Theoretische Physik III - Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie

Vorlesungsmitschrift

Dozent: Prof. Stefan Dittmaier
Verfasser: Ralf Gugel

WS 11/12

Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

Organisatorisches

Dozent Prof. Stefan Dittmaier

Übungen Donnerstags und freitags, Eintragen in Listen!

Scheinerwerb Für die Zulassung zur Klausur, deren Bestehen Vorraussetzung zum Scheinerwerb ist, werden 50% der möglichen Punkte benötigt. Die Lösungen zu den Aufgaben müssen nicht abgegeben werden, sondern zu Beginn der Übungen wird angekreuzt, wer welche Aufgabe lösen kann, entsprechend erfolgt die Punktevergabe.

Tutorium Zusätzliches Tutorium (Musterlösungen) am Freitag

Themen Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie

1. Elektrostatik

1.1 Ladung

Grundgröße der klassischen Mechanik: Länge, Zeit, Masse charakterisieren Zustand von Körpern
Grundgröße der Elektrodynamik: Ladung, weniger anschaulich, da nicht direkt durch Sinnesorgane wahrnehmbar.

Die Ladung q ist eine weitere Kenngröße von Körpern neben der Masse m.

Experimenteller Befund:

- Es gibt zwei Arten elektrischer Ladung: *positiv* und *negativ*.
- Ladungen kann fließen, d.h. Körper können ihre Ladung ändern.
- Ladungen verhalten sich additiv:

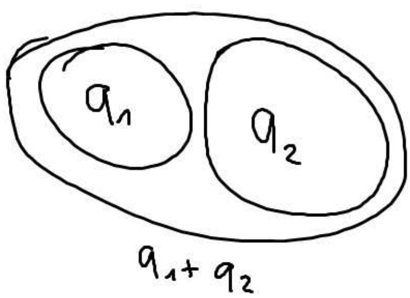

Abbildung 1.1: Körper aus zwei Teilkörpern mit Ladungen q_1 und q_2, entsprechend ist die Gesamtladung des Körpers $q = q_1 + q_2$ (analog: $m = m_1 + m_2$).

- Ladungserhaltung: In einem abgeschlossenen System ist die Gesamtladung erhalten, d.h. die Summe aller Ladungen ist konstant
- Ladung ist *quantisiert*, d.h. alle makroskopisch auftretenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der *Elementarladung* e: $q = \pm N \cdot e, \quad N \in \mathbb{N}_0$, $e = 1,602... \cdot 10^{-19}$C.

Ladungsverteilung
System aus N Teilchen (Einzelladungen q_n):

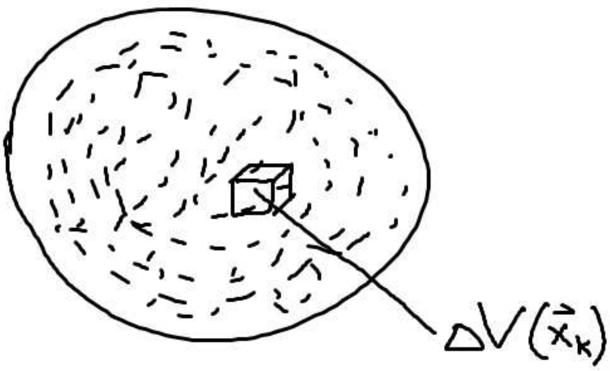

Abbildung 1.2: $\Delta V(\vec{x}_k)$ stellt ein kleines Volumen am Ort $\vec{x}_k$ dar mit $\Delta q(\vec{x}_k) = \sum\limits_{n \text{in} \Delta V(\vec{x}_k)} q_n$

$\Rightarrow$ Ladungsdichte:

$$\rho(\vec{x}_k) = \frac{\Delta q(\vec{x}_k)}{\Delta V(\vec{x}_k)}\Big|_{\Delta V \to 0} \tag{1.1}$$

(Idealisierter Grenzübergang, d.h. ΔV geht nicht bis zu mikroskpischen Größen)

$$\begin{aligned} \Rightarrow q = \sum_n q_n = \sum_k \Delta q(\vec{x}_k) = \sum_k \frac{\Delta q(\vec{x}_k)}{\Delta V(\vec{x}_k)} \cdot \Delta V(\vec{x}_k) \\ \xrightarrow[\Delta V \to 0]{} \int\limits_V d^3\vec{x}\; \rho(\vec{x}) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Frage:
Ladungsverteilung für eine Punktverteilung sinnvoll?

Mathematischer Exkurs: Dirac'sche Deltafunktion $\delta(x)$

Sei $f(x)$ eine in einer Umgebung von $x = a$ stetige Funktion, dann definiere:

$$\int_\alpha^\beta dx\, f(x)\delta(x-a) := \begin{cases} f(a), & \alpha < a < \beta, \\ 0, & a < \alpha \vee \beta < a. \end{cases} \tag{1.3}$$

d.h.

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 \ \text{ für } x \neq a, \\ \infty \ \text{ für } x = a. \end{cases} \tag{1.4}$$

$\Rightarrow \delta(x)$ ist keine gewöhnliche Funktion, sondern eine *Distribution* (= *stetige Linearform*, d.h. eine lineare, stetige Abbildung von Funktionen nach $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$).

Eigenschaften von $\delta(x)$

- $\int dx\, \delta(x)....$ ist als Grenzwert

  $$\lim_{n\to\infty} \int dx\, \delta_n(x)... \tag{1.5}$$

  realisierbar mit Funktionenfolgen $\delta_n(x)$, so dass

  $$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \begin{cases} 0, \ x \neq 0, \\ \infty, \ x = 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

  wobei

  $$\int_\alpha^\beta dx\, \delta_n(x) = 1, \quad \alpha < 0 < \beta \tag{1.7}$$

  z.B.:

  $$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + x^2}.$$

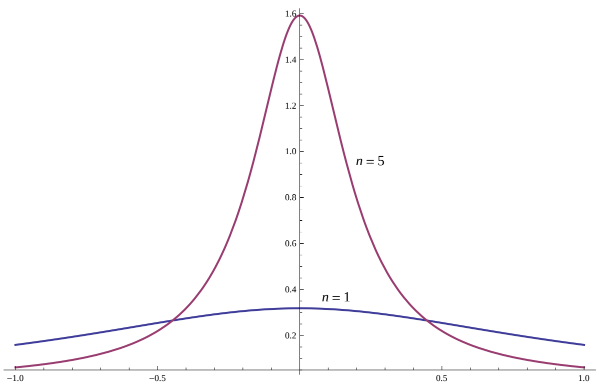

Abbildung 1.3: Beispiele für $\delta_n(x)$, hier für $n = 1$ und $n = 5$.

- Mehrdimensionale Erweiterung:

$$\delta(\vec{x}-\vec{a}) := \prod_{i=1}^{3} \delta(x_i - a_i), \quad \text{wobei} \quad \vec{x} = \sum_{n=1}^{3} x_n \vec{e}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

für Koordinaten x_n bezüglich eines Orthonormalsystems $\{\vec{e}_n\}$.

$$\Rightarrow \int_V d^3\,\vec{x} f(\vec{x})\delta(\vec{x}-\vec{a}) = \begin{cases} f(\vec{a}), \text{ falls } \vec{a} \in V \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases} \tag{1.9}$$

- Ableitungen von $\delta(x)$ sind definiert über partielle Integration:

$$\int_\alpha^\beta dx\ \underbrace{f(x)\delta'(x-a)}_{=(f\delta)'-f'\delta} = \underbrace{f(x)\delta(x-a)\Big|_\alpha^\beta}_{=0,\ \alpha<a<\beta} - \int_\alpha^\beta dx\ f'(x)\delta(x-a) = -f'(a) \tag{1.10}$$

- *Implizite δ-Funktion* :

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|f'(x_n)|}, \tag{1.11}$$

wobei x_n alle einfachen(!) Nullstellen von $f(x)$ mit $x_n \in (\alpha, \beta)$ sind, $f(x_n) = 0$.

- Stammfunktion von $\delta(x)$ = Heavyside-Funktion $\theta(x)$:

$$\theta(x) := \int_{-\infty}^{x} dx'\ \delta(x') = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

bzw. $\theta'(x) = \delta(x)$.

Anwendung: Ladungsdichte einer diskreten Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{N} q_n \delta(\vec{x}-\vec{x}_n), \tag{1.13}$$
$$q_n = \text{Punktladung am Ort } \vec{x}_n.$$

1.2 Coulomb-Gesetz, elektrisches Feld, elektrisches Potential

Coulomb-Gesetz:
= empirisches Gesetz für Kraft zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q_1 q_2 \cdot \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2} \cdot \vec{e}_{12} \tag{1.14}$$

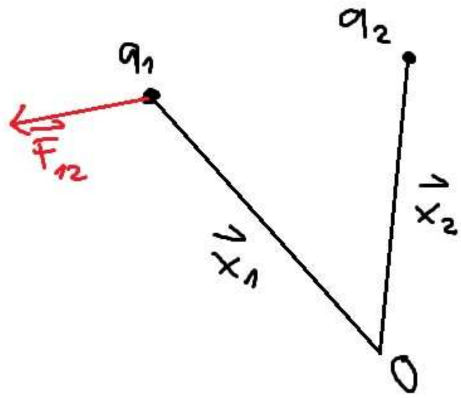

Abbildung 1.4: $\vec{F}_{12}$ bezeichnet die Kraft, welche von q_2 auf q_1 ausgeübt wird. Der erste Term $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ mit $\epsilon_0 = 8,8543 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$ (Dielektrizitätskonstante des Vakuums) ist ein Einheitenfaktor im SI-System. $q_1 \cdot q_2$ drückt eine Proportionalität zu den Ladungen aus, $1/|\Delta\vec{x}|^2 = 1/r^2$, wie beim Newton'schen Gravitationsgesetz, $\vec{e}_{12}$: Kraft wirkt entlang der Verbindungslinie. $q_1 q_2 > 0$: Abstoßung, $q_1 q_2 < 0$: Anziehung.

Superpositionsprinzip:

Die Einzelkräfte $\vec{F}_n$ durch N Punktladungen q_n bei $\vec{x}_n$ auf eine Ladung q bei $\vec{x}$ addieren sich vektoriell:

$$\vec{F} = \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_n = q \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}_n}{|\vec{x} - \vec{x}_n|^3}}_{:=\vec{E}(\vec{x})}, \tag{1.15}$$

dabei bezeichnet man $\vec{E}(\vec{x})$ als *elektrische Feldstärke*, die von den Ladungen q_n am Ort $\vec{x}$ erzeugt wird = Kraft pro Ladung, die bei $\vec{x}$ auf die Ladung q wirken würde.

Elektrisches Feld

- Veranschaulichung durch Feldlinien: $\vec{E}(\vec{x}) =$ Tangentenvektor an Feldlinien, Dichte der Feldlinien ist Maß für $|\vec{E}(\vec{x})|$
  $\rightarrow$ Feldlinien schneiden sich nie!

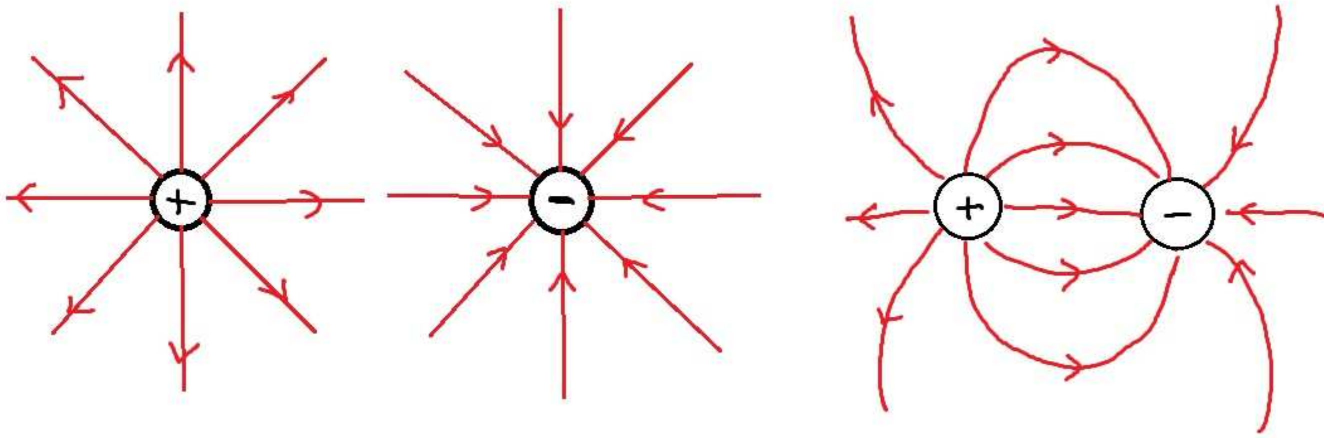

Abbildung 1.5: Feldlinien einer positiven, einer negativen und Superposition einer positiven und einer negativen Punktladung.

Elektrisches Feld kontinuierlicher Ladungsverteilungen

Gegeben sei eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$ in einem Volumen V. Dann ist $\vec{E}(\vec{x})$ gegeben durch:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \underbrace{\int\limits_V d^3\vec{x}'\ \rho(\vec{x}')}_{\hat{=}\sum\limits_k \rho(\vec{x}_k)\Delta V(\vec{x}_k)=\sum\limits_k q_k} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}. \tag{1.16}$$

Gesamtladung:

$$q = \int\limits_V d^3\vec{x}'\rho(\vec{x}') \tag{1.17}$$

Beispiele:

1. Fernfeld einer begrenzten Ladungsverteilung: Sei $|\vec{x}-\vec{x}'| \gg a =$ max. Längenausdehnung in V.

$$\Rightarrow |\vec{x}-\vec{x}'| = |\vec{x}| + \mathcal{O}(|\vec{x}'|^0) \text{ für } |\vec{x}| \gg a > |\vec{x}'|. \tag{1.18}$$

Bemerkung:

$f(x) = \mathcal{O}((x-x_0)^k)$ heißt, dass

$$\left|\frac{f(x)}{(x-x_0)^k}\right| < const. \text{ für } x \to x_0. \tag{1.19}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_V d^3\vec{x}'\rho(\vec{x}')}_{=q} \left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \mathcal{O}(|\vec{x}|^3) \right) \text{ für } |\vec{x}| \to \infty$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2}\vec{e}_r + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r = |\vec{x}|,\ \vec{x} = r\vec{e}_r, \tag{1.20}$$

wobei $\mathcal{O}(1/r^3)$ Abweichungen vom $1/r^2$-Gesetz für nicht-spärische Ladungsverteilungen berücksichtigt.

