

Theoretische Physik III - Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie

Vorlesungsmitschrift

Dozent: Prof. Stefan Dittmaier

Verfasser: Ralf Gugel

WS 11/12

Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

1. Elektrostatik	5
1.1 Ladung	5
1.2 Coulomb-Gesetz, elektrisches Feld, elektrisches Potential	8
1.3 Feldgleichungen der Elektrostatik	19
1.4 Poisson- und Laplace-Gleichungen	25
1.5 Green'sche Funktionen der Elektrostatik	27
1.6 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen	36
1.7 Randwertproblem mit Zylindersymmetrie (= Drehsymmetrie um feste Achse)	41
1.8 Randwertproblem in Kugelkoordinaten	48
1.8.1 Die zugeordneten Legendre-Funktionen als Lösung von Gl. (1.175)	49
1.9 Multipolentwicklung	53
1.10 Makroskopische Elektrostatik	59
1.11 Feldenergiedichte in Medien	65
2. Magnetostatik	66
2.1 Elektrischer Strom	66
2.2 Gesetze von Ampère und Biot-Savart	69
2.3 Feldgleichungen	71
2.4 Vektorpotential	74
2.5 Magnetisches Dipolmoment	77
2.6 Makroskopische Magnetostatik	82
3. Elektrodynamik - Grundlagen	89
3.1 Faraday'sches Induktionsgesetz	89
3.2 Maxwell'scher Verschiebungsstrom, Maxwell-Gleichungen	93
3.3 Elektromagnetische Potentiale	94
3.4 Teilchen im elektromagnetischen Feld	97
3.5 Energiesatz der E-Dynamik	99
3.6 Impulssatz der <i>E</i> -Dynamik	101

Inhaltsverzeichnis

4. Spezielle Relativitätstheorie - kovariante Formulierung der E-Dynamik	104
4.1 Grundpostulate	104
4.2 Lorentz-Transformation	105
4.3 Relativistische Dynamik	114
4.4 Kovariante Formulierung der Maxwell - Gleichungen	118
4.4.1 Maxwell-Gleichungen für Φ , \underline{A}	120
4.4.2 Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung	126
4.5 Lorentz-Kraft als 4er-Kraft	128
5. Elektromagnetische Wellen und Abstrahlung	132
5.1 Wellengleichung und ebene Wellen	132
5.2 Ebene, monochromatische, elektromagnetische Wellen	139
5.3 Wellengleichung – Cauchy-Problem und Huygens-Prinzip	143
5.4 Green'sche Funktion der Wellengleichung	148
5.5 Abstrahlung elektromagnetischer Wellen	152

Organisatorisches

Dozent Prof. Stefan Dittmaier

Übungen Donnerstags und freitags, Eintragen in Listen!

Scheinerwerb Für die Zulassung zur Klausur, deren Bestehen Voraussetzung zum Scheinerwerb ist, werden 50% der möglichen Punkte benötigt. Die Lösungen zu den Aufgaben müssen nicht abgegeben werden, sondern zu Beginn der Übungen wird angekreuzt, wer welche Aufgabe lösen kann, entsprechend erfolgt die Punktevergabe.

Tutorium Zusätzliches Tutorium (Musterlösungen) am Freitag

Themen Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie

1. Elektrostatik

1.1 Ladung

Grundgröße der klassischen Mechanik: Länge, Zeit, Masse charakterisieren Zustand von Körpern

Grundgröße der Elektrodynamik: Ladung, weniger anschaulich, da nicht direkt durch Sinnesorgane wahrnehmbar.

Die Ladung q ist eine weitere Kenngröße von Körpern neben der Masse m .

Experimenteller Befund:

- Es gibt zwei Arten elektrischer Ladung: *positiv* und *negativ*.
- Ladungen kann fließen, d.h. Körper können ihre Ladung ändern.
- Ladungen verhalten sich additiv:

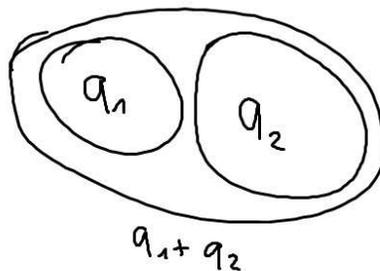


Abbildung 1.1: Körper aus zwei Teilkörpern mit Ladungen q_1 und q_2 , entsprechend ist die Gesamtladung des Körpers $q = q_1 + q_2$ (analog: $m = m_1 + m_2$).

1. Elektrostatik

- Ladungserhaltung: In einem abgeschlossenen System ist die Gesamtladung erhalten, d.h. die Summe aller Ladungen ist konstant
- Ladung ist *quantisiert*, d.h. alle makroskopisch auftretenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der *Elementarladung* e : $q = \pm N \cdot e$, $N \in \mathbb{N}_0$, $e = 1,602 \dots \cdot 10^{-19} \text{C}$.

Ladungsverteilung

System aus N Teilchen (Einzelladungen q_n):

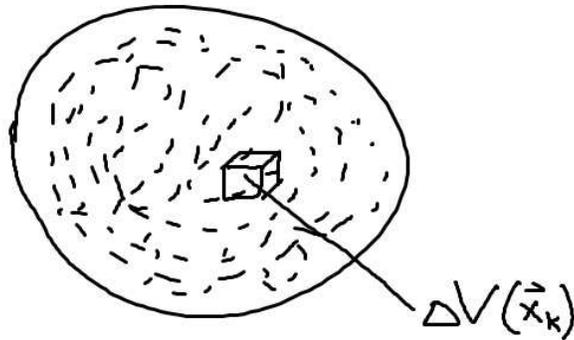


Abbildung 1.2: $\Delta V(\vec{x}_k)$ stellt ein kleines Volumen am Ort \vec{x}_k dar mit $\Delta q(\vec{x}_k) = \sum_{n \in \Delta V(\vec{x}_k)} q_n$

⇒ Ladungsdichte:

$$\rho(\vec{x}_k) = \left. \frac{\Delta q(\vec{x}_k)}{\Delta V(\vec{x}_k)} \right|_{\Delta V \rightarrow 0} \quad (1.1)$$

(Idealisierter Grenzübergang, d.h. ΔV geht nicht bis zu mikroskopischen Größen)

$$\begin{aligned} \Rightarrow q &= \sum_n q_n = \sum_k \Delta q(\vec{x}_k) = \sum_k \frac{\Delta q(\vec{x}_k)}{\Delta V(\vec{x}_k)} \cdot \Delta V(\vec{x}_k) \\ &\xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} \int_V d^3 \vec{x} \rho(\vec{x}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Frage:

Ladungsverteilung für eine Punktverteilung sinnvoll?

1. Elektrostatik

Mathematischer Exkurs: Dirac'sche Deltafunktion $\delta(x)$

Sei $f(x)$ eine in einer Umgebung von $x = a$ stetige Funktion, dann definiere:

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx f(x) \delta(x - a) := \begin{cases} f(a), & \alpha < a < \beta, \\ 0, & a < \alpha \vee \beta < a. \end{cases} \quad (1.3)$$

d.h.

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq a, \\ \infty & \text{für } x = a. \end{cases} \quad (1.4)$$

$\Rightarrow \delta(x)$ ist keine gewöhnliche Funktion, sondern eine *Distribution* (= *stetige Linearform*, d.h. eine lineare, stetige Abbildung von Funktionen nach \mathbb{R} bzw. \mathbb{C}).

Eigenschaften von $\delta(x)$

- $\int dx \delta(x) \dots$ ist als Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int dx \delta_n(x) \dots \quad (1.5)$$

realisierbar mit Funktionenfolgen $\delta_n(x)$, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

wobei

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \delta_n(x) = 1, \quad \alpha < 0 < \beta \quad (1.7)$$

z.B.:

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + x^2}.$$

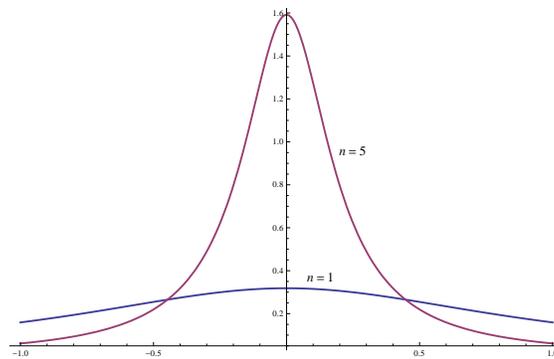


Abbildung 1.3: Beispiele für $\delta_n(x)$, hier für $n = 1$ und $n = 5$.

