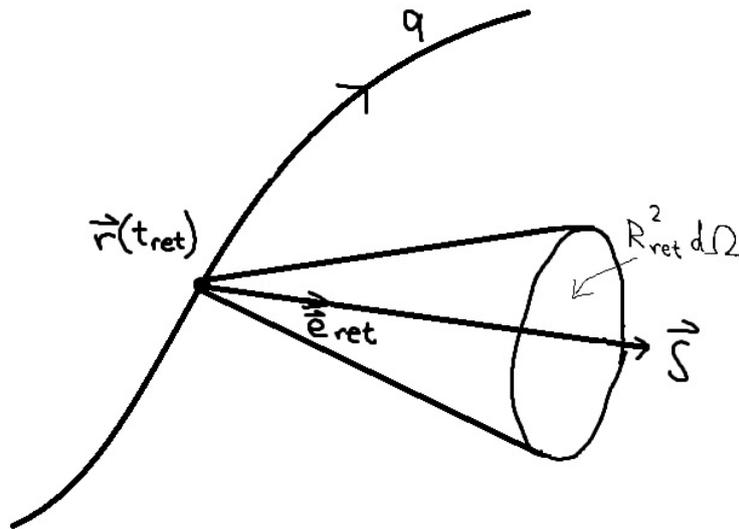


Abbildung 5.9:

Beispiele:

1) Nicht-relativistische Bewegung: $|\vec{\beta}_{\text{ret}}| \ll 1$:

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \cdot \dot{\beta}_{\text{ret}}^2 \sin^2 \theta, \quad \theta = \angle(\vec{e}_{\text{ret}}, \dot{\vec{\beta}}_{\text{ret}}) \quad (5.128)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \dot{\beta}_{\text{ret}}^2 \int d\Omega \sin^2 \theta \\ &= \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 \end{aligned} \quad (5.129)$$

Dies ist die *Larmor-Formel* für Strahlungsleistung!

Beachte: Es findet keine Abstrahlung in Beschleunigungsrichtung statt, maximale Abstrahlung bei $\theta_{\text{max}} = \pi/2$ (also senkrecht zur Beschleunigungsrichtung).

2) Bremsstrahlung: $\vec{v} \parallel \dot{\vec{v}}$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta_{\text{ret}} \cos \theta)^5} \cdot \dot{\beta}_{\text{ret}}^2 \quad (5.130)$$

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

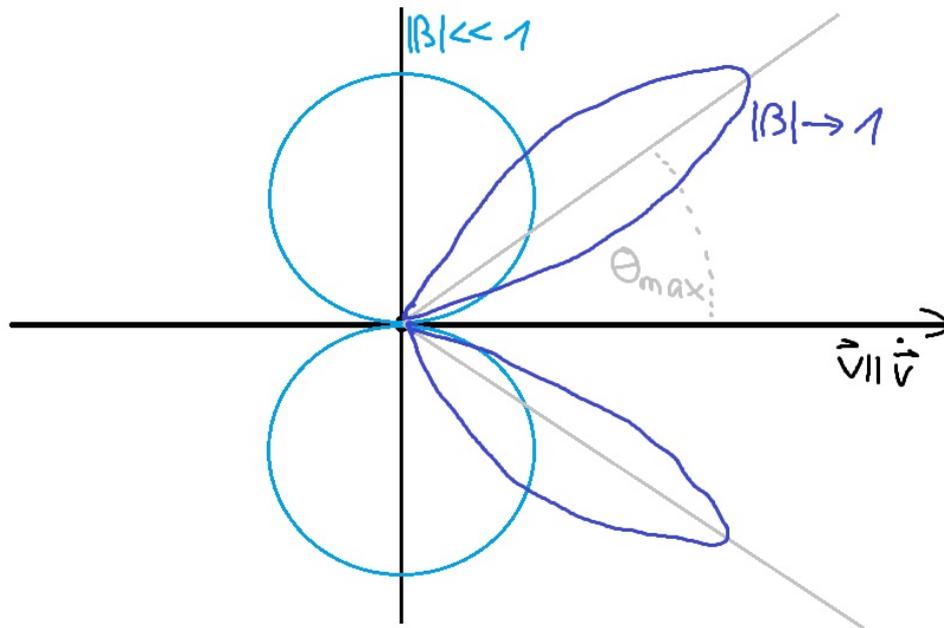


Abbildung 5.10: Strahlungscharakteristik für $|\beta| \ll 1$ und $|\beta| \rightarrow 1$

$$\cos \theta_{\max} = \frac{1}{3\beta_{\text{ret}}} \left(\sqrt{1 + 15\beta_{\text{ret}}^2} - 1 \right) \quad (5.131)$$

Für $|\beta| \rightarrow 1$ erhalten wir also

$$\theta_{\max} \underset{\beta_{\text{ret}} \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2\gamma_{\text{ret}}} \rightarrow 0, \quad (5.132)$$

wobei

$$\gamma_{\text{ret}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\text{ret}}^2}}. \quad (5.133)$$

D.h. Die Bremsstrahlung relativistischer Teilchen ist stark vorwärts gerichtet!

3) Abstrahlung eines Dipols:

Betrachte oszillierende Ladung q :

$$\vec{r}(t) = \ell \sin(\omega t) \vec{e}_3 \quad (5.134)$$

→ Dipolmoment

$$\vec{p}(t) = q\vec{r}(t) = \hat{p} \sin(\omega t) \vec{e}_3, \quad \hat{p} = q\ell \quad (5.135)$$

(= äquivalent zu oszillierenden Ladungen $\pm q$ mit $\vec{r}_{\pm}(t) = \pm \frac{\ell}{2} \sin(\omega t) \vec{e}_3$)

5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung

Feld in der *Strahlungszone* (Fernfeld): $\ell \ll \lambda \ll r$

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) &= \ell\omega \cos(\omega t)\vec{e}_3, \\ \ell\omega = \ell kc &= \frac{\ell}{\lambda} \cdot 2\pi c \ll c,\end{aligned}\tag{5.136}$$

d.h. $|\vec{v}| \ll c$, es liegt also eine nicht-relativistische Bewegung der Ladung vor.

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}}(t) &= -\ell\omega^2 \sin(\omega t)\vec{e}_3 \Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \dot{v}_{\text{ret}}^2 \sin^2 \theta \\ &= \frac{(q\ell\omega^2)^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \cdot \sin^2(\omega t_{\text{ret}}) \cdot \sin^2 \theta \\ &= \frac{\hat{p}^2\omega^4}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \cdot \sin^2(\omega t_{\text{ret}}) \cdot \sin^2 \theta\end{aligned}\tag{5.137}$$

Zeitmittelung:

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{1}{T} \int_0^T dt_{\text{ret}} \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\hat{p}\omega^4}{32\pi^2\epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta\tag{5.138}$$

→ Gemittelte Strahlungsleistung:

$$\bar{P} = \int d\Omega \frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{\hat{p}^2\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}\tag{5.139}$$