2. Fernfeld eines Dipols:

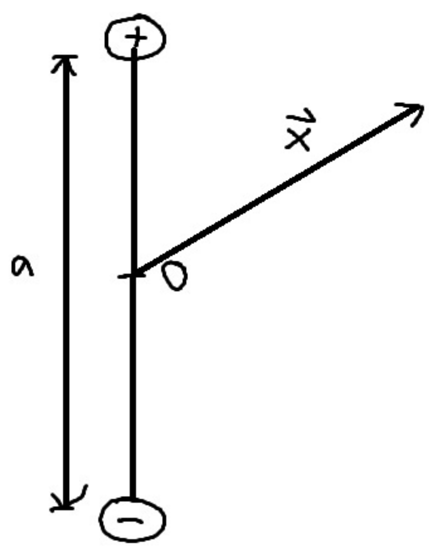

Abbildung 1.6: Illustration eines elektrischen Dipols

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{x} - \frac{\vec{a}}{2}}{|\vec{x} - \frac{\vec{a}}{2}|^3} - \frac{\vec{x} + \frac{\vec{a}}{2}}{|\vec{x} + \frac{\vec{a}}{2}|^3} \right)$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} r^{-3} \left(\frac{-\vec{a}}{2} \cdot 2 + \frac{3}{2}\frac{(\vec{x}\vec{a})}{r^2} \cdot \vec{x} \cdot 2 + \mathcal{O}(1/r) \right) \tag{1.21}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} r^{-3} \left(-\vec{p} + 3\frac{(\vec{x}\vec{p})}{r^2}\vec{x} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

mit $\vec{p} := q\vec{a} =$ el. Dipolmoment und wobei

$$\begin{aligned}\left|\vec{x} \pm \frac{\vec{a}}{2}\right|^{-3} = \left(r^2 + \frac{a^2}{4} \pm \vec{x}\vec{a}\right)^{-3/2} &= r^{-3}\left(1 + \frac{a^2}{4r^2} \pm \frac{\vec{x}\vec{a}}{r^2}\right)^{-3/2} \\ &= r^{-3}\left(1 \mp \frac{3}{2}\frac{\vec{x}\vec{a}}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-2})\right).\end{aligned} \tag{1.22}$$

mathematische Wiederholung/Exkursion: Elemente der Vektoranalysis

Es sei $f(\vec{x})$ eine einfache Funktion (= Skalarfeld) und $\vec{F}(\vec{x})$ eine vektorwertige Funktion (= Vektorfeld). Zudem bezeichnet $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ die partielle Ableitung nach x_i und $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix}\partial_1\\ \partial_2\\ \partial_3\end{pmatrix}$ den sog. *Nabla-Operator.*

- Gradient, Divergenz, Rotation:

$$\text{grad} f(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}\partial_1 f\\ \partial_2 f\\ \partial_3 f\end{pmatrix} \text{ in kart. Koordinaten} \tag{1.23}$$

$$\text{div}\vec{F}(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla}\vec{F}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i F_i \text{ in kart. Koordinaten} \tag{1.24}$$

$$\text{rot}\vec{F}(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix}\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2\\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3\\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1\end{pmatrix} \text{ in kart. Koordinaten} \tag{1.25}$$

$\vec{\nabla}$-Kalkül: Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ ist vektorwertig ($\rightarrow$ Regeln der Vektorrechnung) und ein Differentialoperator ($\rightarrow$ Produktregel beim Differenzieren).

Beispiele:

Es bezeichnet $\vec{\nabla}(\overset{\downarrow}{f} \cdot g)$, dass $\vec{\nabla}$ nur auf f wirkt.

$$\vec{\nabla}(f \cdot g) = \vec{\nabla}(\overset{\downarrow}{f} \cdot g)\vec{\nabla}(f \cdot \overset{\downarrow}{g}) = g(\vec{\nabla} f) + f(\vec{\nabla} g) \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(f \cdot \vec{G}) &= \vec{\nabla}(\overset{\downarrow}{f}\vec{G}) + \vec{\nabla}(f\overset{\downarrow}{\vec{G}}) \\ &= (\vec{\nabla} f)\vec{G} + f(\vec{\nabla}\vec{G}) \\ &= \sum_i \left[G_i(\partial_i f) + f(\partial_i G_i)\right]\end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{=\vec{0}} f = \vec{0}, \quad \text{d.h. rot grad} = 0, \tag{1.28}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{=\vec{0}} \cdot \vec{F} = 0, \quad \text{d.h. div rot} = 0. \tag{1.29}$$

- Laplace-Operator:

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \sum_{k=1}^{3} \partial_k^2 \tag{1.30}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F} \tag{1.31}$$

- Berechnung von Kurvenintegralen: Es sei $\vec{x}(t)$ eine Parametrisierung des Weges $C(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, d.h. $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1$ und $\vec{x}(t_2) = \vec{x}_2$. Weiter sei $\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}(t)$ der Tangentenvektor an die Kurve. Hiermit ist

$$\int\limits_{C(\vec{x}_1,\vec{x}_2)} d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d\vec{x}}{dt} \vec{E}(\vec{x}(t)). \tag{1.32}$$

Bogenlänge: infinitesimal $ds^2 = \sum dx_i^2 = |\dot{\vec{x}}|^2 \cdot dt^2$

$$\Rightarrow s_{21} = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \, |\dot{\vec{x}}| = \int\limits_{C(\vec{x}_1,\vec{x}_2)} d\vec{x} \cdot \vec{t}_C \tag{1.33}$$

s_{21} ist unabhängig von der Parametrisierung! $\vec{t}_C$ bezeichnet den normierten Tangentenvektor an C.

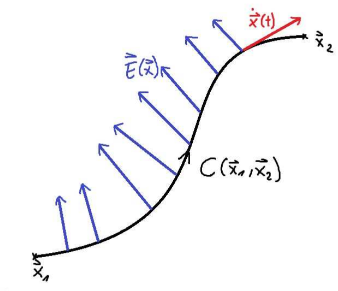

Abbildung 1.7: Illustration zur Berechnung von Kurvenintegralen

- Berechnung von Flächenintegralen: Parametrisierung der Fläche durch 2 Parameter u, v

$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{x}(u, v) \tag{1.34}$$

Tangentenvektoren an Koordinatenlinien: $\vec{x}_u := \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\Big|_{v=const.}$, $\vec{x}_v := \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\Big|_{u=const.}$.
Orientiertes Flächenelement:

$$d\vec{A} = (\vec{x}_u du) \times (\vec{x}_v dv) = \vec{x}_u \times \vec{x}_v \, dudv \tag{1.35}$$

Flächenmaß: $dA = |d\vec{A}| = |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| \, dudv$

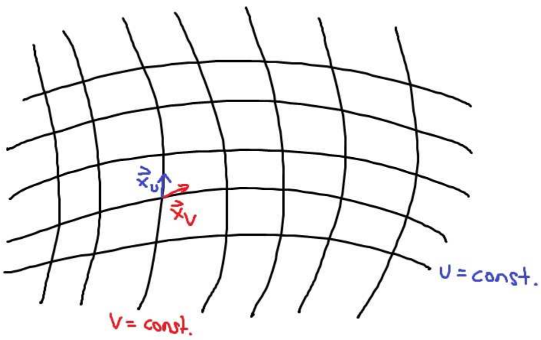

Abbildung 1.8: Tangentenvektoren $\vec{x}_u$ (blau) und $\vec{x}_v$ (rot) and die Linien des Koordinatennetzes einer Fläche A

$\Rightarrow$ Flussintegral:

$$\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E} = \iint_A dudv \, (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) \cdot \vec{E}(\vec{x}(u,v)) \tag{1.36}$$

Oberfläche:

$$A = \int_A dA = \int dudv \, |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \int_A d\vec{A} \cdot \vec{n}_A \tag{1.37}$$

A ist unabhängig von der Parametrisierung! $\vec{n}_A$ bezeichnet den normierten Normalenvektor auf A.

Beispiel: Kugeloberfläche

$$\vec{x} = R \begin{pmatrix} \cos v \sin u \\ \sin v \sin u \\ \cos u \end{pmatrix}, \; 0 \le u \le \pi, \; 0 \le v < 2\pi, \tag{1.38}$$

$$\vec{x}_u = R\begin{pmatrix}\cos v\cos u\\ \sin v\cos u\\ -\sin u\end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v = R\sin u\begin{pmatrix}-\sin v\\ \cos v\\ 0\end{pmatrix}, \tag{1.39}$$

$$\vec{x}_u\times\vec{x}_v = R^2\sin u\begin{pmatrix}\cos v\sin u\\ \sin v\sin u\\ \cos v\end{pmatrix}, \quad |\vec{x}_u\times\vec{x}_v| = R^2\sin u. \tag{1.40}$$

$$\Rightarrow A = \int_0^{\pi} du\int_0^{2\pi} dv\,|\vec{x}_u\times\vec{x}_v| = \int_0^{\pi} du\int_0^{2\pi} dv R^2\sin u = 2\pi R\int_{-1}^{1} d\cos u = 4\pi R^2. \tag{1.41}$$

- Stoke'scher Integralsatz

$$\oint_{C(A)} \vec{F}\,d\vec{x} = \int_A (\vec{\nabla}\times\vec{F})\,d\vec{A}, \text{ falls } \vec{F} \text{ auf } A \text{ regulär ist, d.h. hinreichend oft diff.bar} \tag{1.42}$$

wobei $\oint_{C(A)} d\vec{x}$ das geschlossene Wegintegral bezeichnet, der Weg $C(A)$ umrandet dabei die Fläche A. Der Normalenvektor $\vec{n}$ auf A und $C(A)$ bilden eine Rechtsschraube!

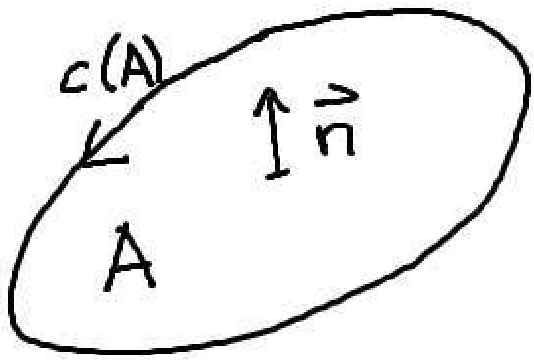

Abbildung 1.9: Zum Stoke'schen Satz

- Gauß'scher Integralsatz:

$$\oint\limits_{A(V)} \vec{F}\, d\vec{A} = \int\limits_V (\vec{\nabla}\vec{F})\, dV \quad \text{falls } \vec{F} \text{ in } V \text{ regulär ist.} \tag{1.43}$$

  Die linke Seite bezeichnet man als Oberflächenintegral („FLuss“) durch die Fläche $A(V)$, die das Volumen V umschließt. Die Flächennormale $\vec{n}||d\vec{A}$ weißt dabei nach außen!

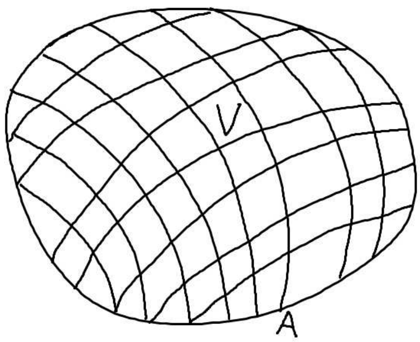

Abbildung 1.10: Illustration eines Volumens V welches von der FLäche A umschlossen wird.

<u>Elektrisches Potential</u>
Es gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \tag{1.44}$$

<u>Beweis:</u>

- Punktladung impliziert Zentralkraft auf Testladung q, d.h.

$$\vec{F} = q\vec{E} = f(r) \cdot \vec{e}_r, \tag{1.45}$$

  so dass $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.
  Allgemeines $\vec{E}$ = Superposition von $\vec{E}$-Feldern von Punktladungen. $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

- Alternativ durch explizites Ausrechnen:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times \int_V d^3\vec{x}'\ \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \\
&= \int_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \vec{\nabla} \times \left(\underbrace{\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}}_{=f\cdot\vec{G}} \right) \qquad (1.46)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (f\vec{G}) &= (\vec{\nabla} f) \times \vec{G} + f(\vec{\nabla} \times G), \\
\vec{G} &= \vec{x}-\vec{x}',\ \vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{0} \\
f = |\vec{x}-\vec{x}'|^{-3},\ \vec{\nabla} f &= -3\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^5} \\
\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0} \ _{\text{q.e.d.}}
\end{aligned}
$$

Folgerung aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$:
Die elektrische Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ auf eine Testladung q bei $\vec{x}$ im Feld $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x})$ ist konservativ, d.h. $\vec{E}$ ist aus einem skalaren Potential $V(\vec{x})$ ableitbar:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} V(\vec{x}),\ \ V = \text{ potentielle elektrische Energie} \qquad (1.47)$$

d.h.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}),\ \ \phi = \text{ el. Potential } (V = q\phi) \qquad (1.48)$$

Berechnung von $\phi(\vec{x})$:

$$
\begin{aligned}
\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x}_0) &= -\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{r}\ \vec{E}(\vec{r}) \\
&= -\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{r}\ \cdot \int_V d^3\vec{x}'\ \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{x}'}{|\vec{r}-\vec{x}'|^3} \qquad (1.49) \\
&= -\int_V d^3\vec{x}'\ \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{r}\ \frac{\vec{r}-\vec{x}'}{|\vec{r}-\vec{x}'|^3}
\end{aligned}
$$

Kurvenintegral ist wegunabhängig ($\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ und Stoke'scher Satz).