1. Elektrostatik

- Mehrdimensionale Erweiterung:

$$\delta(\vec{x} - \vec{a}) := \prod_{i=1}^3 \delta(x_i - a_i), \quad \text{wobei} \quad \vec{x} = \sum_{n=1}^3 x_n \vec{e}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

für Koordinaten x_n bezüglich eines Orthonormalsystems $\{\vec{e}_n\}$.

$$\Rightarrow \int_V d^3 \vec{x} f(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{a}) = \begin{cases} f(\vec{a}), & \text{falls } \vec{a} \in V \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.9)$$

- Ableitungen von $\delta(x)$ sind definiert über partielle Integration:

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \underbrace{f(x) \delta'(x-a)}_{=(f\delta)' - f'\delta} = \underbrace{f(x) \delta(x-a)}_{=0, \alpha < a < \beta} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} dx f'(x) \delta(x-a) = -f'(a) \quad (1.10)$$

- Implizite δ -Funktion :

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}, \quad (1.11)$$

wobei x_n alle einfachen(!) Nullstellen von $f(x)$ mit $x_n \in (\alpha, \beta)$ sind, $f(x_n) = 0$.

- Stammfunktion von $\delta(x) =$ Heavyside-Funktion $\theta(x)$:

$$\theta(x) := \int_{-\infty}^x dx' \delta(x') = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

bzw. $\theta'(x) = \delta(x)$.

Anwendung: Ladungsdichte einer diskreten Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{n=1}^N q_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_n), \quad (1.13)$$

$q_n =$ Punktladung am Ort \vec{x}_n .

1.2 Coulomb-Gesetz, elektrisches Feld, elektrisches Potential

Coulomb-Gesetz:

= empirisches Gesetz für Kraft zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q_1 q_2 \cdot \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2} \cdot \vec{e}_{12} \quad (1.14)$$

1. Elektrostatik

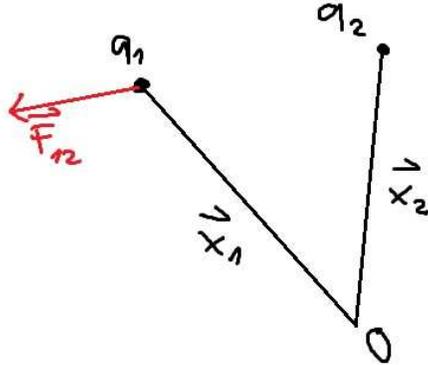


Abbildung 1.4: \vec{F}_{12} bezeichnet die Kraft, welche von q_2 auf q_1 ausgeübt wird. Der erste Term $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ mit $\epsilon_0 = 8,8543 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ (Dielektrizitätskonstante des Vakuums) ist ein Einheitenfaktor im SI-System. $q_1 \cdot q_2$ drückt eine Proportionalität zu den Ladungen aus, $1/|\Delta\vec{x}|^2 = 1/r^2$, wie beim Newton'schen Gravitationsgesetz, \vec{e}_{12} : Kraft wirkt entlang der Verbindungslinie. $q_1 q_2 > 0$: Abstoßung, $q_1 q_2 < 0$: Anziehung.

Superpositionsprinzip:

Die Einzelkräfte \vec{F}_n durch N Punktladungen q_n bei \vec{x}_n auf eine Ladung q bei \vec{x} addieren sich vektoriell:

$$\vec{F} = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n = q \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^N \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}_n}{|\vec{x} - \vec{x}_n|^3}}_{:=\vec{E}(\vec{x})} \quad (1.15)$$

dabei bezeichnet man $\vec{E}(\vec{x})$ als *elektrische Feldstärke*, die von den Ladungen q_n am Ort \vec{x} erzeugt wird = Kraft pro Ladung, die bei \vec{x} auf die Ladung q wirken würde.

Elektrisches Feld

- Veranschaulichung durch Feldlinien: $\vec{E}(\vec{x}) =$ Tangentenvektor an Feldlinien, Dichte der Feldlinien ist Maß für $|\vec{E}(\vec{x})|$
 → Feldlinien schneiden sich nie!

1. Elektrostatik

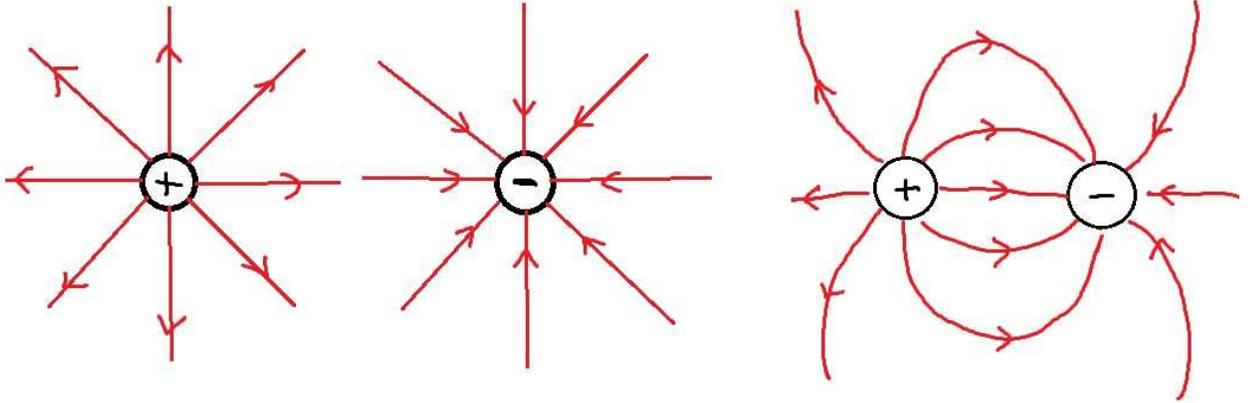


Abbildung 1.5: Feldlinien einer positiven, einer negativen und Superposition einer positiven und einer negativen Punktladung.

Elektrisches Feld kontinuierlicher Ladungsverteilungen

Gegeben sei eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$ in einem Volumen V . Dann ist $\vec{E}(\vec{x})$ gegeben durch:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \underbrace{\int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}')}_{\hat{=} \sum_k \rho(\vec{x}_k) \Delta V(\vec{x}_k) = \sum_k q_k} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (1.16)$$

Gesamtladung:

$$q = \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \quad (1.17)$$

Beispiele:

1. Fernfeld einer begrenzten Ladungsverteilung: Sei $|\vec{x} - \vec{x}'| \gg a = \max.$ Längenausdehnung in V .

$$\Rightarrow |\vec{x} - \vec{x}'| = |\vec{x}| + \mathcal{O}(|\vec{x}'|^0) \text{ für } |\vec{x}| \gg a > |\vec{x}'|. \quad (1.18)$$

Bemerkung:

$f(x) = \mathcal{O}((x - x_0)^k)$ heißt, dass

$$\left| \frac{f(x)}{(x - x_0)^k} \right| < \text{const. für } x \rightarrow x_0. \quad (1.19)$$

1. Elektrostatik

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}')}_{=q} \left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \mathcal{O}(|\vec{x}|^{-3}) \right) \text{ für } |\vec{x}| \rightarrow \infty \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r = |\vec{x}|, \quad \vec{x} = r\vec{e}_r, \end{aligned} \quad (1.20)$$

wobei $\mathcal{O}(1/r^3)$ Abweichungen vom $1/r^2$ -Gesetz für nicht-spärliche Ladungsverteilungen berücksichtigt.

2. Fernfeld eines Dipols:

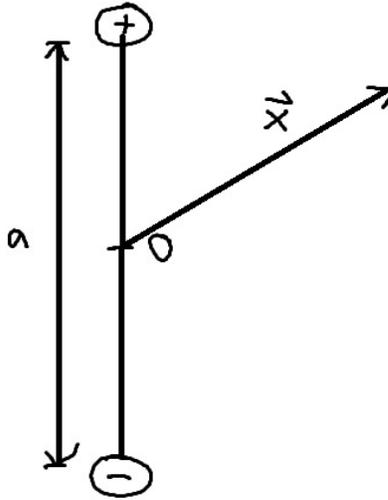


Abbildung 1.6: Illustration eines elektrischen Dipols

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{x} - \frac{\vec{a}}{2}}{|\vec{x} - \frac{\vec{a}}{2}|^3} - \frac{\vec{x} + \frac{\vec{a}}{2}}{|\vec{x} + \frac{\vec{a}}{2}|^3} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} r^{-3} \left(\frac{-\vec{a}}{2} \cdot 2 + \frac{3(\vec{x}\vec{a})}{r^2} \cdot \vec{x} \cdot 2 + \mathcal{O}(1/r) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} r^{-3} \left(-\vec{p} + 3\frac{(\vec{x}\vec{p})}{r^2} \vec{x} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right), \end{aligned} \quad (1.21)$$

1. Elektrostatik

mit $\vec{p} := q\vec{a} = \text{el. Dipolmoment}$ und wobei

$$\begin{aligned} \left| \vec{x} \pm \frac{\vec{a}}{2} \right|^{-3} &= \left(r^2 + \frac{a^2}{4} \pm \vec{x}\vec{a} \right)^{-3/2} = r^{-3} \left(1 + \frac{a^2}{4r^2} \pm \frac{\vec{x}\vec{a}}{r^2} \right)^{-3/2} \\ &= r^{-3} \left(1 \mp \frac{3\vec{x}\vec{a}}{2r^2} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

mathematische Wiederholung/Exkursion: Elemente der Vektoranalysis

Es sei $f(\vec{x})$ eine einfache Funktion (= Skalarfeld) und $\vec{F}(\vec{x})$ eine vektorwertige Funktion (= Vektorfeld). Zudem bezeichnet $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ die partielle Ableitung nach x_i und

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \text{ den sog. Nabla-Operator.}$$

- Gradient, Divergenz, Rotation:

$$\text{grad} f(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} \text{ in kart. Koordinaten} \quad (1.23)$$

$$\text{div} \vec{F}(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} \vec{F}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^3 \partial_i F_i \text{ in kart. Koordinaten} \quad (1.24)$$

$$\text{rot} \vec{F}(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} \text{ in kart. Koordinaten} \quad (1.25)$$

$\vec{\nabla}$ -Kalkül: Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ ist vektorwertig (\rightarrow Regeln der Vektorrechnung) und ein Differentialoperator (\rightarrow Produktregel beim Differenzieren).