Wähle speziellen Integrationsweg: $\vec{r}(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0),\ \ 0 \le t \le 1,\ \ d\vec{r} = (\vec{x} - \vec{x}_0)dt$:

$$\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x}_0) = -\int_V d^3\vec{x}'\, \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^1 dt\, \frac{(\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}_0 - \vec{x}' + t(\vec{x}-\vec{x}_0))}{\left[\left(\vec{x}_0 - \vec{x}' + t(\vec{x}-\vec{x}_0)\right)^2\right]^{3/2}}}_{\substack{= \int_0^1 dt\, \frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{\left[(\vec{x}_0 - \vec{x}' + t(\vec{x}-\vec{x}_0))^2\right]^{1/2}}\right) \\ = -\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{1}{|\vec{x}_0 - \vec{x}|}}} \tag{1.50}$$

$$= \int_V d^3\vec{x}'\, \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}_0 - \vec{x}'|}\right)$$

d.h.:

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}'\, \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + const. \tag{1.51}$$

Bemerkungen:

- Potentiale $\phi_1(\vec{x})$, $\phi_2(\vec{x})$ sind äquivalent, falls $\phi_1(\vec{x}) - \phi_2(\vec{x}) = const.$ ist, da ϕ_1 und ϕ_2 dann dasselbe $\vec{E}$-Feld erzeugen.
- Äquipotentialfläche = Fläche in $\vec{x}$ mit $\phi(\vec{x}) = const.$
  Sei $\delta\vec{x}$ eine Variation innerhalb der Äquipotentialfläche:

  $$0 = \phi(\vec{x} + \delta\vec{x}) - \phi(\vec{x}) = \delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) + \mathcal{O}(\delta\vec{x}^2) = -\delta\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}), \tag{1.52}$$

  d.h. $\vec{E}(\vec{x}) \perp$ Äquipotentialfläche.
- In Leitern gilt stets $\phi(\vec{x}) = const.$, d.h. $\vec{E}(\vec{x}) \equiv \vec{0}$, sonst Ladungsbewegung bis $\phi(\vec{x}) = const.$ $\rightarrow$ Influenzladungen auf Leiteroberflächen schirmen Leiterinneres elektrisch ab (*Faraday-Käfig*). Leiteroberflächen = Äquipotentialflächen.
- Bedeutung von $\phi(\vec{x})$: Sei $-\vec{F}(\vec{x})$ die Kraft, die auf eine Ladung q ausgeübt wird. Dann ist die Arbeit, die an q auf dem Weg von $\vec{x}_1$ nach $\vec{x}_2$ geleistet wird

  $$W_{21} = -\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{F} = -q \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x}\, \vec{E} = q \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x}\, \vec{\nabla}\phi = q\left(\phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1)\right). \tag{1.53}$$

  $\phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1)$ ist die Potentialdifferenz zwischen $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_1$, sie entspricht der Arbeit, die an der Ladung q pro Ladung q verrichtet wird.

1.3 Feldgleichungen der Elektrostatik

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \int\limits_V d^3\vec{x}' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \tag{1.54}$$

Berechnungsvorschrift von $\vec{E}(\vec{x})$ bei vorgegebenem $\rho(\vec{x}')$
Aber: $\vec{E}(\vec{x})$ muss oft aus Randbedingungen (RB) berechnet werden, die ein noch nicht bekanntes $\rho(\vec{x})$ bedingen, z.B.:
Konfiguration von Leiterflächen mit vorgegebenem ϕ.
$\Rightarrow$ Satz von Differentiagleichungen wünschenswert, die $\vec{E}(\vec{x})$ bzw. $\phi(\vec{x})$ als Lösungen zu gegebenen RB liefern.

Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik:

1. Betrachte Punktladung q im Ursprung, die von einer Fläche A komplett umschlossen wird:

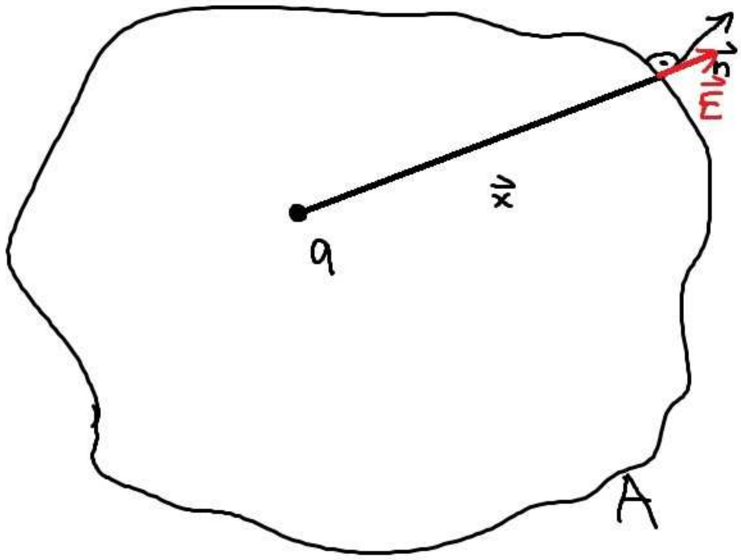

Abbildung 1.11: Die Fläche A umschließt die Punktladung q.

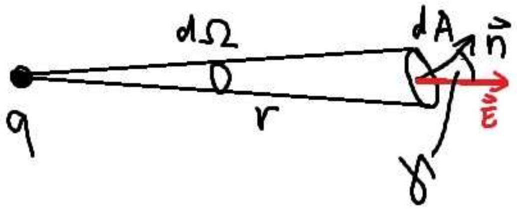

Abbildung 1.12: Flächennormale $\vec{n}$ und $\vec{E}$ schließen den Winkel γ ein.

$$r^2 d\Omega = dA\cos\gamma,\quad \gamma = \measuredangle(\vec{n},\vec{e}_r),\quad \cos(\gamma) = \vec{n}\cdot\vec{e}_r \tag{1.55}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{E}(\vec{x})d\vec{A} &= \vec{E}(\vec{x})\cdot\vec{n}dA \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{n}}{r^2}dA \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}d\Omega\end{aligned} \tag{1.56}$$

$$\Rightarrow \oint_A d\vec{A}\,\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_\Omega d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}. \tag{1.57}$$

2. Triviale Verallgemeinerung auf allgemeine Ladungsverteilung durch Superposition aller q_n bzw. $\rho(\vec{x}_n)\Delta V_n$:

$$\oint_A d\vec{A}\,\vec{E} = \frac{q_A}{\epsilon_0} \quad q_A = \text{von } A \text{ umschlossene Ladung.} \tag{1.58}$$

3. Anwendung der Gauß'schen Integralsatzes liefert differentielle Form:

$$\oint_A \vec{E}\,\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla}\vec{E})\,d^3\vec{x},\qquad \frac{q_A}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}\,d^3\vec{x} \tag{1.59}$$

(V: von A umschlossenes Volumen)
Da V beliebig war, folgt:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}. \tag{1.60}$$

<u>Feldgleichungen der E-Statik:</u>

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{E} &= \rho(\vec{x})/\epsilon_0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Die beiden partiellen Differentialgleichungen bestimmen nach Vorgabe von $\rho(\vec{x})$ und geeigneten RB das Feld $\vec{E}(\vec{x})$ eindeutig! (Beweis später, siehe Magnetostatik!)

Nebenprodukt:

$$\vec{\nabla}\vec{E} \underset{\text{gesetz}}{\overset{\text{Coulomb}-}{=}} -\vec{\nabla}^2 \int\limits_V d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \underset{\text{Gesetz}}{\overset{\text{Gauß'sches}}{=}} \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}. \tag{1.62}$$

Da $\rho(\vec{x})$ beliebig ist, gilt folgende Identität:

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \delta(\vec{x}-\vec{x}'). \tag{1.63}$$

Verhalten von E-Feldern an Grenzflächen:

a) Normalkomponente:

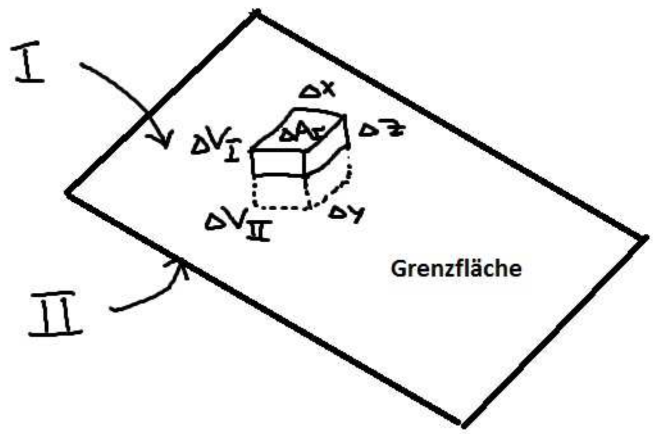

Abbildung 1.13: Infinitesimales Volumenelement an der Grenzfläche.

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\mathrm{I}} &= const. + \mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta y) + \mathcal{O}(\Delta z) \;\text{ in } \Delta V_{\mathrm{I}},\\ \vec{E}_{\mathrm{II}} &= const. + \mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta y) + \mathcal{O}(\Delta z) \;\text{ in } \Delta V_{\mathrm{II}}.\end{aligned} \tag{1.64}$$

$$\begin{aligned}\oint\limits_{A(\Delta V_{\mathrm{I}} \cup \Delta V_{\mathrm{II}})} \vec{E}\, d\vec{A} &= \vec{E}_{\mathrm{I}} \cdot \vec{n}_{\mathrm{I}} \cdot \Delta x \Delta y + \vec{E}_{\mathrm{II}} \cdot \vec{n}_{\mathrm{II}} \cdot \Delta x \Delta y\\ &= \left(\vec{E}_{\mathrm{I}} - \vec{E}_{\mathrm{II}}\right) \cdot \vec{n}_{\mathrm{I}} \Delta x \Delta y, \quad \vec{n}_{\mathrm{I}} = -\vec{n}_{\mathrm{II}}.\end{aligned} \tag{1.65}$$

Die Anteile der Flächen $\perp$ zur Grenzfläche kompensieren sich!

$$\oint d\vec{A} \cdot \vec{E} = \int\limits_{\Delta V_{\mathrm{I}} \cup \Delta V_{\mathrm{II}}} d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}')/\epsilon_0 = \rho(\vec{x}) \cdot \Delta V/\epsilon_0 = \sigma \cdot \Delta x \Delta y/\epsilon_0, \quad (\Delta z \to 0), \tag{1.66}$$

wobei $\Delta V = 2\Delta x \Delta y \Delta z$ und σ die Flächenladungsdichte bezeichnet.

$$\Rightarrow (\vec{E}_{\mathrm{I}} - \vec{E}_{\mathrm{II}}) \cdot \vec{n}_{\mathrm{I}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{1.67}$$

d.h. $\vec{E}_{\perp}$ ist unstetig bei Grenzflächen.

b) Tangentialkomponente:

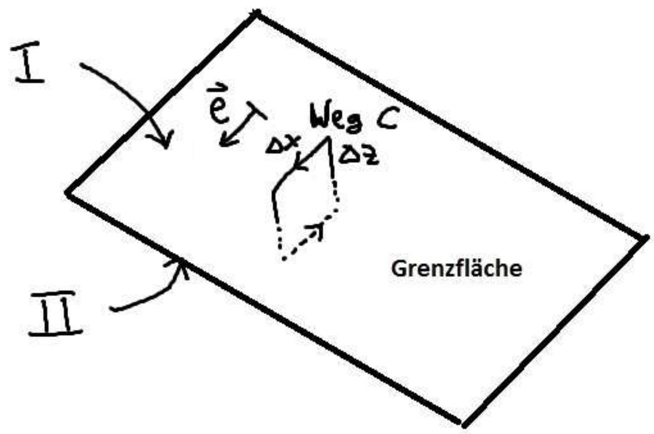

Abbildung 1.14: Infinitesimaler, geschlossener Weg an Grenzfläche, $\vec{e} \perp \vec{n}$.

$$
\begin{aligned}
0 &= \oint_C \vec{E}\, d\vec{x} = \vec{E}_\mathrm{I} \Delta x \vec{e} + \vec{E}_\mathrm{II} \cdot \Delta x(-\vec{e}) + \mathcal{O}(...) \\
&= \left(\vec{E}_\mathrm{I} - \vec{E}_\mathrm{II}\right) \vec{e} \cdot \Delta x. \text{ Anteile } \perp \text{ Grenzfläche kompensieren sich.} \\
\Rightarrow & \left(\vec{E}_\mathrm{I} - \vec{E}_\mathrm{II}\right) \vec{e} = 0 \;\; \forall \vec{e} \perp \vec{n}.
\end{aligned} \tag{1.68}
$$

d.h. $\vec{E}_\mathrm{I}^{\|} = \vec{E}_\mathrm{II}^{\|}$, die Tangentialkomponente ist stetig!

Folgerungen:

- Leiteroberflächen: innerhalb eines Leiters gilt $\vec{E} = \vec{0}$.
  $\Rightarrow$ Flächenladungsdichte: $\sigma = E_\perp \epsilon_0$ auf der Oberfläche (Die Normale zeigt vom Leiter in den felderfüllten Raum.)
- Falls $\rho(\vec{x})$ und $\sigma(\vec{x})$ endlich sind, bleibt $\vec{E}$ endlich (aber nicht notwendigerweise stetig!).
  $\phi = -\int d\vec{x}\, \vec{E}$ bleibt stetig.
- Verhalten bei Dipolschichten: $\sigma(\vec{x})$ ist unbeschränkt!

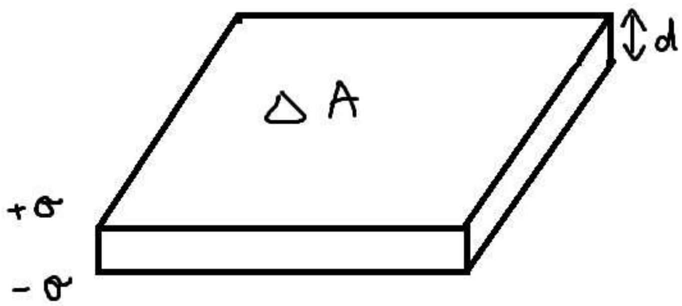

Abbildung 1.15: $\mathcal{D} \cdot \Delta A$ = Dipolstärke der Fläche A, mit Dipolflächendichte $\mathcal{D}$.

$$\phi_+ - \phi_- = \int_{-d/2}^{d/2} dx\, E_\perp = d \cdot E_\perp + ... = \underbrace{d \cdot \sigma}_{=\mathcal{D} \text{ für } d \to 0} /\epsilon_0 \tag{1.69}$$

d.h. ϕ hat endlichen Sprung: $\phi_+ - \phi_- = \mathcal{D}/\epsilon_0$ und $E_\perp = \sigma/\epsilon_0$ divergiert!

<u>Elektrostatische Feldenergie</u>

Energie eines Systems von Ladungen = Arbeit, die nötig ist, um die Ladungen aus ∞ kommend zusammenzuführen.

System aus diskreten Ladungen:

$$\begin{aligned} W' &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \right)}_{\text{= Arbeit, um } q_i \text{ zu } \{q_j\}_{j=1}^{i-1} \text{ hinzuzufügen.}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x} \int_V d^3\vec{x}' \, \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \tag{1.71}$$

als analogon zu W'.
Test: $W = W'$ für $\rho(\vec{x}) = \sum_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$?

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \\ &= W' + \text{Terme mit } i = j \text{ (Selbstenergieterme).} \end{aligned} \tag{1.72}$$

Selbstenergie einer Punktladung = Energie um q_i in $\vec{x}_i$ zu vereinigen $\to$ nicht wohldefiniert (= theoretisches Problem der klassischen E-Dynamik, ist jedoch in der Praxis kaum relevant.)

W als el. Feldenergie:

$$W = \frac{1}{2} \int\limits_V d^3\vec{x}\, \rho(\vec{x})\phi(\vec{x}), \quad \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla}\vec{E}$$

V kann durch vollen Raum ersetzt werden ($\rho \equiv 0$ außerhalb von V):

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{x} \quad \underbrace{\left(\vec{\nabla}\vec{E}\right)\phi(\vec{x})}_{= \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{E}\phi)}_{\to 0 \text{ im } \int} - \vec{E}\vec{\nabla}\phi} \tag{1.73}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{x}\, \vec{E}(-\vec{\nabla}\phi), \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{x}\, \vec{E}^2,$$

d.h. $w_{\text{el}} = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 =$ Energiedichte des elektrostatischen Feldes.

1.4 Poisson- und Laplace-Gleichungen

Äquivalenz:

$$\left.\begin{array}{c}\text{El. Feldgleichungen} \\ \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Poison-Gleichung: } \Delta\phi = -\rho/\epsilon_0 \text{ wobei } \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \\ \\ \quad\text{bzw. Laplace-Gleichung: } \Delta\phi = 0 \text{ falls } \rho = 0\end{array}\right.$$

Typisches Problem der E-Statik:
Suche $\phi(\vec{x})$ zu vorgegebenem $\phi(\vec{x})$ (Dirichlet'sche RB) bzw. $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}\phi = -E_\perp$ (Neumann'sche RB) auf den Randflächen!
$\to$ Frage nach Existenz, Eindeutigkeit und Berechnungsverfahren für $\phi(\vec{x})$, wobei

- Leiteroberflächen: $\phi(\vec{x}) = const.$
- geladene Flächen: $\frac{\partial\phi_a}{\partial n} - \frac{\partial\phi_i}{\partial n} = -\sigma/\epsilon_0$ (a/i = außen/innen)
- Dipolschichten: $\phi_a - \phi_i = \pm\mathcal{D}/\epsilon_0$

<u>Green'sche Theoreme</u>

1. $$\int\limits_V (\phi\Delta\psi) + (\vec{\nabla}\phi)(\vec{\nabla}\psi)d^3\vec{x} = \oint\limits_{A(V)} \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}dA = \oint\limits_{A(V)} \phi(\vec{\nabla}\psi)\cdot d\vec{A}, \tag{1.74}$$

2. $$\int_V (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)\, d^3\vec{x} = \oint_{A(V)} \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) dA, \tag{1.75}$$

wobei ϕ, ψ beliebig glatte Funktionen sind.

Beweis:

1. Integriere $\vec{\nabla}(\phi\Delta\psi)$ auf 2 Arten:

$$\begin{aligned}\int_V d^3\vec{x}\; \vec{\nabla}(\phi\vec{\nabla}\psi) &\underset{\text{Gauß}}{=} \oint_{A(V)} d\vec{A}\cdot\left(\phi\vec{\nabla}\psi\right) \\ &= \int_V d^3\vec{x}\;\left((\vec{\nabla}\phi)(\vec{\nabla}\psi) + \phi(\vec{\nabla}^2\psi)\right).\end{aligned} \tag{1.76}$$

2. Bilde Differenz von 1 und $\left(1|_{\phi\leftrightarrow\psi}\right)$. $\square$

Frage nach Eindeutigkeit von Lösungen

Seien ϕ_1 und ϕ_2 Lösungen von $\Delta\phi = -\rho/\epsilon_0$
$\rightarrow$ Für welche RB folgt $\phi_1 \equiv \phi_2$, d.h. $U = \phi_1 - \phi_2 \equiv 0$?
Einsetzen von $\phi = \psi = U$ in 1. Green'sches Theorem:

$$\int_V d^3\vec{x}\left(\vec{\nabla}U\right)^2 = \oint_{A(V)} U\frac{\partial U}{\partial n}dA, \text{ da } \Delta U = 0. \tag{1.77}$$

1.Fall Dirichlet-RB: ϕ auf $A(V)$ gegeben.
$\rightarrow U \equiv 0$ auf $A(V)$
$\rightarrow \oint_{A(V)} ... \equiv 0$
$\rightarrow \int_V d^3\vec{x}\, (\vec{\nabla}U)^2 = 0$
$\rightarrow \vec{\nabla}U \equiv 0$ in ganz V
$\rightarrow U = const.$ in ganz V
$\rightarrow U \equiv 0$ in ganz V, da $U \equiv 0$ auf $A(V)$
$\Rightarrow \phi(\vec{x})$ eindeutig in V

2.Fall Neumann RB: $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ auf $A(V)$ vorgegeben.
$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial n} \equiv 0$ auf $A(V)$
$\rightarrow \oint_{A(V)} ... = 0$
...wie in 1)
$\rightarrow U = const.$ in ganz V
$\Rightarrow \phi(\vec{x})$ ist bis auf konstanten Anteil eindeutig in V!

3.Fall Gemische Fälle: $\phi(\vec{x})$ oder $\frac{\partial\phi}{\partial n}(\vec{x})$ für $\vec{x} \in A(V)$ gegeben.
$\Rightarrow$ Eindeutigkeit von $\phi(\vec{x})$, falls ϕ irgendwo auf $A(V)$ bekannt!

Bemerkung: Aus 1. und 2. folgt, dass $\phi(\vec{x})$ und $\frac{\partial\phi}{\partial n}(\vec{x})$ für ein $\vec{x} \in A(V)$ nicht gleichzeitig vorgegeben werden können.

1.5 Green'sche Funktionen der Elektrostatik

Ziel:
Reduktion des Randwertproblems der Poisson-Gleichung auf das einfachere Problem der Laplace-Gleichung
$\rightarrow$ Einführung/Berechnung einer „Green'schen Funktion" $G(\vec{x}, \vec{x}')$ mit der Eigenschaft

$$\Delta' G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{1.78}$$

und geeigneten RB (siehe unten!)

Grundlegende Anwendung:
2. Green'sches Theorem: $\phi(\vec{x}') = \Phi(\vec{x}')$ und $\psi(\vec{x}') = G(\vec{x}, \vec{x}')$

$$\int_V d^3\vec{x}' \left[\Phi(\vec{x}') \underbrace{\Delta' G(\vec{x}, \vec{x}')}_{=-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')} - G(\vec{x}, \vec{x}') \underbrace{\Delta' \Phi(\vec{x}')}_{=-\rho(\vec{x}')/\epsilon_0} \right] = \oint_{A(V)} dA' \left[\Phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\vec{x}') \right] \tag{1.79}$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \oint_{A(V)} d\vec{A}' \left[G(\vec{x}, \vec{x}') \underbrace{\vec{\nabla}' \Phi(\vec{x}')}_{=-\vec{E}(\vec{x}')} - \Phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' G(\vec{x}, \vec{x}') \right] \tag{1.80}$$

Festlegung der Randbedingungen:

1. Dirichlet-RB: wähle $G_D(\vec{x}, \vec{x}') \equiv 0$ für $\vec{x}' \in A(V)$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}'\ \rho(\vec{x}') G_D(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{A(V)} d\vec{A}'\ \Phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}, \vec{x}'), \tag{1.81}$$

wobei $\rho(\vec{x}')$ und $\Phi(\vec{x}')$ vorgegeben sind.

2. Neumann-RB: wähle $\frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{x}, \vec{x}') \equiv -\frac{4\pi}{A(V)}$, $A(V)$ = Oberfläche von V (0 ist nicht möglich, da $\oint_{A(V)} \vec{\nabla}' G(\vec{x}, \vec{x}') d\vec{A} \underset{\text{Gauß}}{=} \int_V d^3\vec{x}' \Delta' G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \int_V d^3\vec{x}'\ \delta(\vec{x} - \vec{x}') = -4\pi$.)

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}'\ G_N(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{A(V)} d\vec{A}'\ G_N(\vec{x}, \vec{x}') \vec{E}(\vec{x}') + \overline{\Phi}_A \tag{1.82}$$

wobei $\rho(\vec{x}')$ in V und $\vec{E}(\vec{x}')$ auf $A(V)$ vorgegeben sind, und $\overline{\Phi}_A = \frac{1}{A(V)} \cdot \int_{A(V)} \Phi(\vec{x}')\, dA'$ eine Konstante ist.

Symmetrie von $G(\vec{x},\vec{y})$
Beh: $G(\vec{x},\vec{y}) = G(\vec{y},\vec{x})$ kann durch geeignete Wahl von G erreicht werden.
Beweis:
2. Green'sches Theorem für $\phi(\vec{x}') = G(\vec{x},\vec{x}')$ und $\psi(\vec{x}') = G(\vec{y},\vec{x}')$:

$$\int d^3\vec{x}' \left[G(\vec{x},\vec{x}')\, \underbrace{\Delta' G(\vec{y},\vec{x}')}_{-4\pi\delta(\vec{y}-\vec{x}')} - G(\vec{y},\vec{x}')\, \underbrace{\Delta' G(\vec{x},\vec{x}')}_{=-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')} \right]$$

$$= \oint\limits_{A(V)} d\vec{A}' \left[\underbrace{G(\vec{x},\vec{x}')}_{=0 \text{ für D-RB}} \; \underbrace{\frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{y},\vec{x}')}_{=-4\pi/A(V) \text{ für N-RB}} - \underbrace{G(\vec{y},\vec{x}')}_{=0 \text{ für D-RB}} \; \underbrace{\frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{x},\vec{x}')}_{=-4\pi/A(V) \text{ für N-RB}} \right]$$

$$= -4\pi \left[G(\vec{x},\vec{y}) - G(\vec{y},\vec{x}) \right]$$

$$\Rightarrow G_D(\vec{x},\vec{y}) - G_D(\vec{y},\vec{x}) = 0 \;\text{ automatisch erfüllt}$$

$$\Rightarrow -4\pi \left[G_N(\vec{x},\vec{y}) - G_N(\vec{y},\vec{x}) \right] = -\frac{4\pi}{A(V)} \left[\oint\limits_{A(V)} dA' G_N(\vec{x},\vec{x}') - \oint\limits_{A(V)} dA' G_N(\vec{y},\vec{x}') \right] \neq 0 \;\text{ i. A.} \tag{1.83}$$

$\rightarrow$ Umdefinition:

$$\overline{G}_N(\vec{x},\vec{y}) := G_N(\vec{x},\vec{y}) - \frac{1}{A(V)} \oint\limits_{A(V)} G_N(\vec{x},\vec{x}')dA' \tag{1.84}$$

$\rightarrow \overline{G}_N$ ist ebenfalls Green'sche Funktion mit N-RB:

$$\begin{aligned} \Delta_y \overline{G}_N(\vec{x},\vec{y}) &= \Delta_y G_N(\vec{x},\vec{y}) = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{y}), \\ \frac{\partial}{\partial n_y} \overline{G}_N(\vec{x},\vec{y}) &= \frac{\partial}{\partial n_y} G_N(\vec{x},\vec{y}) = -4\pi/A(V). \\ \Rightarrow \overline{G}_N(\vec{x},\vec{y}) &= \overline{G}_N(\vec{y},\vec{x}). \end{aligned} \tag{1.85}$$

Ansatz zur Berechnung von G:

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + F(\vec{x},\vec{x}') \tag{1.86}$$

$\rightarrow \Delta' F(\vec{x},\vec{x}') = 0$, da $\Delta' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x},\vec{x}')$, d.h. F erfüllt die Laplace-Gleichung für $\vec{x},\vec{x}' \in V$.
$\Rightarrow$ Randwerproblem der Poisson-Gleichung mit bel. $\rho(\vec{x})$ und bel. RB wurde reduziert

auf Randwertproblem der Laplace-Gl. für $F(\vec{x},\vec{x}')$ mit festen RB, z.B. $F_D(\vec{x},\vec{x}') = -1/|\vec{x}-\vec{x}'|$ für $\vec{x}' \in A(V)$.