Beispiele:

Es bezeichnet $\vec{\nabla}(f \cdot g)$, dass $\vec{\nabla}$ nur auf f wirkt.

$$\vec{\nabla}(f \cdot g) = \vec{\nabla}(f \cdot g) \vec{\nabla}(f \cdot g) = g(\vec{\nabla} f) + f(\vec{\nabla} g) \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(f \cdot \vec{G}) &= \vec{\nabla}(f \vec{G}) + \vec{\nabla}(f \vec{G}) \\ &= (\vec{\nabla} f) \vec{G} + f(\vec{\nabla} \vec{G}) \\ &= \sum_i [G_i(\partial_i f) + f(\partial_i G_i)] \end{aligned} \quad (1.27)$$

1. Elektrostatik

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{=\vec{0}} f = \vec{0}, \quad \text{d.h. rot grad} = 0, \quad (1.28)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{=\vec{0}} \cdot \vec{F} = 0, \quad \text{d.h. div rot} = 0. \quad (1.29)$$

- Laplace-Operator:

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \sum_{k=1}^3 \partial_k^2 \quad (1.30)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F} \quad (1.31)$$

- Berechnung von Kurvenintegralen: Es sei $\vec{x}(t)$ eine Parametrisierung des Weges $C(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, d.h. $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1$ und $\vec{x}(t_2) = \vec{x}_2$. Weiter sei $\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}(t)$ der Tangentenvektor an die Kurve. Hiermit ist

$$\int_{C(\vec{x}_1, \vec{x}_2)} d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\vec{x}}{dt} \vec{E}(\vec{x}(t)). \quad (1.32)$$

Bogenlänge: infinitesimal $ds^2 = \sum dx_i^2 = |\dot{\vec{x}}|^2 \cdot dt^2$

$$\Rightarrow s_{21} = \int_{t_1}^{t_2} dt |\dot{\vec{x}}| = \int_{C(\vec{x}_1, \vec{x}_2)} d\vec{x} \cdot \vec{t}_C \quad (1.33)$$

s_{21} ist unabhängig von der Parametrisierung! \vec{t}_C bezeichnet den normierten Tangentenvektor an C .

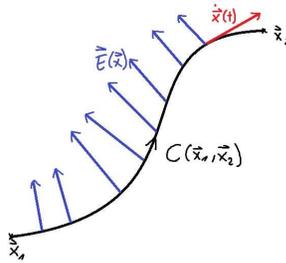


Abbildung 1.7: Illustration zur Berechnung von Kurvenintegralen

- Berechnung von Flächenintegralen: Parametrisierung der Fläche durch 2 Parameter u, v

$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{x}(u, v) \quad (1.34)$$

1. Elektrostatik

Tangentenvektoren an Koordinatenlinien: $\vec{x}_u := \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \Big|_{v=\text{const.}}$, $\vec{x}_v := \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \Big|_{u=\text{const.}}$.

Orientiertes Flächenelement:

$$d\vec{A} = (\vec{x}_u du) \times (\vec{x}_v dv) = \vec{x}_u \times \vec{x}_v du dv \quad (1.35)$$

Flächenmaß: $dA = |d\vec{A}| = |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| du dv$

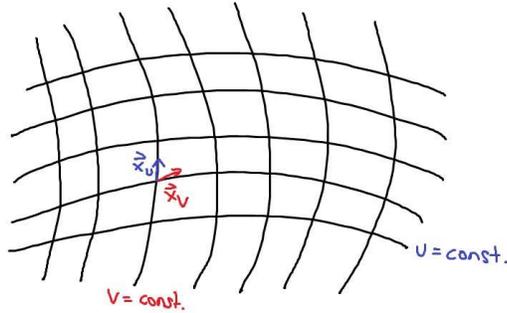


Abbildung 1.8: Tangentenvektoren \vec{x}_u (blau) und \vec{x}_v (rot) und die Linien des Koordinatennetzes einer Fläche A

⇒ Flussintegral:

$$\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E} = \iint_A du dv (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) \cdot \vec{E}(\vec{x}(u, v)) \quad (1.36)$$

Oberfläche:

$$A = \int_A dA = \int du dv |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \int_A d\vec{A} \cdot \vec{n}_A \quad (1.37)$$

A ist unabhängig von der Parametrisierung! \vec{n}_A bezeichnet den normierten Normalenvektor auf A .

Beispiel: Kugeloberfläche

$$\vec{x} = R \begin{pmatrix} \cos v \sin u \\ \sin v \sin u \\ \cos u \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v < 2\pi, \quad (1.38)$$

1. Elektrostatik

$$\vec{x}_u = R \begin{pmatrix} \cos v \cos u \\ \sin v \cos u \\ -\sin u \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v = R \sin u \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = R^2 \sin u \begin{pmatrix} \cos v \sin u \\ \sin v \sin u \\ \cos v \end{pmatrix}, \quad |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = R^2 \sin u. \quad (1.40)$$

$$\Rightarrow A = \int_0^\pi du \int_0^{2\pi} dv |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \int_0^\pi du \int_0^{2\pi} dv R^2 \sin u = 2\pi R^2 \int_{-1}^1 d \cos u = 4\pi R^2. \quad (1.41)$$

• Stoke'scher Integralsatz

$$\oint_{C(A)} \vec{F} d\vec{x} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\vec{A}, \quad \text{falls } \vec{F} \text{ auf } A \text{ regulär ist, d.h. hinreichend oft diff.bar} \quad (1.42)$$

wobei $\oint_{C(A)} d\vec{x}$ das geschlossene Wegintegral bezeichnet, der Weg $C(A)$ umrandet dabei die Fläche A . Der Normalenvektor \vec{n} auf A und $C(A)$ bilden eine Rechtsschraube!

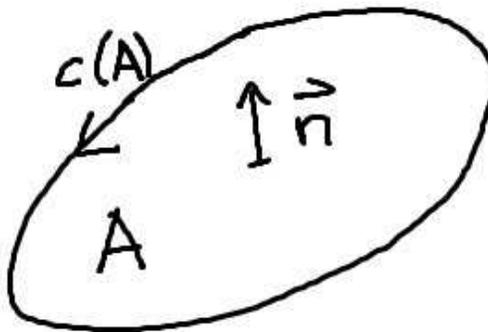


Abbildung 1.9: Zum Stoke'schen Satz

1. Elektrostatik

- Gauß'scher Integralsatz:

$$\oint_{A(V)} \vec{F} d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV \quad \text{falls } \vec{F} \text{ in } V \text{ regulär ist.} \quad (1.43)$$

Die linke Seite bezeichnet man als Oberflächenintegral („Fluss“) durch die Fläche $A(V)$, die das Volumen V umschließt. Die Flächennormale $\vec{n} || d\vec{A}$ weist dabei nach außen!

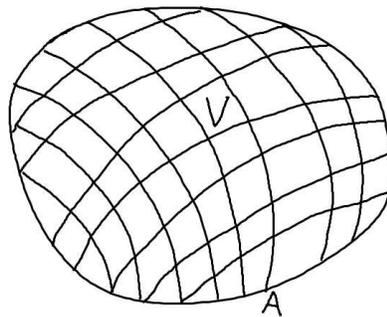


Abbildung 1.10: Illustration eines Volumens V welches von der Fläche A umschlossen wird.