Bedeutung der Terme:
Betrachte „homogene RB “, d.h. $\phi \equiv 0$ (Dirichlet) oder $\frac{\partial\phi}{\partial n} \equiv 0$ (Neumann)
Dann gilt:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V d^3\vec{x}'\, G(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}') + \begin{cases}0, & \text{D-RB},\\ \overline{\phi}_A, & \text{N-RB},\end{cases}\\ &= \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V d^3\vec{x}'\,\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}'-\vec{x}|}}_{\text{Potential, das bei } \vec{x} \text{ durch } \rho(\vec{x}') \text{ lokalisiert in } \vec{x}' \in V \text{ erzeugt wird.}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V d^3\vec{x}'\,\rho(\vec{x}')F(\vec{x},\vec{x}')}_{\text{Potential einer Ladungsverteilung außerhalb von } V \text{ (da } \Delta F(\vec{x},\vec{x}') = 0 \text{ in } V\text{), die die RB für } \phi \text{ garantiert.}} + \begin{cases}0\\ \overline{\phi}_A\end{cases}\end{aligned} \tag{1.87}$$

D.h. jede Ladung $\rho(\vec{x}')d^3\vec{x}'$ mit $\vec{x}' \in V$ hat ein Gegenstück außerhalb von V, dessen Potential in $\vec{x}$ durch $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(\vec{x}')d^3\vec{x}'F(\vec{x},\vec{x}')$ gegeben ist.

$\Rightarrow$ Konstruktion von $G(\vec{x},\vec{x}')$ durch *Bildladungen* außerhalb von V möglich (bei einfachen Geometrien!)

Beispiele zur Methode der Bildladungen:

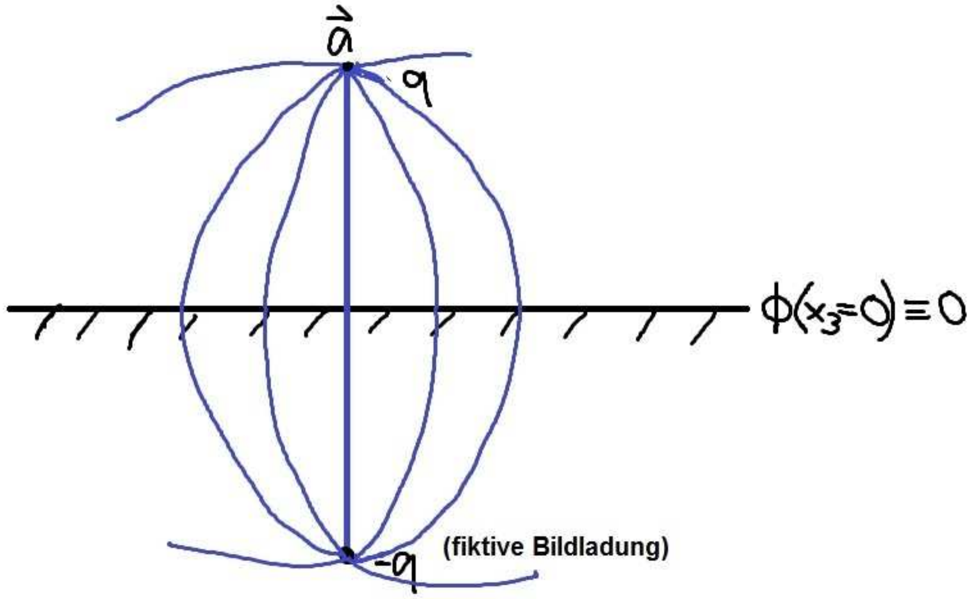

Abbildung 1.16: Punktladung q an der Stelle $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$, die Ebene mit $x_3 = 0$ liefert eine Dirichlet-RB: $\phi(x_3 = 0) \equiv 0$

1. Punktladung über geerdeter Leiterplatte:

   Ladungsdichte: $\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{a}),\ \ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

   Bildladungsdichte: $\rho'(\vec{x}) = -q\delta(\vec{x} - \hat{\vec{a}}),\ \ \hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$,

   d.h.

$$\begin{aligned} \rho'(\hat{\vec{x}}) &= -q\delta(\hat{\vec{x}} - \hat{\vec{a}}), \quad \hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} \\ &= -q\delta(\vec{x} - \vec{a}) \\ &= \rho(\vec{x}) \end{aligned} \tag{1.88}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{x} - \hat{\vec{a}}|}\right], \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \ ... \tag{1.89}$$

2. Ladungsverteilung über einer geerdeten Leiterplatte:

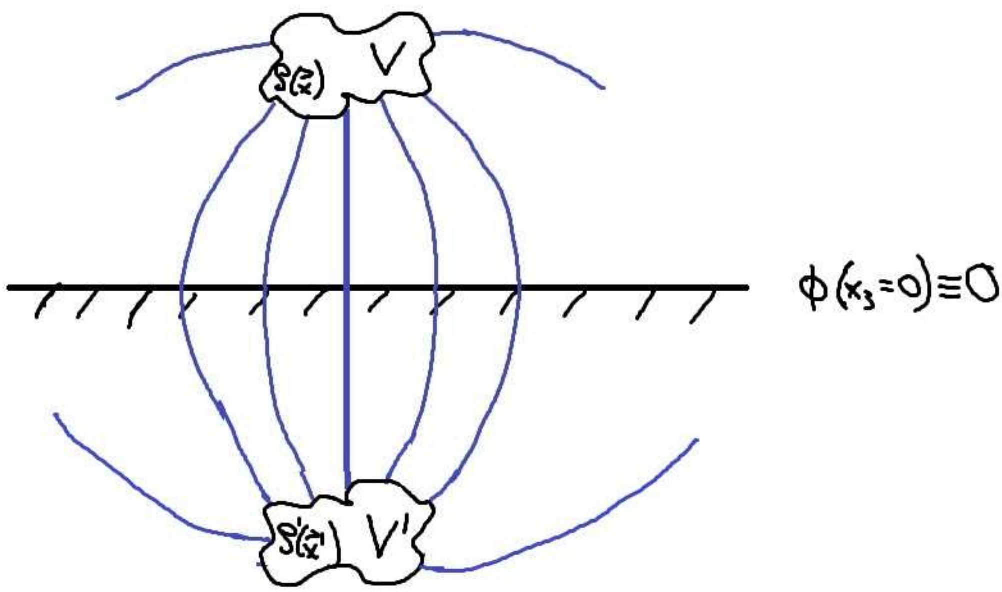

Abbildung 1.17: Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ im Volumen V über einer geerdeten Leiterplatte, die Ebene mit $x_3 = 0$ liefert wieder die Dirichlet-RB: $\phi(x_3 = 0) \equiv 0$

Aus (1) folgt (Zerlegung in Teilladungen $\rho(\vec{x}')d^3\vec{x}'$):

Bildladungsverteilung: $\rho'(\hat{\vec{x}}) = -\rho(\vec{x})$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int\limits_V d^3\vec{x}'\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \underbrace{\int\limits_{V'} d^3\hat{\vec{x}}'\frac{\rho'(\hat{\vec{x}}')}{|\vec{x}-\hat{\vec{x}}'|}}_{=-\int\limits_V d^3\vec{x}'\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\hat{\vec{x}}'|}}\right], \quad \begin{pmatrix}\hat{x}_1'\\ \hat{x}_2'\\ \hat{x}_3'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ -x_3'\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V d^3\vec{x}'\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \underbrace{\frac{1}{|\vec{x}-\hat{\vec{x}}'|}}_{=1/|\hat{\vec{x}}-\vec{x}'|}\right]\rho(\vec{x}'), \tag{1.90}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V d^3\vec{x}'\;\rho(\vec{x}')\left[\underbrace{\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{=-\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}} - \underbrace{\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\hat{\vec{x}}'|}}_{=-\frac{\vec{x}-\hat{\vec{x}}'}{|\vec{x}-\hat{\vec{x}}'|}}\right] \tag{1.91}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V d^3\vec{x}'\;\rho(\vec{x}')\left[\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} - \frac{\vec{x}-\hat{\vec{x}}'}{|\vec{x}-\hat{\vec{x}}'|^3}\right]$$

E-Feld auf Leiterplatte: $x_3 = 0 \Rightarrow \vec{x} = \hat{\vec{x}},\; |\vec{x}-\vec{x}'| = |\hat{\vec{x}}-\vec{x}'| = |\vec{x}-\hat{\vec{x}}'|$.

$$\vec{E}(x_3=0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V d^3\vec{x}'\;\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\;\underbrace{\left(-\vec{x}'+\hat{\vec{x}}'\right)}_{=\begin{pmatrix}0\\0\\-2x_3'\end{pmatrix}=-2x_3'\vec{e}_3} \tag{1.92}$$

$$= -\frac{\vec{e}_3}{2\pi\epsilon_0}\int\limits_V d^3\vec{x}'\;\frac{x_3'\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \perp \text{Leiterplatte}$$

$\to$ Ladungsdichte auf Leiterplatte: $\sigma = \epsilon_0 E_3(\vec{x}_3=0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_V d^3\vec{x}'\;\frac{-x_3'\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$

$\to$ Gesamtladung:

$$q_{\text{Leiterplatte}} = \int\limits_{x_1-x_2-\text{Ebene}} dA\;\sigma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_V d^3\vec{x}'\;(-x_3')\rho(\vec{x}')\int dA\;\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

Lege Koordinatensystem so, dass $\vec{x}' = \begin{pmatrix}0\\0\\x_3'\end{pmatrix}$ und $\vec{x} = r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int d^3\vec{x}'\;(-x_3')\rho(\vec{x}')\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \qquad \underbrace{\int\limits_0^{\infty} dr\; r(r^2+x_3'^2)^{-3/2}}_{-(r^2+x_3'^2)^{-1/2}\Big|_0^{\infty}=|x_3'|^{-1}=1/x_3',\; x_3>0} \\
&= -\int d^3\vec{x}'\;\rho(\vec{x}') \\
&= -q_{\text{ges}} = q_{\text{Bild}}
\end{aligned} \tag{1.93}$$

Green'sche Funktion (folgt aus ϕ oben!) :

$$G_D(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\hat{\vec{x}}-\vec{x}'|},\quad F(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{|\hat{\vec{x}}-\vec{x}'|} = F(\vec{x}',\vec{x}) \tag{1.94}$$

Zur Lösung des Dirichlet-Problems wird $\frac{\partial}{\partial n'}G_D(\vec{x},\vec{x}')$ mit $\vec{x}'\in A(V)$ benötigt, d.h. $\frac{\partial}{\partial n'} = ... = -\frac{\partial}{\partial x_3'}\Big|_{x_3'=0}$. ($\vec{n}$ auf $A(V)$ zeigt nach unten!)

$$\frac{\partial G_D}{\partial n'}(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{\partial}{\partial x_3'}G_D(\vec{x},\vec{x}')\Big|_{x_3'\equiv 0} = \frac{x_3'-x_3}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} - \frac{x_3'-\hat{x_3}}{|\hat{\vec{x}}-\vec{x}'|^3}\Big|_{x_3'\equiv 0} = \frac{-2x_3}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}. \tag{1.95}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V d^3\vec{x}'\;\rho(\vec{x}')G_D(\vec{x},\vec{x}') + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_1x_2} dA'\;\phi(\vec{x}')\frac{x_3}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \tag{1.96}$$

3. Punktladung über geerdeter Leiterkugel

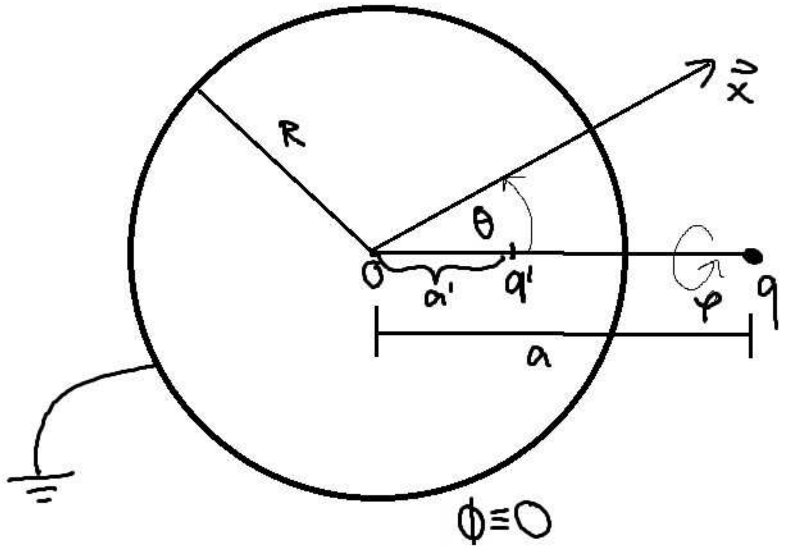

Abbildung 1.18:

Ladung: q bei $\vec{a} = (0, 0, a)^T$
Ansatz für Bildladung: q' bei $\vec{a}' = (0, 0, a')$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{x}-\vec{a}|} + \frac{q'}{|\vec{x}-\vec{a}'|}\right], \quad \vec{x} = r\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} = r\vec{e}_r. \qquad (1.97)$$

RB: $0 \overset{!}{=} \phi(\vec{x} = R\vec{e}_r)$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow |R\vec{e}_r - \vec{a}| &= |R\vec{e}_r - \vec{a}'| \left(-\frac{q}{q'}\right), \quad qq' < 0. \\
\Rightarrow (R\vec{e}_r - \vec{a})^2 &= (R\vec{e}_r - \vec{a}')^2 \frac{q^2}{q'^2} \\
R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta &= (R^2 + a'^2 - 2Ra'\cos\theta)\frac{q^2}{q'^2} \ \forall \cos\theta \\
\Rightarrow R^2 + a^2 &\overset{!}{=} (R^2 + a'^2)\frac{q^2}{a'^2}, \ \ a \overset{!}{=} a'.\frac{q^2}{q'^2} \\
&\ldots \\
a' &= \frac{R^2}{a} \vee \quad \underbrace{a' = a}_{\text{nicht akzeptabel}} \\
\Rightarrow q'^2 &= \frac{a'}{a}q^2 = \frac{R^2}{a^2}q^2, \ \ q' = -\frac{R}{a}q, \ \ \text{da } qq' < 0.
\end{aligned}
\tag{1.98}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{R/a \cdot q}{|\vec{x} - (R^2/a^2)\vec{a}|}\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta\right)^{-1/2} - \frac{R}{a}\left(r^2 + \frac{R^4}{a^2} - 2r\frac{R^2}{a}\cos\theta\right)^{-1/2}\right].
\end{aligned}
\tag{1.99}
$$

4. Ladungsverteilung über einer geerdeten Leiterkugel:
   $\rightarrow$ Umschreibung des Ergebnisses für Punktladung aus 3):

$$
\text{in 3) gilt:} \quad \rho(\vec{x}') = q\delta(\vec{x}' - \vec{a}) \tag{1.100}
$$

$$
\phi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}'\rho(\vec{x}')\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\underbrace{\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|}}_{\rightarrow|\vec{x}-\vec{x}'|} - \underbrace{\frac{R/a}{|\vec{x} - R^2/a^2\vec{a}|}}_{\rightarrow|\vec{x}-\frac{R^2}{|\vec{x}'|^2}\vec{x}'|}\right] \tag{1.101}
$$

Elimination von $\vec{a}$ aus [....]

$$
\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3\vec{x}'\rho(\vec{x}')\left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{R/|\vec{x}'|}{|\vec{x} - \frac{R^2}{|\vec{x}'|}\vec{x}'|}\right]
$$

gilt für beliebige Ladungsverteilung außerhalb der Kugel auf Grund des Superpositionsprinzips!

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow F(\vec{x}, \vec{x}') &= -\frac{R}{|\vec{x}'|\,\left|\vec{x} - \left(R^2/|\vec{x}'|^2\right)\vec{x}'\right|}, \quad \vec{x} = r\vec{e}_r,\ \vec{x}' = r'\vec{e}_r' \\
&= -\frac{R}{|\vec{x}|\,|\vec{x}'| \cdot \left|\vec{e}_r - \frac{R^2}{|\vec{x}|\,|\vec{x}'|} \cdot \vec{e}_r'\right|}, \quad \gamma = \measuredangle(\vec{e}_r, \vec{e}_r'),\ \cos\gamma = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r' \\
&= -\frac{R}{|\vec{x}|\,|\vec{x}'| \cdot \left(1 + \frac{R^4}{\vec{x}^2\vec{x}'^2} - \frac{2R^2}{|\vec{x}|\,|\vec{x}'|}\cos\gamma\right)^{1/2}} \\
&= F(\vec{x}, \vec{x}'), \quad \text{Symmetrie!} \\
&= -\frac{R}{|\vec{x}| \cdot \left|\vec{x}' - \frac{R^2}{|\vec{x}|^2}\vec{x}\right|} \\
&= -\frac{R}{|rr'\vec{e}_r' - R^2\vec{e}_r|}
\end{aligned} \tag{1.102}
$$

Somit:

$$
\begin{aligned}
&G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}') = \\
&\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma\right)^{-1/2} - R\left(r^2r'^2 + R^4 - 2R^2rr'\cos\gamma\right)^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{1.103}
$$

Zur Lösung des Dirichlet-Problems wird die Normalenableitung $\frac{\partial}{\partial n'}G_D(\vec{x}, \vec{x}')$ mit $\vec{x}' \in A(V)$ benötigt, d.h. $\frac{\partial}{\partial n'} \ldots = -\frac{\partial}{\partial r'}\Big|_{r'=R}$ ($\vec{n}$ auf $A(V)$ zeigt nach innen!):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial n'}G_D(\vec{x}, \vec{x}')\Big|_{r'=R} = \ldots = \frac{R^2 - r^2}{R}\left(r^2 + R^2 - 2Rr\cos\gamma\right)^{-3/2}. \\
&\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V d^3\vec{x}'\ \rho(\vec{x}')G_D(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{4\pi}\int d\Omega'\ \phi(\vec{x}')\frac{R(R^2 - r^2)}{\left(r^2 + R^2 - 2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}\Big|_{|\vec{x}'|=R} \\
&\quad = \text{allgem. Lösung des Dirichlet-Problems}
\end{aligned} \tag{1.104}
$$

E-Feld bzw. Ladungsdichte σ auf der Kugel bei $\phi(|\vec{x}| = R) = 0$ (geerdet):

$$
\sigma = \epsilon_0 E_r = -\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=R} = \ldots = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V d^3\vec{x}'\rho(\vec{x}')(R^2 - r'^2)\frac{1}{R}(r'^2 + R^2 - 2Rr'\cos\gamma)^{-3/2} \tag{1.105}
$$

$\Rightarrow$ Gesamtladung auf Kugel = Gesamtbildladung:

$$
\begin{aligned}
q'_{\text{ges}} &= \int d\Omega R^2\sigma \\
&= \ldots \\
&= -\int\limits_V d^3\vec{x}'\rho(\vec{x}')\ \underbrace{\frac{R}{r'}}_{<1} \Rightarrow |q'_{\text{ges}}| < |q_{\text{ges}}|.
\end{aligned} \tag{1.106}
$$

1.6 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen

Ziel:
Verfahren zur Lösung der Laplace-Gleichung mit D-RB bzw. N-RB $\Delta\Phi = 0$

Laplace-Operator in verschiedenen Koordinaten:

- kartesisch: $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{3} \partial_n^2$,
- spärisch: $\Delta = \frac{1}{r}\partial_r^2 r + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta \sin\theta \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin\theta^2}\partial_\varphi^2$,
- zylindrisch: $\Delta = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}\partial_\varphi^2 + \partial_z^2$.

$\rightarrow$ Typische Form: $\Delta = f(\eta,\zeta)D(\xi) + D(\eta,\zeta)$, wobei $D(\xi)$ ein Differentialoperator abhängig von ξ ist, bzw. $D(\eta,\zeta)$ von η und ζ.

$\rightarrow$ Separationsansatz für spezielle Lösung von $\Delta\Phi = 0$:

$$\Phi(\xi,\eta,\zeta) = \phi(\xi)\cdot\psi(\eta,\zeta). \tag{1.107}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow 0 = \Delta\Phi &= \left[f(\eta,\zeta)D(\xi) + D(\eta,\zeta)\right]\phi(\xi)\phi(\eta,\zeta) \\ &= f(\eta,\zeta)\psi(\eta,\zeta)\cdot D(\xi)\phi(\xi) + \phi(\xi)\cdot D(\eta,\zeta)\psi(\eta,\zeta) \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{D(\xi)\phi(\xi)}{\phi(\xi)}}_{\text{Funktion von } \xi} &= -\underbrace{\frac{D(\eta,\zeta)\psi(\eta,\zeta)}{f(\eta,\zeta)\psi(\eta,\zeta)}}_{\text{Funktion von } \eta,\zeta} \stackrel{!}{=} \lambda = const. \end{aligned} \tag{1.108}$$

$\Rightarrow$ 1)

$$D(\xi)\phi(\xi) \stackrel{!}{=} \lambda\phi(\xi) \tag{1.109}$$

Eigenwertproblem des Differentialoperators $D(\xi)$! Durch Anpassung der Koordinaten an die Geometrie des Problems drücken sich die Randbedingungen oft durch Randwerte in $\phi(\xi)$ bzw. $\phi'(\xi)$ aus bei $\xi = a$, $\xi = b$.

2)

$$D(\eta,\zeta)\psi(\eta,\zeta) \stackrel{!}{=} -\lambda f(\eta,\zeta)\psi(\eta,\zeta) \tag{1.110}$$

für feste λ aus 1)!
$\rightarrow$ evtl. weitere Separation der Variablen η,ζ
$\rightarrow$ wiederum ein Eigenwertproblem sowie eine gewöhnliche DGL

Beispiel: $\Delta\Phi = 0$ in „Box “$0 \leq x_i \leq a_i$

Randbedingung: $\Phi(\vec{x})\Big|_{x_3=a_3} = f(x_1,x_2)$, sonst $\Phi \equiv 0$ auf restlichem Rand (allgemeiner Fall für vorgegebenes Φ auf Rand durch Superposition + Substitution)

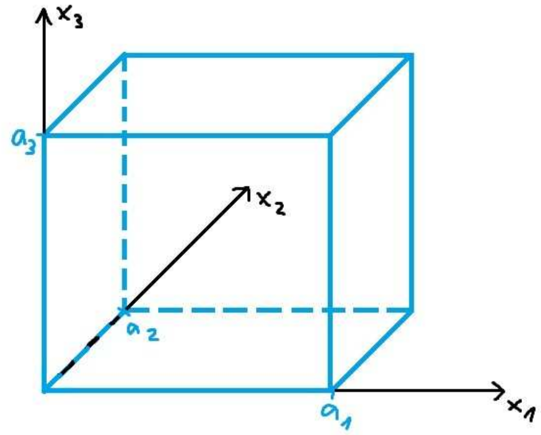

Abbildung 1.19: Box mit Kantenlängen a_i

Ansatz: $\Phi(\vec{x}) = \phi_1(x_1) \cdot \phi_2(x_2) \cdot \phi_3(x_3)$

$$\Rightarrow 0 = \Delta\Phi = \phi_1''(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3) + \phi_1(x_1)\phi_2''(x_2)\phi_3(x_3) + \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3''(x_3)$$
$$\Leftrightarrow 0 = \underbrace{\frac{\phi_1''(x_1)}{\phi_1(x_1)}}_{=:c_1=const} + \underbrace{\frac{\phi_2''(x_2)}{\phi_2(x_2)}}_{=:c_2=const.} + \underbrace{\frac{\phi_3''(x_3)}{\phi_3(x_3)}}_{=:c_3=const.} \quad \text{mit } c_1 + c_2 + c_3 = 0 \tag{1.111}$$

- $k = 1, 2$: $\phi_k'' = c_k\phi_k$ mit Randbedingung $\phi_k(0) = \phi_k(a_k) = 0$
  $\rightarrow$ Lösung:
  $$\phi_k^{(n_k)}(x_k) = \sin\left(n_k\pi\frac{x_k}{a_k}\right), \quad n_k = 1, 2, 3, ... \tag{1.112}$$
  d.h. $c_k = -\frac{\pi^2 n_k^2}{a_k^2}$
- $k = 3$: $\phi_3'' = c_3\phi_3, \;\; c_3 = -c_1 - c_2 = \frac{n_1^2\pi^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2\pi^2}{a_2^2} > 0$ vorgegeben.
  $\phi_3(0) = 0, \;\; \phi_3(a_3)$ wird später angepasst.
  $\rightarrow$ Lösungsansatz: $\phi_3(x_3) = e^{kx_3} \rightarrow k^2 = c_3, \;\; k = \pm\sqrt{c_3}$
  $$\phi_3(0) = 0 \Rightarrow \phi_3(x_3) \propto \left(e^{\sqrt{c_3}x_3} - e^{-\sqrt{c_3}x_3}\right) = 2\sinh(\sqrt{c_3}x_3) \tag{1.113}$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung:

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} A_{n_1,n_2}\phi_1^{(n_1)}(x_1)\phi_2^{(n_2)}(x_2)\phi_3^{(n_1,n_2)}(x_3) \tag{1.114}$$

Randbedingung bei $x_3 = a_3$:

$$f(x_1, x_2) \stackrel{!}{=} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} A_{n_1 n_2} \phi_1^{(n_1)}(x_1) \phi_2^{(n_2)}(x_2) \phi_3^{(n_1,n_2)}(a_3) \tag{1.115}$$

$\rightarrow$ zweifache Fourier-Reihe in x_1, x_2
Benutze Orthogonalität der Lösungen $\phi_k^{(n)}(x),\ k = 1, 2$:

$$\int_0^{a_k} dx\ \phi_k^{(n)}(x) \phi_k^{(m)}(x) = \frac{a_k}{2} \delta_{nm} \tag{1.116}$$

Randbedingung bei $x_3 = a_3$:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &\stackrel{!}{=} \sum_{n_1,n_2} A_{n_1,n_2} \phi_1^{(n_1)}(x_1) \phi_2^{(n_2)}(x_2) \phi_3^{(n_1,n_2)}(a_3) \\ \Rightarrow A_{n_1 n_2} &= \frac{4}{a_1 a_2} \cdot \frac{1}{\phi_3^{(n_1,n_2)}(a_3)} \cdot \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2} dx_2\ f(x_1, x_2) \phi_1^{(n_1)}(x_1) \phi_2^{(n_2)}(x_2) \end{aligned} \tag{1.117}$$

Resumé: 2 Eigenwertgleichungen (für ϕ_1, ϕ_2), 1 gewöhnliche DGL (für ϕ_3). Allgemeine Lösung durch Superposition der speziellen Lösungen, wobei die Allgemeinheit (bel. $f(x_1, x_2)$) durch Vollständigkeit des Systems $\phi_1^{(n_1)}(x_1)\phi_2^{(n_2)}(x_2)$ gesichert ist.