Elektrisches Potential

Es gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (1.44)$$

Beweis:

- Punktladung impliziert Zentralkraft auf Testladung q , d.h.

$$\vec{F} = q\vec{E} = f(r) \cdot \vec{e}_r, \quad (1.45)$$

so dass $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

Allgemeines \vec{E} = Superposition von \vec{E} -Feldern von Punktladungen. $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

1. Elektrostatik

- Alternativ durch explizites Ausrechnen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right)}_{=f \cdot \vec{G}}\end{aligned}\quad (1.46)$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (f\vec{G}) &= (\vec{\nabla}f) \times \vec{G} + f(\vec{\nabla} \times \vec{G}), \\ \vec{G} &= \vec{x} - \vec{x}', \quad \vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{0} \\ f &= |\vec{x} - \vec{x}'|^{-3}, \quad \vec{\nabla}f = -3 \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5} \\ &\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Folgerung aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$:

Die elektrische Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ auf eine Testladung q bei \vec{x} im Feld $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x})$ ist konservativ, d.h. \vec{E} ist aus einem skalaren Potential $V(\vec{x})$ ableitbar:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}V(\vec{x}), \quad V = \text{potentielle elektrische Energie} \quad (1.47)$$

d.h.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}), \quad \phi = \text{el. Potential } (V = q\phi) \quad (1.48)$$

Berechnung von $\phi(\vec{x})$:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x}_0) &= - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \\ &= - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{r} \cdot \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{x}'}{|\vec{r} - \vec{x}'|^3} \\ &= - \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{r} \frac{\vec{r} - \vec{x}'}{|\vec{r} - \vec{x}'|^3}\end{aligned}\quad (1.49)$$

Kurvenintegral ist wegunabhängig ($\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ und Stoke'scher Satz).

1. Elektrostatik

Wähle speziellen Integrationsweg: $\vec{r}(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0)$, $0 \leq t \leq 1$, $d\vec{r} = (\vec{x} - \vec{x}_0)dt$:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x}_0) &= - \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 dt \frac{(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}' + t(\vec{x} - \vec{x}_0))}{\left[(\vec{x}_0 - \vec{x}' + t(\vec{x} - \vec{x}_0))^2 \right]^{3/2}} \\ &= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \left(\frac{-1}{\left[(\vec{x}_0 - \vec{x}' + t(\vec{x} - \vec{x}_0))^2 \right]^{1/2}} \right) \\ &= - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{|\vec{x}_0 - \vec{x}'|} \\ &= \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}_0 - \vec{x}'|} \right) \end{aligned} \quad (1.50)$$

d.h.:

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + const. \quad (1.51)$$

Bemerkungen:

- Potentiale $\phi_1(\vec{x})$, $\phi_2(\vec{x})$ sind äquivalent, falls $\phi_1(\vec{x}) - \phi_2(\vec{x}) = const.$ ist, da ϕ_1 und ϕ_2 dann dasselbe \vec{E} -Feld erzeugen.
- Äquipotentialfläche = Fläche in \vec{x} mit $\phi(\vec{x}) = const.$
Sei $\delta\vec{x}$ eine Variation innerhalb der Äquipotentialfläche:

$$0 = \phi(\vec{x} + \delta\vec{x}) - \phi(\vec{x}) = \delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) + \mathcal{O}(\delta\vec{x}^2) = -\delta\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}), \quad (1.52)$$

d.h. $\vec{E}(\vec{x}) \perp$ Äquipotentialfläche.

- In Leitern gilt stets $\phi(\vec{x}) = const.$, d.h. $\vec{E}(\vec{x}) \equiv \vec{0}$, sonst Ladungsbewegung bis $\phi(\vec{x}) = const.$ → Influenzladungen auf Leiteroberflächen schirmen Leiterinneres elektrisch ab (*Faraday-Käfig*). Leiteroberflächen = Äquipotentialflächen.
- Bedeutung von $\phi(\vec{x})$: Sei $-\vec{F}(\vec{x})$ die Kraft, die auf eine Ladung q ausgeübt wird. Dann ist die Arbeit, die an q auf dem Weg von \vec{x}_1 nach \vec{x}_2 geleistet wird

$$W_{21} = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{F} = -q \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{E} = q \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\phi = q (\phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1)). \quad (1.53)$$

$\phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1)$ ist die Potentialdifferenz zwischen \vec{x}_2 und \vec{x}_1 , sie entspricht der Arbeit, die an der Ladung q pro Ladung q verrichtet wird.

1.3 Feldgleichungen der Elektrostatik

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (1.54)$$

Berechnungsvorschrift von $\vec{E}(\vec{x})$ bei vorgegebenem $\rho(\vec{x}')$

Aber: $\vec{E}(\vec{x})$ muss oft aus Randbedingungen (RB) berechnet werden, die ein noch nicht bekanntes $\rho(\vec{x})$ bedingen, z.B.:

Konfiguration von Leiterflächen mit vorgegebenem ϕ .

⇒ Satz von Differentiagleichungen wünschenswert, die $\vec{E}(\vec{x})$ bzw. $\phi(\vec{x})$ als Lösungen zu gegebenen RB liefern.

Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik:

1. Betrachte Punktladung q im Ursprung, die von einer Fläche A komplett umschlossen wird:

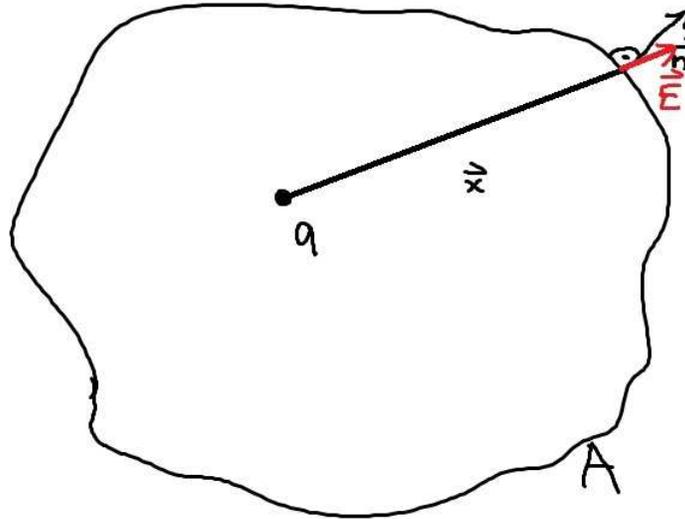


Abbildung 1.11: Die Fläche A umschließt die Punktladung q .

1. Elektrostatik

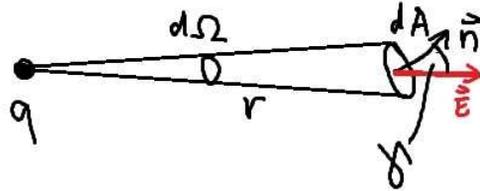


Abbildung 1.12: Flächennormale \vec{n} und \vec{e}_r schließen den Winkel γ ein.

$$r^2 d\Omega = dA \cos \gamma, \quad \gamma = \angle(\vec{n}, \vec{e}_r), \quad \cos(\gamma) = \vec{n} \cdot \vec{e}_r \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}(\vec{x}) d\vec{A} &= \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n} dA \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}}{r^2} dA \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\Rightarrow \oint_A d\vec{A} \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.57)$$

2. Triviale Verallgemeinerung auf allgemeine Ladungsverteilung durch Superposition aller q_n bzw. $\rho(\vec{x}_n) \Delta V_n$:

$$\oint_A d\vec{A} \vec{E} = \frac{q_A}{\epsilon_0} \quad q_A = \text{von } A \text{ umschlossene Ladung.} \quad (1.58)$$

3. Anwendung der Gauß'schen Integralsatzes liefert differentielle Form:

$$\oint_A \vec{E} \vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d^3\vec{x}, \quad \frac{q_A}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} d^3\vec{x} \quad (1.59)$$

1. Elektrostatik

(V : von A umschlossenes Volumen)

Da V beliebig war, folgt:

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}. \quad (1.60)$$

Feldgleichungen der E-Statik:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{E} &= \rho(\vec{x})/\epsilon_0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Die beiden partiellen Differentialgleichungen bestimmen nach Vorgabe von $\rho(\vec{x})$ und geeigneten RB das Feld $\vec{E}(\vec{x})$ eindeutig! (Beweis später, siehe Magnetostatik!)

Nebenprodukt:

$$\vec{\nabla} \vec{E} \stackrel{\text{Coulomb-}}{=} \text{gesetz} - \vec{\nabla}^2 \int_V d^3 \vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \stackrel{\text{Gauß'sches}}{=} \text{Gesetz} \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}. \quad (1.62)$$

Da $\rho(\vec{x})$ beliebig ist, gilt folgende Identität:

$$-\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (1.63)$$

Verhalten von E -Feldern an Grenzflächen:

a) Normalkomponente:

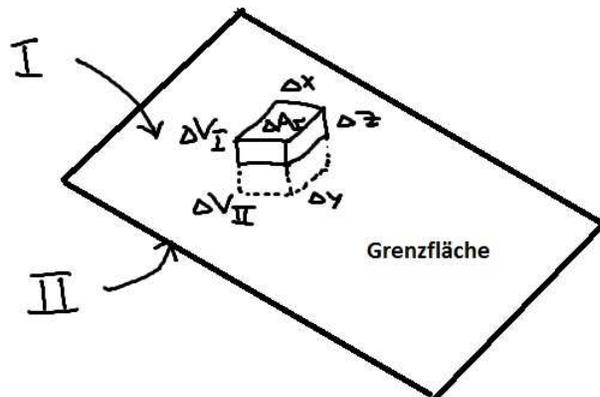


Abbildung 1.13: Infinitesimales Volumenelement an der Grenzfläche.