Math. Exkurs zum Eigenwertproblem von Differentialoperatoren

In der Physik sind derartige EW-Probleme typischer Weise vom *Sturm-Liouville-Typ*:
DGL:

$$-\frac{d}{dx} \left[\underbrace{p(x)}_{>0} \frac{dy}{dx} \right] + q(x) y = \lambda \underbrace{w(x)}_{>0} y, \quad -\infty < a \leq x \leq b < \infty, \tag{1.118}$$

wobei λ der gesuchte Eigenwert und y die gesuchte Eigenfunktion $y(x)$ aus $L^2([a, b])$ (= Hilbert-Raum der auf $[a, b]$ quadratintegrablen Funktionen), und p, q, w seien reelle Funktionen.

RB: 2 unabhängige (homogene) Linearkombinationen:

- $$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0), \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad (\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0). \end{aligned} \tag{1.119}$$

- alternativ für $p(a) = p(b)$: y und y' periodisch forsetzbar, d.h. $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$.

Eigenschaften der Lösungen:

- Eigenwerte: $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ... \to \infty$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$
- Eigenfunktionen: zu jedem λ_n gehört genau ein unabh. $y_n(x)$, wobei

$$\underbrace{(y_n, y_m)}_{\text{Skalarprodukt}} := \int_a^b dx\ w(x) y_n(x)^* y_m(x) = \delta_{nm}, \tag{1.120}$$

  d.h. $\{y_n\}$ ist Orthogonalsystem.

- $\{y_n\}$ ist *vollständig*, d.h. jede Funktion in $L^2([a,b])$ ist (im Mittel) darstellbar durch:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n = (y_n, f) = \int_a^b dx\ w(x) y_n(x)^* f(x), \tag{1.121}$$

  d.h. es gilt die *Vollständigkeitsrelation*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) y_n(z)^* w(z) = \delta(x - z) \tag{1.122}$$

  Beispiel von oben:

$$-y'' = \lambda y, \ \text{ d.h. } \ p(x) = w(x) = 1, \ q(x) \equiv 0, \ \ a = 0, \ \ y(a) = y(b) = 0,$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(n\pi \cdot \frac{x}{b}\right), \ \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \ \ n = 1, 2, 3, ... \tag{1.123}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{b} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \delta(x - y),$$

$$\int_0^b dx \frac{2}{b} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right) = \delta_{nm} \tag{1.124}$$

<u>Beweis der Aussagen $\to$ Funktionsanalysis</u>
<u>Teilbeweis:</u> (Aspekte, die analog zur Linearen Algebra sind)

- Umschreibung der DGL:

$$Dy(x) = \lambda y(x), \ \text{ wobei } D := \frac{1}{w(x)} \left[-\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \right] \tag{1.125}$$

- D ist symmetrisch (hermitesch), d.h. $(f, Dg) = (Df, g) \forall f, g$, d.h. $D = D^+$

$$(f, Dg) = \int_a^b dx\; w(x) f(x)^* Dg(x) = \int_a^b dx\; f(x)^* \left[-\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x)\right] g(x) \tag{1.126}$$

Nebenrechnung:

$$-f^* \frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} g = -\frac{d}{dx}\left[f^* p \frac{d}{dx} g\right] + \left(\frac{df^*}{dx}\right) p \frac{dg}{dx}. \tag{1.127}$$

$$(f, Dg) = \int_a^b dx\; \left[\frac{df^*(x)}{dx} p(x) \frac{dg(x)}{dx} + f^*(x) q(x) g(x)\right] - f^*(x) p(x) \frac{dg(x)}{dx}\Big|_a^b$$

nochmalige partielle Integration:

$$= (Df, g) + \underbrace{\left(\frac{df^*(x)}{dx} p(x) g(x) - f^*(x) p(x) \frac{dg(x)}{dx}\right)\Big|_a^b}_{=0 \text{ nach RB}} \tag{1.128}$$

- $\lambda \in \mathbb{R}$:
  Sei $Dy = \lambda y$ mit $(y, y) = 1$

$$\Rightarrow \lambda = (y, Dy) = (Dy, y)^* \underset{D=D^+}{=} (y, Dy)^* = \lambda^* \tag{1.129}$$

- Zur Eindeutigkeit: Seien $y(x)$ und $\overline{y}(x)$ beide Lösungen zur DGL $Dy = \lambda y$, $D\overline{y} = \lambda \overline{y}$.
  $\rightarrow$ Durch Umskalierung und der RB bei $x = a$ kann immer erreicht werden, dass

$$y(a) = \overline{y}(a), \;\; y'(a) = \overline{y}'(a) \tag{1.130}$$

  $\Rightarrow y(x) \equiv \overline{y}(x)$ nach Eindeutigkeitssatz zu linearen DGL 2. Ordnung

- Orthogonalität:

$$\lambda_m \cdot (y_n, y_m) = (y_n, Dy_m) = (Dy_n, y_m) = \lambda_n^* (y_n, y_m) = \lambda_n (y_n, y_m) \tag{1.131}$$

  d. h. $(\lambda_m - \lambda_n) \cdot (y_n, y_m) = 0 \Rightarrow (y_n, y_m) = 0 \;\; (\forall \lambda_n \neq \lambda_m)$
  $\Rightarrow$ oBdA: $(y_n, y_m) = \delta_{nm}$.

- Entwicklung von Funktionen: (Konvergenzverhalten nicht-trivial!)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m y_m(x) \quad \text{sei angenommen.} \\ \Rightarrow (y_n, f) &= \sum_{m=1}^{\infty} (y_n, y_m) c_m = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \delta_{nm} = c_n. \end{aligned} \tag{1.132}$$

Verallgemeinerung:

- Falls $a \to -\infty \vee b \to \infty$ oder p, q, w singulär, kann der Bereich für λ kontinuierliche Teile enthalten und $y_\lambda(x)$ ist meist nicht mehr normierbar.
- Singuläre Randstellen: $p(a) = 0$ oder $p(b) = 0$.
  $\to$ Geeignete Randbedingungen sind dann z.B.: $y(a) \stackrel{!}{=}$ endlich, $p(x)y'(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ (analog für b).

Beispiel:
Fourier-Reihe und Fourier-Integral
DGL:

$$y'' + k^2 y = 0, \quad -a/2 \le x \le a/2 \tag{1.133}$$

RB: $y(-a/2) = y(a/2),\ y'(-a/2) = y'(a/2)$ Periodizität!
Lösung:

$$y(x) = e^{ikx},\ e^{-ika/2} \stackrel{!}{=} e^{ika/2},\ \text{d.h.} e^{ika} = 1 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{a} \cdot n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{1.134}$$

Was passiert bei $a \to \infty$?

$a < \infty$:

- $k = 2\pi \frac{n}{a},\ n \in \mathbb{Z}$ (diskret)
- $y_n(x) = e^{\frac{2\pi i n x}{a}}$
- $(f, g) = \int\limits_{-a/2}^{a/2} dx\ f(x)^* g(x)$
- $(y_n, y_m) = a\delta_{nm}$
- $f(x) = \frac{1}{a} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f_n y_n(x)$,
  $f_n = (y_n, f) = \int\limits_{-a/2}^{a/2} dx\ e^{\frac{-i2\pi n x}{a}} \cdot f(x)$
- $\frac{1}{a} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} y_n(x) y_n(x')^* = \delta(x - x')$

$a \to \infty$

- $k \in \mathbb{R}$ (kontinuierlich)
- $y_k(x) = e^{ikx}$
- $(f, g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)^* g(x)$
- $(y_k, y_{k'}) = 2\pi\delta(k - k')$
- $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\ \tilde{f}(k) e^{ikx}$,
  $\tilde{f}(k) = (y_k, f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ikx} f(x)$
- $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ik(x-x')} = \delta(x - x')$

1.7 Randwertproblem mit Zylindersmmetrie (= Drehsymmetrie um feste Achse)

Wähle x_3-Achse als Symmetrieachse!
$\to$ keine φ-Abhängigkeit in Polarkoordinaten

Laplace-Gleichungen und Separationsansatz

$$0 = \Delta\Phi = \left[\frac{1}{r}\partial_r^2 r + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta \sin\theta \partial_\theta + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\partial_\varphi^2}_{\to 0} \right] \Phi(r,\theta) \tag{1.135}$$

Ansatz:

$$\Phi(r,\theta) = \frac{U(r)}{r}\tilde{P}(\theta) \tag{1.136}$$

$$\begin{aligned} &\to \frac{1}{r}\partial_r^2 r \left(\frac{U(r)}{r}\right) \tilde{P}(\theta) + \frac{U(r)}{r^3 \sin\theta}\partial_\theta \sin\theta \partial_\theta \tilde{P}(\theta) = 0, \\ &\frac{r^2}{U(r)}\partial_r^2 U(r) = -\frac{\partial_\theta \sin\theta \partial_\theta \tilde{P}(\theta)}{\sin\theta \tilde{P}(\theta)} \stackrel{!}{=} const =: \ell(\ell+1). \end{aligned} \tag{1.137}$$

(1) EW-Gleichung für $\tilde{P}(\theta)$:

$$\frac{1}{\sin\theta} d_\theta \sin\theta d_\theta \tilde{P}(\theta) + \ell(\ell+1)\tilde{P}(\theta) = 0 \tag{1.138}$$

Umparametrisierung: $x := \cos\theta, d_\theta = \frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d}{dx} = -\sin\theta \frac{d}{dx}$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \underbrace{\sin^2\theta}_{=1-x^2} \frac{d}{dx} P(x) + \ell(\ell+1)P(x) = 0, \qquad P(x) = P(\cos\theta) = \tilde{P}(\theta). \tag{1.139}$$

(*gewöhnliche Legendre'sche DGL*)
$\to$ Suche allgemeine Lösung, die für $-1 \leq x \leq +1$ regulär ist!
$\to$ Festlegung der ℓ-Werte mit Lösungen $P_\ell(x)$.

(2) Radialgleichung:

$$r^2 U''(r) - \ell(\ell+1)U(r) = 0 \tag{1.140}$$

$\to$ lineare gewöhnliche DGL. 2. Ordnung mit 2 linear unabhängigen Lösungen (z.B. durch Ansatz: $u(r) = r^\alpha$):

$$U_1(r) = r^{\ell+1}, \;\; U_2(r) = r^{-\ell}. \tag{1.141}$$

Legendre-Polynome als Lösung von Gl. (1.139):
Potenzreihen(PR)-Ansatz:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{1.142}$$

da $P(x)$ in Umgebung von $x = 0$ regulär sein muss. Um Gl. (1.139) zu erfüllen, muss gelten:

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \ell(\ell+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$
$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}}_{=\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}(m+2)(m+1)x^m} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n+1)x^n + \ell(\ell+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \tag{1.143}$$

PR = eindeutig. $\overset{!}{=} 0 \Rightarrow$ Alle Koeffizienten zu $x^n \overset{!}{=} 0$.

$$0 = a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n(-n(n+1) + \ell(\ell+1)),$$
$$a_{n+2} = a_n \cdot \frac{n(n+1) - \ell(\ell+1)}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{wobei } (a_0, a_1) = \text{frei wählbar.} \tag{1.144}$$

$\rightarrow$ 2 linear unabhängige Lösungen:

- $P^{(\text{even})}(x)$ aus $(a_0, a_1) = (1, 0)$,
- $P^{(\text{odd})}(x)$ aus $(a_0, a_1) = (0, 1)$.

Konvergenzverhalten gemäß der a_n für $n \to \infty$:

- Konvergenz für $|x| < 1$,
- $\lim_{x \to +1} P^{(\text{even/odd})} = +\infty$,
- $\lim_{x \to -1} P^{(\text{even/odd})} = \pm\infty$,

z.B. nach Kriterium von Gauß bzw. Raabe
$\Rightarrow$ keine Linearkombination von $P^{(\text{even})}$ und $P^{(\text{odd})}$ ist endlich(=regulär) auf ganz $[-1, 1]$!

Ausweg:
Die Reihe muss abbrechen! D.h. $\exists n \in \mathbb{N}_0$, so dass $n(n+1) - \ell(\ell+1) = 0$. $\Rightarrow \ell \in \mathbb{N}_0$.
Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_0$ existiert genau ein Polynom $P_\ell(x)$ von Grad ℓ, das eine akzeptable Lösung von Gl. (1.139) liefert.
Beh:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \cdot \frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2 - 1)^\ell \tag{1.145}$$

(Rodrigues'-Formel)

<u>Beweis:</u>

- Obige Überlegung zeigt für $\ell \in \mathbb{N}_0$:
  Gl. (1.139) hat eine polynomiale Lösung, sowie eine Lösung, die für $|x| \to 1$ divergiert. Also ist $P_\ell(x)$ bis auf Normierung eindeutig.

- Nachweis, dass $P_\ell(x)$ die Gl. (1.139) erfüllt:

  Allgemein gilt, dass
  $$\frac{d^\ell}{dx^\ell}(f \cdot g) = \sum_{n=0}^{\ell} \binom{\ell}{n} f^{(n)} g^{(\ell-n)}. \tag{1.146}$$
  Weiter ist
  $$(1-x^2)\frac{d}{dx}(x^2-1)^\ell + 2\ell x(x^2-1)^\ell = 0. \tag{1.147}$$
  Wendet man nun $\frac{d^\ell}{dx^\ell}$ an, so erhält man, dass
  $$\begin{aligned}
  &(1-x^2)\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}(x^2-1)^\ell - 2x\binom{\ell}{1}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \\
  &-2\binom{\ell}{2}\frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}(x^2-1)^\ell + 2\ell x\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \\
  &+2\ell\binom{\ell}{1}\frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}(x^2-1)^\ell = 0, \\
  &\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}(x^2-1)^\ell = 0.
  \end{aligned} \tag{1.148}$$
  $\Rightarrow$ nach Anwendung von $\frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d}{dx}$ erhält man Gl. (1.139)!
  □

Eigenschaften der $P_\ell(x)$:

- $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), \ldots.$
- $P_\ell(1) = 1,$
- $P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x),$
- Orthogonalität:
  $$\int_{-1}^{1} dx\ P_\ell(x)P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1}\cdot\delta_{\ell\ell'}. \tag{1.149}$$
  (Nachweis analog zum allgemeinen SL-Problem, Vorfaktoren explizit ausrechnen.)