1. Elektrostatik

$$\begin{aligned}\vec{E}_I &= \text{const.} + \mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta y) + \mathcal{O}(\Delta z) \text{ in } \Delta V_I, \\ \vec{E}_{II} &= \text{const.} + \mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta y) + \mathcal{O}(\Delta z) \text{ in } \Delta V_{II}.\end{aligned}\tag{1.64}$$

$$\begin{aligned}\oint_{A(\Delta V_I \cup \Delta V_{II})} \vec{E} \, d\vec{A} &= \vec{E}_I \cdot \vec{n}_I \cdot \Delta x \Delta y + \vec{E}_{II} \cdot \vec{n}_{II} \cdot \Delta x \Delta y \\ &= (\vec{E}_I - \vec{E}_{II}) \cdot \vec{n}_I \Delta x \Delta y, \quad \vec{n}_I = -\vec{n}_{II}.\end{aligned}\tag{1.65}$$

Die Anteile der Flächen \perp zur Grenzfläche kompensieren sich!

$$\oint d\vec{A} \cdot \vec{E} = \int_{\Delta V_I \cup \Delta V_{II}} d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}') / \epsilon_0 = \rho(\vec{x}) \cdot \Delta V / \epsilon_0 = \sigma \cdot \Delta x \Delta y / \epsilon_0, \quad (\Delta z \rightarrow 0),\tag{1.66}$$

wobei $\Delta V = 2\Delta x \Delta y \Delta z$ und σ die Flächenladungsdichte bezeichnet.

$$\Rightarrow (\vec{E}_I - \vec{E}_{II}) \cdot \vec{n}_I = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\tag{1.67}$$

d.h. \vec{E}_\perp ist unstetig bei Grenzflächen.

b) Tangentialkomponente:

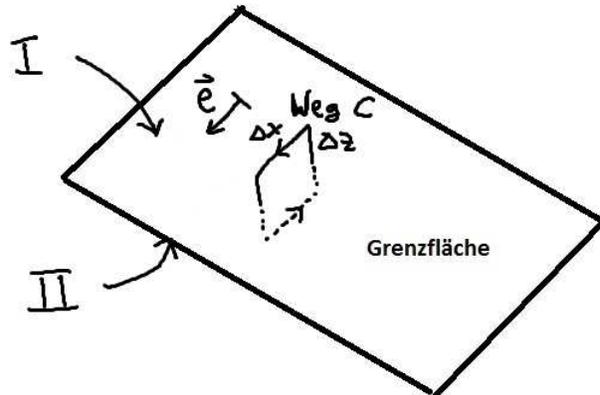


Abbildung 1.14: Infinitesimaler, geschlossener Weg an Grenzfläche, $\vec{e}_\perp \perp \vec{n}$.

1. Elektrostatik

$$0 = \oint_C \vec{E} d\vec{x} = \vec{E}_I \Delta x \vec{e} + \vec{E}_{II} \cdot \Delta x (-\vec{e}) + \mathcal{O}(\dots)$$

$$= (\vec{E}_I - \vec{E}_{II}) \vec{e} \cdot \Delta x. \text{ Anteile } \perp \text{ Grenzfläche kompensieren sich.}$$

$$\Rightarrow (\vec{E}_I - \vec{E}_{II}) \vec{e} = 0 \quad \forall \vec{e} \perp \vec{n}.$$

(1.68)

d.h. $\vec{E}_I^{\parallel} = \vec{E}_{II}^{\parallel}$, die Tangentialkomponente ist stetig!

Folgerungen:

- Leiteroberflächen: innerhalb eines Leiters gilt $\vec{E} = \vec{0}$.
 \Rightarrow Flächenladungsdichte: $\sigma = E_{\perp} \epsilon_0$ auf der Oberfläche (Die Normale zeigt vom Leiter in den felderfüllten Raum.)
- Falls $\rho(\vec{x})$ und $\sigma(\vec{x})$ endlich sind, bleibt \vec{E} endlich (aber nicht notwendigerweise stetig!).
 $\phi = - \int d\vec{x} \vec{E}$ bleibt stetig.
- Verhalten bei Dipolschichten: $\sigma(\vec{x})$ ist unbeschränkt!

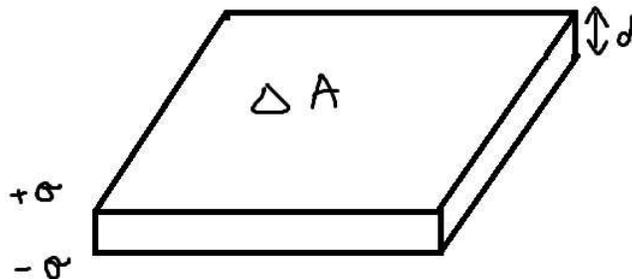


Abbildung 1.15: $\mathcal{D} \cdot \Delta A =$ Dipolstärke der Fläche A , mit Dipolfächendichte \mathcal{D} .

1. Elektrostatik

$$\phi_+ - \phi_- = \int_{-d/2}^{d/2} dx E_{\perp} = d \cdot E_{\perp} + \dots = \underbrace{d \cdot \sigma}_{=\mathcal{D} \text{ für } d \rightarrow 0} / \epsilon_0 \quad (1.69)$$

d.h. ϕ hat endlichen Sprung: $\phi_+ - \phi_- = \mathcal{D}/\epsilon_0$ und $E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$ divergiert!

Elektrostatische Feldenergie

Energie eines Systems von Ladungen = Arbeit, die nötig ist, um die Ladungen aus ∞ kommend zusammenzuführen.

System aus diskreten Ladungen:

$$\begin{aligned} W' &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^N \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \right)}_{\substack{= \text{Arbeit, um } q_i \text{ zu} \\ \{q_j\}_{j=1}^{i-1} \text{ hinzuzufügen.}}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x} \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (1.71)$$

als analogon zu W' .

Test: $W = W'$ für $\rho(\vec{x}) = \sum_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$?

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \\ &= W' + \text{Terme mit } i = j \text{ (Selbstenergieterme)}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Selbstenergie einer Punktladung = Energie um q_i in \vec{x}_i zu vereinigen \rightarrow nicht wohldefiniert (= theoretisches Problem der klassischen E-Dynamik, ist jedoch in der Praxis kaum relevant.)

1. Elektrostatik

W als el. Feldenergie:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_V d^3\vec{x} \rho(\vec{x})\phi(\vec{x}), \quad \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \\
 & \text{V kann durch vollen Raum ersetzt werden } (\rho \equiv 0 \text{ außerhalb von } V): \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{x} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \phi(\vec{x})}_{\substack{= \vec{\nabla}(\vec{E}\phi) - \vec{E}\vec{\nabla}\phi \\ \rightarrow 0 \text{ im } J}} \quad (1.73) \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{x} \vec{E}(-\vec{\nabla}\phi), \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{x} \vec{E}^2,
 \end{aligned}$$

d.h. $w_{\text{el}} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 =$ Energiedichte des elektrostatischen Feldes.

1.4 Poisson- und Laplace-Gleichungen

Äquivalenz:

$$\left. \begin{array}{l} \text{El. Feldgleichungen} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Poisson-Gleichung: } \Delta\phi = -\rho/\epsilon_0 \text{ wobei } \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \\ \text{bzw. Laplace-Gleichung: } \Delta\phi = 0 \text{ falls } \rho = 0 \end{array} \right.$$

Typisches Problem der E-Statik:

Suche $\phi(\vec{x})$ zu vorgegebenem $\phi(\vec{x})$ (Dirichlet'sche RB) bzw. $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi = -E_{\perp}$ (Neumann'sche RB) auf den Randflächen!

→ Frage nach Existenz, Eindeutigkeit und Berechnungsverfahren für $\phi(\vec{x})$, wobei

- Leiteroberflächen: $\phi(\vec{x}) = \text{const.}$
- geladene Flächen: $\frac{\partial\phi_a}{\partial n} - \frac{\partial\phi_i}{\partial n} = -\sigma/\epsilon_0$ ($a/i =$ außen/innen)
- Dipolschichten: $\phi_a - \phi_i = \pm\mathcal{D}/\epsilon_0$

Green'sche Theoreme

$$1. \quad \int_V (\phi\Delta\psi) + (\vec{\nabla}\phi)(\vec{\nabla}\psi)d^3\vec{x} = \oint_{A(V)} \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} dA = \oint_{A(V)} \phi(\vec{\nabla}\psi) \cdot d\vec{A}, \quad (1.74)$$

1. Elektrostatik

$$2. \quad \int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^3 \vec{x} = \oint_{A(V)} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dA, \quad (1.75)$$

wobei ϕ, ψ beliebig glatte Funktionen sind.

Beweis:

1. Integriere $\vec{\nabla}(\phi \Delta \psi)$ auf 2 Arten:

$$\begin{aligned} \int_V d^3 \vec{x} \vec{\nabla}(\phi \Delta \psi) &\stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \oint_{A(V)} d\vec{A} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi) \\ &= \int_V d^3 \vec{x} \left((\vec{\nabla} \phi)(\Delta \psi) + \phi(\vec{\nabla}^2 \psi) \right). \end{aligned} \quad (1.76)$$

2. Bilde Differenz von 1 und $(1|_{\phi \leftrightarrow \psi})$. \square

Frage nach Eindeutigkeit von Lösungen

Seien ϕ_1 und ϕ_2 Lösungen von $\Delta \phi = -\rho/\epsilon_0$

→ Für welche RB folgt $\phi_1 \equiv \phi_2$, d.h. $U = \phi_1 - \phi_2 \equiv 0$?

Einsetzen von $\phi = \psi = U$ in 1. Green'sches Theorem:

$$\int_V d^3 \vec{x} (\vec{\nabla} U)^2 = \oint_{A(V)} U \frac{\partial U}{\partial n} dA, \quad \text{da } \Delta U = 0. \quad (1.77)$$

1. Fall Dirichlet-RB: ϕ auf $A(V)$ gegeben.

→ $U \equiv 0$ auf $A(V)$

→ $\oint_{A(V)} \dots \equiv 0$

→ $\int_V d^3 \vec{x} (\vec{\nabla} U)^2 = 0$

→ $\vec{\nabla} U \equiv 0$ in ganz V

→ $U = \text{const.}$ in ganz V

→ $U \equiv 0$ in ganz V , da $U \equiv 0$ auf $A(V)$

⇒ $\phi(\vec{x})$ eindeutig in V

2. Fall Neumann RB: $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ auf $A(V)$ vorgegeben.

→ $\frac{\partial U}{\partial n} \equiv 0$ auf $A(V)$

→ $\oint_{A(V)} \dots = 0$

...wie in 1)

→ $U = \text{const.}$ in ganz V

⇒ $\phi(\vec{x})$ ist bis auf konstanten Anteil eindeutig in V !

1. Elektrostatik

3. Fall Gemische Fälle: $\phi(\vec{x})$ oder $\frac{\partial\phi}{\partial n}(\vec{x})$ für $\vec{x} \in A(V)$ gegeben.
 \Rightarrow Eindeutigkeit von $\phi(\vec{x})$, falls ϕ irgendwo auf $A(V)$ bekannt!

Bemerkung: Aus 1. und 2. folgt, dass $\phi(\vec{x})$ und $\frac{\partial\phi}{\partial n}(\vec{x})$ für ein $\vec{x} \in A(V)$ nicht gleichzeitig vorgegeben werden können.

1.5 Green'sche Funktionen der Elektrostatik

Ziel:

Reduktion des Randwertproblems der Poisson-Gleichung auf das einfachere Problem der Laplace-Gleichung

\rightarrow Einführung/Berechnung einer „Green'schen Funktion“ $G(\vec{x}, \vec{x}')$ mit der Eigenschaft

$$\Delta' G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.78)$$

und geeigneten RB (siehe unten!)

Grundlegende Anwendung:

2. Green'sches Theorem: $\phi(\vec{x}') = \Phi(\vec{x}')$ und $\psi(\vec{x}') = G(\vec{x}, \vec{x}')$

$$\int_V d^3\vec{x}' \left[\Phi(\vec{x}') \underbrace{\Delta' G(\vec{x}, \vec{x}')}_{=-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')} - G(\vec{x}, \vec{x}') \underbrace{\Delta' \Phi(\vec{x}')}_{=-\rho(\vec{x}')/\epsilon_0} \right] = \oint_{A(V)} dA' \left[\Phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\vec{x}') \right] \quad (1.79)$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \oint_{A(V)} d\vec{A}' \left[G(\vec{x}, \vec{x}') \underbrace{\vec{\nabla}' \Phi(\vec{x}')}_{=-\vec{E}(\vec{x}')} - \Phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' G(\vec{x}, \vec{x}') \right] \quad (1.80)$$

Festlegung der Randbedingungen:

1. Dirichlet-RB: wähle $G_D(\vec{x}, \vec{x}') \equiv 0$ für $\vec{x}' \in A(V)$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') G_D(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{A(V)} d\vec{A}' \Phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (1.81)$$

wobei $\rho(\vec{x}')$ und $\Phi(\vec{x}')$ vorgegeben sind.

2. Neumann-RB: wähle $\frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{x}, \vec{x}') \equiv -\frac{4\pi}{A(V)}$, $A(V)$ = Oberfläche von V (0 ist nicht möglich, da

$$\oint_{A(V)} \vec{\nabla}' G(\vec{x}, \vec{x}') d\vec{A}' \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V d^3\vec{x}' \Delta' G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \int_V d^3\vec{x}' \delta(\vec{x} - \vec{x}') = -4\pi.)$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' G_N(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{A(V)} d\vec{A}' G_N(\vec{x}, \vec{x}') \vec{E}(\vec{x}') + \bar{\Phi}_A \quad (1.82)$$

1. Elektrostatik

wobei $\rho(\vec{x}')$ in V und $\vec{E}(\vec{x}')$ auf $A(V)$ vorgegeben sind, und $\bar{\Phi}_A = \frac{1}{A(V)} \cdot \int_{A(V)} \Phi(\vec{x}') dA'$ eine Konstante ist.

Symmetrie von $G(\vec{x}, \vec{y})$

Beh: $G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{y}, \vec{x})$ kann durch geeignete Wahl von G erreicht werden.

Beweis:

2. Green'sches Theorem für $\phi(\vec{x}') = G(\vec{x}, \vec{x}')$ und $\psi(\vec{x}') = G(\vec{y}, \vec{x}')$:

$$\begin{aligned}
 & \int d^3 \vec{x}' \left[\underbrace{G(\vec{x}, \vec{x}') \Delta' G(\vec{y}, \vec{x}')}_{-4\pi\delta(\vec{y}-\vec{x}')} - \underbrace{G(\vec{y}, \vec{x}') \Delta' G(\vec{x}, \vec{x}')}_{-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')} \right] \\
 &= \oint_{A(V)} d\vec{A}' \left[\underbrace{G(\vec{x}, \vec{x}')}_{=0 \text{ für D-RB}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{y}, \vec{x}')}_{=-4\pi/A(V) \text{ für N-RB}} - \underbrace{G(\vec{y}, \vec{x}')}_{=0 \text{ für D-RB}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{x}, \vec{x}')}_{=-4\pi/A(V) \text{ für N-RB}} \right] \\
 &= -4\pi [G(\vec{x}, \vec{y}) - G(\vec{y}, \vec{x})] \\
 &\Rightarrow G_D(\vec{x}, \vec{y}) - G_D(\vec{y}, \vec{x}) = 0 \text{ automatisch erfüllt} \\
 &\Rightarrow -4\pi [G_N(\vec{x}, \vec{y}) - G_N(\vec{y}, \vec{x})] = -\frac{4\pi}{A(V)} \left[\oint_{A(V)} dA' G_N(\vec{x}, \vec{x}') - \oint_{A(V)} dA' G_N(\vec{y}, \vec{x}') \right] \neq 0 \text{ i. A.} \\
 & \hspace{15em} (1.83)
 \end{aligned}$$

→ Umdefinition:

$$\bar{G}_N(\vec{x}, \vec{y}) := G_N(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{1}{A(V)} \oint_{A(V)} G_N(\vec{x}, \vec{x}') dA' \quad (1.84)$$

→ \bar{G}_N ist ebenfalls Green'sche Funktion mit N-RB:

$$\begin{aligned}
 \Delta_y \bar{G}_N(\vec{x}, \vec{y}) &= \Delta_y G_N(\vec{x}, \vec{y}) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{y}), \\
 \frac{\partial}{\partial n_y} \bar{G}_N(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{\partial}{\partial n_y} G_N(\vec{x}, \vec{y}) = -4\pi/A(V). \\
 \Rightarrow \bar{G}_N(\vec{x}, \vec{y}) &= \bar{G}_N(\vec{y}, \vec{x}).
 \end{aligned} \quad (1.85)$$

Ansatz zur Berechnung von G :

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}') \quad (1.86)$$

→ $\Delta' F(\vec{x}, \vec{x}') = 0$, da $\Delta' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x}, \vec{x}')$, d.h. F erfüllt die Laplace-Gleichung für $\vec{x}, \vec{x}' \in V$.

⇒ Randwertproblem der Poisson-Gleichung mit bel. $\rho(\vec{x})$ und bel. RB wurde reduziert

1. Elektrostatik

auf Randwertproblem der Laplace-Gl. für $F(\vec{x}, \vec{x}')$ mit festen RB, z.B. $F_D(\vec{x}, \vec{x}') = -1/|\vec{x}-\vec{x}'|$ für $\vec{x}' \in A(V)$.

Bedeutung der Terme:

Betrachte „homogene RB“, d.h. $\phi \equiv 0$ (Dirichlet) oder $\frac{\partial \phi}{\partial n} \equiv 0$ (Neumann)

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') + \begin{cases} 0, & \text{D-RB,} \\ \frac{\phi_A}{\phi_A}, & \text{N-RB,} \end{cases} \\ &= \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|}}_{\text{Potential, das bei } \vec{x} \text{ durch } \rho(\vec{x}') \text{ lokalisiert in } \vec{x}' \in V \text{ erzeugt wird.}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') F(\vec{x}, \vec{x}')}_{\text{Potential einer Ladungsverteilung außerhalb von } V \text{ (da } \Delta F(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \text{ in } V), \text{ die die RB für } \phi \text{ garantiert.}} + \begin{cases} 0 \\ \frac{\phi_A}{\phi_A} \end{cases} \quad (1.87) \end{aligned}$$

D.h. jede Ladung $\rho(\vec{x}')d^3\vec{x}'$ mit $\vec{x}' \in V$ hat ein Gegenstück außerhalb von V , dessen Potential in \vec{x} durch $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(\vec{x}')d^3\vec{x}'F(\vec{x}, \vec{x}')$ gegeben ist.

⇒ Konstruktion von $G(\vec{x}, \vec{x}')$ durch *Bildladungen* außerhalb von V möglich (bei einfachen Geometrien!)

Beispiele zur Methode der Bildladungen:

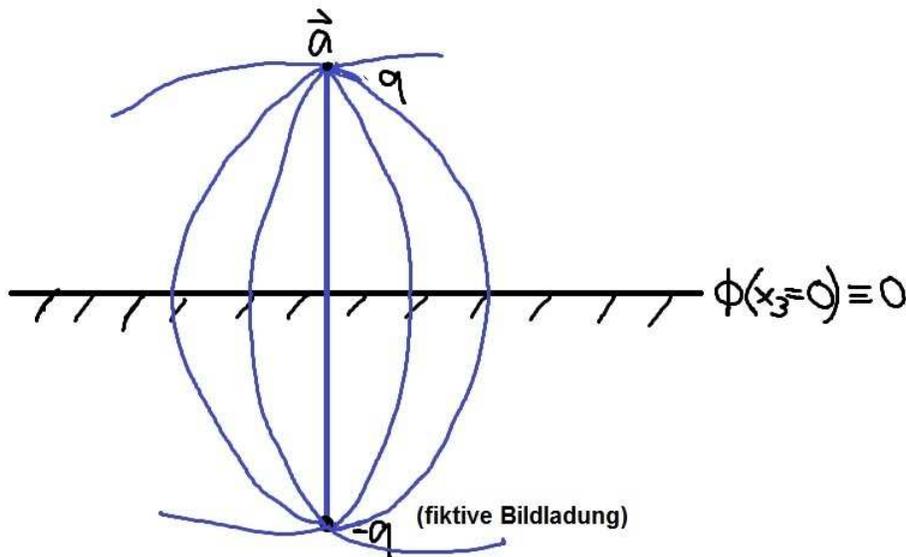


Abbildung 1.16: Punktladung q an der Stelle $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, die Ebene mit $x_3 = 0$ liefert eine Dirichlet-RB: $\phi(x_3 = 0) \equiv 0$

1. Elektrostatik

1. Punktladung über geerdeter Leiterplatte:

$$\text{Ladungsdichte: } \rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{a}), \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bildladungsdichte: } \rho'(\vec{x}) = -q\delta(\vec{x} - \hat{\vec{a}}), \quad \hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\begin{aligned} \rho'(\hat{\vec{x}}) &= -q\delta(\hat{\vec{x}} - \hat{\vec{a}}), \quad \hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} \\ &= -q\delta(\vec{x} - \vec{a}) \\ &= \rho(\vec{x}) \end{aligned} \tag{1.88}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{x} - \hat{\vec{a}}|} \right], \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \dots \tag{1.89}$$

2. Ladungsverteilung über einer geerdeten Leiterplatte:

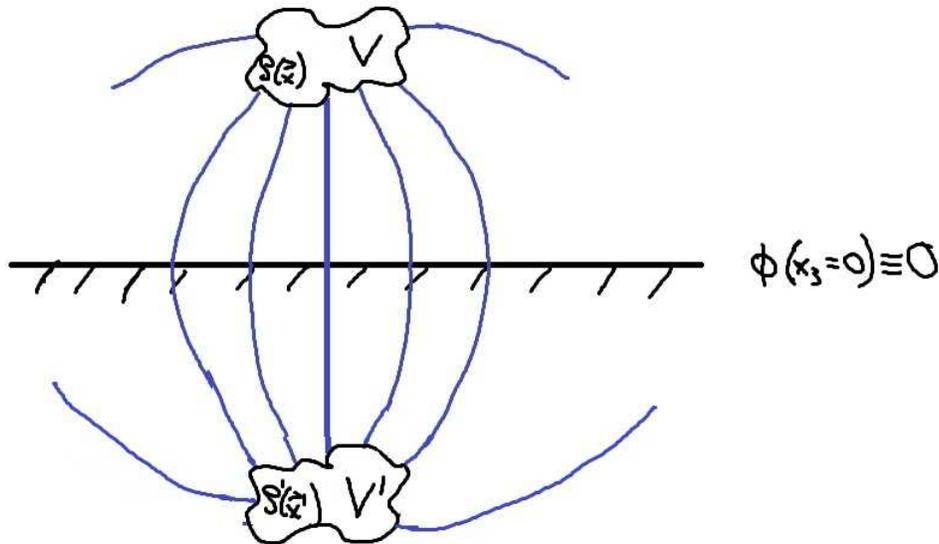


Abbildung 1.17: Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ im Volumen V über einer geerdeten Leiterplatte, die Ebene mit $x_3 = 0$ liefert wieder die Dirichlet-RB: $\phi(x_3 = 0) \equiv 0$

Aus (1) folgt (Zerlegung in Teilladungen $\rho(\vec{x}')d^3\vec{x}'$):

1. Elektrostatik

Bildladungsverteilung: $\rho'(\hat{x}) = -\rho(\vec{x})$

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \underbrace{\int_{V'} d^3\hat{x}' \frac{\rho'(\hat{x}')}{|\vec{x} - \hat{x}'|}}_{= - \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}} \right], \quad \begin{pmatrix} \hat{x}'_1 \\ \hat{x}'_2 \\ \hat{x}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ -x'_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \underbrace{\frac{1}{|\vec{x} - \hat{x}'|}}_{= 1/|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] \rho(\vec{x}'), \end{aligned} \tag{1.90}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \left[\underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}_{= -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}} - \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \hat{x}'|}}_{= -\frac{\vec{x} - \hat{x}'}{|\vec{x} - \hat{x}'|^3}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \left[\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} - \frac{\vec{x} - \hat{x}'}{|\vec{x} - \hat{x}'|^3} \right] \end{aligned} \tag{1.91}$$

E-Feld auf Leiterplatte: $x_3 = 0 \Rightarrow \vec{x} = \hat{x}$, $|\vec{x} - \vec{x}'| = |\hat{x} - \vec{x}'| = |\vec{x} - \hat{x}'|$.

$$\begin{aligned} \vec{E}(x_3 = 0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \underbrace{\left(-\vec{x}' + \hat{x}' \right)}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2x'_3 \end{pmatrix} = -2x'_3 \vec{e}_3} \\ &= -\frac{\vec{e}_3}{2\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \frac{x'_3 \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \perp \text{Leiterplatte} \end{aligned} \tag{1.92}$$

→ Ladungsdichte auf Leiterplatte: $\sigma = \epsilon_0 E_3(\vec{x}_3 = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_V d^3\vec{x}' \frac{-x'_3 \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$

1. Elektrostatik

→ Gesamtladung:

$$q_{\text{Leiterplatte}} = \int_{x_1-x_2\text{-Ebene}} dA \sigma = \frac{1}{2\pi} \int_V d^3 \vec{x}' (-x'_3) \rho(\vec{x}') \int dA \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Lege Koordinatensystem so, dass $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d^3 \vec{x}' (-x'_3) \rho(\vec{x}') \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_0^{\infty} dr r (r^2 + x_3'^2)^{-3/2}}_{-(r^2+x_3'^2)^{-1/2} \Big|_0^{\infty} = |x_3'|^{-1} = 1/x_3', x_3 > 0}$$

$$= - \int d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}')$$

$$= -q_{\text{ges}} = q_{\text{Bild}}$$

(1.93)

Green'sche Funktion (folgt aus ϕ oben!):

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\hat{\vec{x}} - \vec{x}'|}, \quad F(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{|\hat{\vec{x}} - \vec{x}'|} = F(\vec{x}', \vec{x}) \quad (1.94)$$

Zur Lösung des Dirichlet-Problems wird $\frac{\partial}{\partial n'} G_D(\vec{x}, \vec{x}')$ mit $\vec{x}' \in A(V)$ benötigt, d.h. $\frac{\partial}{\partial n'} = \dots = -\frac{\partial}{\partial x'_3} \Big|_{x'_3=0}$. (\vec{n} auf $A(V)$ zeigt nach unten!)

$$\frac{\partial G_D}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{\partial}{\partial x'_3} G_D(\vec{x}, \vec{x}') \Big|_{x'_3=0} = \frac{x'_3 - x_3}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} - \frac{x'_3 - \hat{x}_3}{|\hat{\vec{x}} - \vec{x}'|^3} \Big|_{x'_3=0} = \frac{-2x_3}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (1.95)$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}') G_D(\vec{x}, \vec{x}') + \frac{1}{2\pi} \int_{x_1 x_2} dA' \phi(\vec{x}') \frac{x_3}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (1.96)$$

1. Elektrostatik

3. Punktladung über geerdeter Leiterkugel

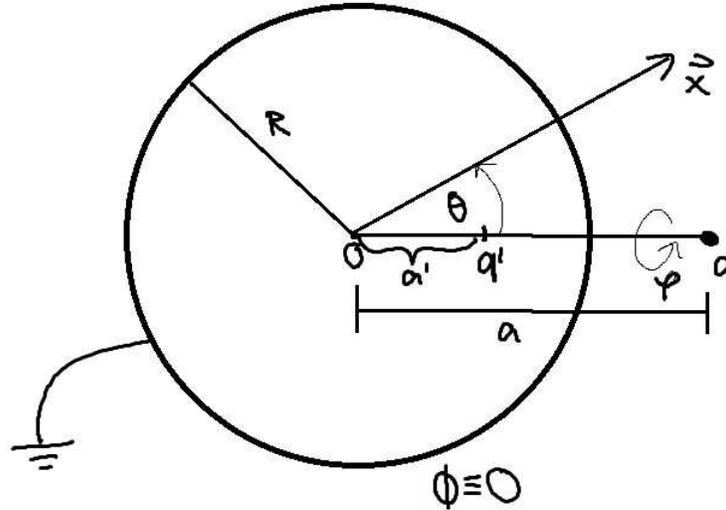


Abbildung 1.18:

Ladung: q bei $\vec{a} = (0, 0, a)^T$

Ansatz für Bildladung: q' bei $\vec{a}' = (0, 0, a')^T$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{x} - \vec{a}|} + \frac{q'}{|\vec{x} - \vec{a}'|} \right], \quad \vec{x} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = r \vec{e}_r. \quad (1.97)$$

1. Elektrostatik

$$\text{RB: } 0 \stackrel{!}{=} \phi(\vec{x} = R\vec{e}_r)$$

$$\Leftrightarrow |R\vec{e}_r - \vec{a}| = |R\vec{e}_r - \vec{a}'| \left(-\frac{q}{q'} \right), \quad qq' < 0.$$

$$\Rightarrow (R\vec{e}_r - \vec{a})^2 = (R\vec{e}_r - \vec{a}')^2 \frac{q^2}{q'^2}$$

$$R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta = (R^2 + a'^2 - 2Ra' \cos \theta) \frac{q^2}{q'^2} \quad \forall \cos \theta$$

$$\Rightarrow R^2 + a^2 \stackrel{!}{=} (R^2 + a'^2) \frac{q^2}{a'^2}, \quad a \stackrel{!}{=} a' \cdot \frac{q^2}{q'^2} \quad (1.98)$$

...

$$a' = \frac{R^2}{a} \vee \underbrace{a' = a}_{\text{nicht akzeptabel}}$$

$$\Rightarrow q'^2 = \frac{a'}{a} q^2 = \frac{R^2}{a^2} q^2, \quad q' = -\frac{R}{a} q, \quad \text{da } qq' < 0.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{R/a \cdot q}{|\vec{x} - (R^2/a^2)\vec{a}|} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[(r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta)^{-1/2} - \frac{R}{a} \left(r^2 + \frac{R^4}{a^2} - 2r \frac{R^2}{a} \cos \theta \right)^{-1/2} \right]. \end{aligned} \quad (1.99)$$

4. Ladungsverteilung über einer geerdeten Leiterkugel:

→ Umschreibung des Ergebnisses für Punktladung aus 3):

$$\text{in 3) gilt: } \rho(\vec{x}') = q\delta(\vec{x}' - \vec{a}) \quad (1.100)$$

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\underbrace{|\vec{x} - \vec{a}|}_{\rightarrow |\vec{x} - \vec{x}'|}} - \frac{R/a}{\underbrace{|\vec{x} - R^2/a^2\vec{a}|}_{\rightarrow |\vec{x} - \frac{R^2}{|\vec{x}'|^2}\vec{x}'|}} \right] \quad (1.101)$$

Elimination von \vec{a} aus [...]

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{R/|\vec{x}'|}{|\vec{x} - \frac{R^2}{|\vec{x}'|}\vec{x}'|} \right]$$

gilt für beliebige Ladungsverteilung außerhalb der Kugel auf Grund des Super-

1. Elektrostatik

positionsprinzips!

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow F(\vec{x}, \vec{x}') &= -\frac{R}{|\vec{x}'| |\vec{x} - (R^2/|\vec{x}'|^2) \vec{x}'|}, \quad \vec{x} = r\vec{e}_r, \quad \vec{x}' = r'\vec{e}'_r \\
 &= -\frac{R}{|\vec{x}| |\vec{x}'| \cdot |\vec{e}_r - \frac{R^2}{|\vec{x}| |\vec{x}'|} \cdot \vec{e}'_r|}, \quad \gamma = \angle(\vec{e}_r, \vec{e}'_r), \quad \cos \gamma = \vec{e}_r \cdot \vec{e}'_r \\
 &= -\frac{R}{|\vec{x}| |\vec{x}'| \cdot \left(1 + \frac{R^4}{\vec{x}^2 \vec{x}'^2} - \frac{2R^2}{|\vec{x}| |\vec{x}'|} \cos \gamma\right)^{1/2}} \\
 &= F(\vec{x}, \vec{x}'), \quad \text{Symmetrie!} \\
 &= -\frac{R}{|\vec{x}| \cdot |\vec{x}' - \frac{R^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x}|} \\
 &= -\frac{R}{|rr'\vec{e}_r - R^2\vec{e}_r|}
 \end{aligned} \tag{1.102}$$

Somit:

$$\begin{aligned}
 G_D(\vec{x}, \vec{x}') &= \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}') = \\
 &(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{-1/2} - R (r^2 r'^2 + R^4 - 2R^2 rr' \cos \gamma)^{-1/2}.
 \end{aligned} \tag{1.103}$$

Zur Lösung des Dirichlet-Problems wird die Normalenableitung $\frac{\partial}{\partial n'} G_D(\vec{x}, \vec{x}')$ mit $\vec{x}' \in A(V)$ benötigt, d.h. $\frac{\partial}{\partial n'} \dots = -\frac{\partial}{\partial r'} \Big|_{r'=R}$ (\vec{n} auf $A(V)$ zeigt nach innen!):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial n'} G_D(\vec{x}, \vec{x}') \Big|_{r'=R} &= \dots = \frac{R^2 - r^2}{R} (r^2 + R^2 - 2Rr \cos \gamma)^{-3/2}. \\
 \Rightarrow \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') G_D(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \phi(\vec{x}') \frac{R(R^2 - r^2)}{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \gamma)^{3/2}} \Big|_{|\vec{x}'|=R} \\
 &= \text{allgem. Lösung des Dirichlet-Problems}
 \end{aligned} \tag{1.104}$$

E-Feld bzw. Ladungsdichte σ auf der Kugel bei $\phi(|\vec{x}| = R) = 0$ (geerdet):

$$\sigma = \epsilon_0 E_r = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \dots = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') (R^2 - r'^2) \frac{1}{R} (r'^2 + R^2 - 2Rr' \cos \gamma)^{-3/2} \tag{1.105}$$

\Rightarrow Gesamtladung auf Kugel = Gesamtbildladung:

$$\begin{aligned}
 q'_{\text{ges}} &= \int d\Omega R^2 \sigma \\
 &= \dots \\
 &= - \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \underbrace{\frac{R}{r'}}_{<1} \Rightarrow |q'_{\text{ges}}| < |q_{\text{ges}}|.
 \end{aligned} \tag{1.106}$$