- $\{P_\ell(x)\}_{\ell=0}^\infty$ = vollständiges Funktionensystem für $x \in [-1, 1]$ (SL-Eigenfunktionensystem, aber auch klar, da $\{x^\ell\}_{\ell=0}^\infty$ vollständig).
- *Erzeugende Funktion* :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x) t^\ell, \quad |t| < 1. \tag{1.150}$$

(Beweis später!)

- Verschiedene Rekursionen (DGL, Rodrigues, Erz. Funktion), z.B.:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)P'_\ell &= (\ell + 1)[P_{\ell+1} - xP_\ell], \\ (x^2 - 1)P'_{\ell+1} &= (\ell + 1)[xP_{\ell+1} - P_\ell], \\ &\text{etc...} \end{aligned} \tag{1.151}$$

<u>Allgemeine Lösung der Randwertaufgabe (RWA) mit Zylindersymmetrie:</u>

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1} \right) P_\ell(\cos\theta), \tag{1.152}$$

dabei sind A_ℓ und B_ℓ freie Konstanten, die durch die RB des phys. Problems festgelegt werden. Die Terme mit A_ℓ sind regulär bei $r \to 0$, die mit B_ℓ bei $r \to \infty$.
Relevanter Bereich für r: $a \leq r \leq b$. Falls $a = 0$, so folgt $B_\ell = 0 \forall \ell \in \mathbb{N}_0$, falls $b = \infty$, so folgt $A_\ell = 0, \forall \ell \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ Falls $a = 0,\ b = \infty$, so folgt $\Phi = const = A_0$.

Folgerung: Falls $\Phi(r, \theta = 0)$ (Potential auf d. Symmetrieachse), also

$$\Phi(r, \theta = 0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}) \tag{1.153}$$

<u>als Reihe</u> bekannt ist (d.h. Kenntnis von A_ℓ und B_ℓ), dann kann $\Phi(r, \theta)$ vollständig erschlossen werden.

<u>Anwendung: Punktladung</u>
Betrachte Punktladung auf der x_3-Achse am Punkt $\vec{a}$ und einen Punkt $\vec{x}$ im Raum mit Winkel zur x_3-Achse θ.
Lösung bekannt:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{x}^2 - 2\vec{a}\vec{x} + \vec{a}^2)^{1/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}}. \end{aligned} \tag{1.154}$$

Allgemein:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1} \right). \tag{1.155}$$

Betrachte Lösung für Punktladung auf x_3-Achse (d.h. $\theta = 0$):

$$\begin{aligned}\Phi(r,0) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\begin{cases}\frac{1}{a-r} & a > r,\\ \frac{1}{r-a} & r > a,\end{cases}\\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\begin{cases}\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{r}{a}} = \frac{1}{a}\sum\limits_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell}, \\ \frac{1}{r}\frac{1}{1-\frac{a}{r}} = \frac{1}{r}\sum\limits_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} = \frac{1}{a}\sum\limits_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{-\ell-1}\end{cases},\end{aligned} \tag{1.156}$$

$$\Rightarrow \Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\begin{cases}\frac{1}{a}\sum\limits_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell}P_\ell(\cos\theta), & a > r,\\ \frac{1}{a}\sum\limits_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{-\ell-1}P_\ell(\cos\theta), & a < r.\end{cases} \tag{1.157}$$

$\rightarrow$ Beweis für Erzeugende Funktion der $P_\ell(x)$ durch $a = 1$ und $r = t$, $|t| < 1$

<u>Beispiel: Leitende Kugel im homogenen äußeren $\vec{E}$-Feld</u>

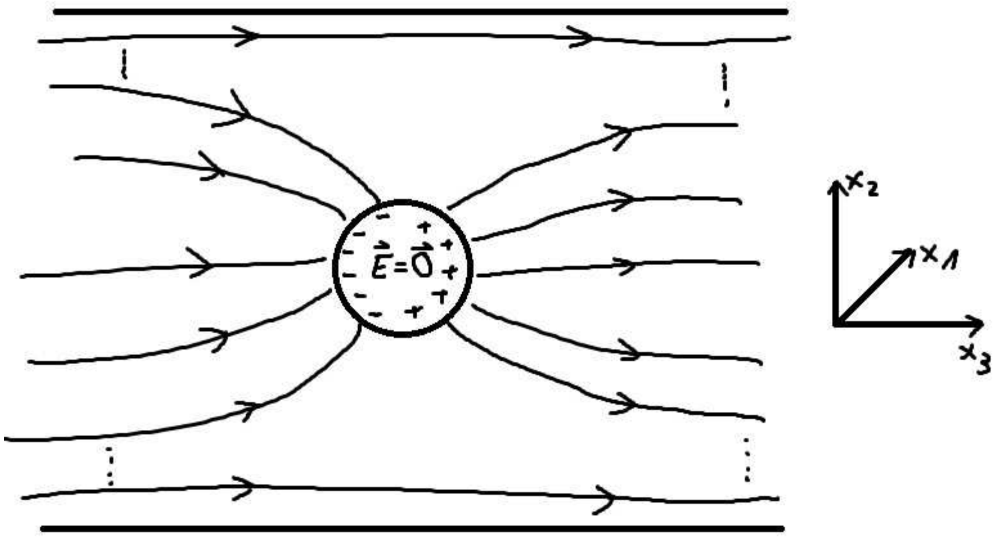

Abbildung 1.20: Die x_3-Achse wird auf Grund der Symmetrie des Problems in Richtung des äußeren Feldes gelegt.

Randbedingungen:

(1) Potential in Kugel:

$$\Phi(r \le a, \cos\theta) = \phi_0 = const. \tag{1.158}$$

(2) Verhälten für $r \to \infty$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \underset{r\to\infty}{\to} \vec{E}_0 = E_0\vec{e}_z. \tag{1.159}$$

Somit:

$$\Phi(r,\theta) \underset{r\to\infty}{\to} -E_0 x_3 = -E_0 r \underbrace{\cos\theta}_{=P_1(\cos\theta)}. \tag{1.160}$$

Allgemeiner Ansatz:

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell r^\ell + B r^{-\ell-1}) P_\ell(\cos\theta). \tag{1.161}$$

Wegen (2) gilt: $\Phi(r,\theta) \underset{t\to\infty}{\to} -E_0 r P_1(\cos\theta)$.
$\Rightarrow A_1 = -E_0,\ A_\ell = 0\ \forall \ell \neq 1.$

Ergänzung:
Soll $\Phi(r,\theta) \underset{r\to\infty}{\to} \Phi_0(\theta)$ gelten,

$$\int_{-1}^{1} d\cos(\theta)\ P_\ell(\cos\theta)\Phi_0(\theta) = \sum_{\ell'=0}^{\infty} A_{\ell'} r^{\ell'} \underbrace{\int_{-1}^{1} d\cos\theta\ P_{\ell'}(\cos\theta) P_\ell(\cos\theta)}_{=\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}},$$

$$A_\ell = \frac{2\ell+1}{2}\frac{1}{r^\ell}\int_{-1}^{1} d\cos\theta P_\ell(\cos\theta)\Phi_0(\theta).$$

Aus (2) folgt:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell r^{-\ell-1} P_\ell(\cos\theta) - E_1 r P_1(\cos\theta). \tag{1.162}$$

Aus (1) folgt:

$$\Phi(a,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell a^{-\ell-1} P_\ell(\cos\theta) - E_1 a P_1(\cos\theta) \stackrel{!}{=} \Phi_0 P_0(\cos\theta) \tag{1.163}$$

Somit ist für $\ell = 0$: $B_0 = a\Phi_0$ und für $\ell = 1$: $0 = B_1 a^{-2} - E_0 a$. $B_\ell = 0\ \forall \ell > 1$.

$$\Rightarrow B_0 = \Phi_0 a,\ B_1 = E_0 a^3,\ B_\ell = 0\ \forall \ell > 1 \tag{1.164}$$

$$\Rightarrow \Phi(r,\theta) = \underbrace{-E_0 r\cos\theta}_{\substack{\text{vorgegebenes,}\\ \text{homogenes,}\\ \text{äußeres Feld}}} + \underbrace{\Phi_0 \frac{a}{r}}_{\substack{\text{Feld der Gesamtladung}\\ \text{auf der Kugel}\\ \text{bei isotroper}\\ \text{Verteilung}}} + \underbrace{E_0 \frac{a^3}{r^2}\cos\theta}_{\substack{\text{Dipolfeld der In-}\\ \text{fluenzladungen}}} . \tag{1.165}$$

$\vec{E}$-Feld auf Kugeloberfläche:

$$\begin{aligned}\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi\Big|_{r=a} &= -\left(\vec{e}_r\partial_r + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta\partial_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi\partial_\varphi\right)\Phi\Big|_{r=a} \\ &= -\vec{e}_r\left(-E_0\cos\theta - \Phi_0\frac{a}{r^2} - 2E_0\frac{a^3}{r^3}\cos\theta\right) - \frac{1}{r}\vec{e}_\theta\left(E_0 r\sin\theta - E_0\frac{a^3}{r^2}\sin\theta\right)\Big|_{r=a} \\ &= \vec{e}_r\left(3E_0\cos\theta + \frac{\Phi_0}{a}\right) \perp \text{Kugeloberfläche.}\end{aligned} \tag{1.166}$$

Flächenladungsdichte:

$$\sigma = \epsilon_0 E_r\Big|_{r=a} = \epsilon_0\cdot 3E_0\cos\theta + \frac{\Phi_0\epsilon_0}{a}. \tag{1.167}$$

Gesamtladung der Kugel:

$$q = a^2\int d\Omega\,\sigma = 4\pi\epsilon_0\Phi_0 a. \tag{1.168}$$

1.8 Randwertproblem in Kugelkoordinaten

Laplace-Gleichung (Kugelkoordinaten):

$$0 = \Delta\Phi = \left[\frac{1}{r}\partial_r^2 r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\sin\theta\partial_\theta + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\varphi^2\right]\Phi(r,\theta,\varphi). \tag{1.169}$$

Separationsansatz:

$$\Phi = \frac{U(r)}{r}\cdot\tilde{P}(\theta)Q(\varphi). \tag{1.170}$$

Einsetzen in $\Delta\Phi = 0$, durchmultilizieren mit $\frac{r^3}{U\tilde{P}Q}$:

$$\Rightarrow \underbrace{r^2\frac{U''}{U}}_{\substack{\text{(Funktion von } r)\\ \overset{!}{=}\, const.}} + \underbrace{\frac{1}{\tilde{P}\sin\theta}\partial_\theta\sin\theta\partial_\theta\tilde{P} + \frac{1}{\sin^2\theta}\underbrace{\frac{Q''}{Q}}_{\substack{\text{(Funktion von } \varphi)\\ \overset{!}{=}\, const =: -m^2}}}_{\text{(Funktion von } \theta)\,\overset{!}{=}\, const. = -\ell(\ell+1)} = 0 \tag{1.171}$$

Wir erhalten somit 3 Gleichungen für $U, \tilde{P}, Q$:

(1) $$Q'' + m^2 Q = 0, \;\; Q(\varphi) = Q(\varphi + 2\pi). \\ \Rightarrow Q(\varphi) = 1 \;\; (m = 0) \vee \; \cos(m\varphi) \vee \sin(m\varphi), \;\; m = 1, 2, 3.... \tag{1.172}$$

Eleganter:

$$Q_m(\varphi) = e^{im\varphi}, \;\; m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \tag{1.173}$$

(2) $$\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta \partial_\theta \tilde{P} - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\tilde{P} = -\ell(\ell+1)\tilde{P}. \tag{1.174}$$

mit den neuen Variablen $x = \cos\theta, P(x) = P(\cos\theta) = \tilde{P}(\theta)$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}P + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P = 0. \tag{1.175}$$

(*Verallgemeinerte Legendre-DGL*)

(3) Radialgleichung:

$$r^2 U'' - \ell(\ell+1)U = 0. \tag{1.176}$$

$$\Rightarrow U_1(r) = r^{\ell+1}, \quad U_2(r) = r^{-\ell} \tag{1.177}$$

(wie im vorigen Abschnitt)

1.8.1 Die zugeordneten Legendre-Funktionen als Lösung von Gl. (1.175)

1. Schritt: Abspaltung des Randverhaltens bei singulären Punkten $x = \pm 1$

$x \to +1$:

$$(1-x^2) = (1-x)(1+x) \sim 2(1-x). \tag{1.178}$$

$\to$DGL:

$$\begin{aligned} 2\frac{d}{dx}(1-x)\frac{d}{dx}P - \frac{m^2}{2(1-x)}P \sim 0 \\ \Leftrightarrow (1-x)\frac{d}{dx}(1-x)\frac{d}{dx}P \sim \frac{m^2}{4}P \end{aligned} \tag{1.179}$$

$\to$Ansatz:

$$P = (1-x)^\alpha \to \alpha^2(1-x)^\alpha \overset{!}{=} \frac{m^2}{4}(1-x)^\alpha, \;\; \alpha = \pm\frac{m}{2} \tag{1.180}$$

$\to$ $$P \sim (1-x)^{|m|/2}. \tag{1.181}$$

Lösung zu $\alpha = -\frac{|m|}{2}$ ist nicht quadratintegrabel für $m \neq 0$!

$x \to -1$ analog:

$$P \sim (1+x)^{|m|/2}. \tag{1.182}$$

<u>2. Schritt:</u>
Ansatz:

$$P(x) = (1 - x^2)^{|m|/2} \cdot \overline{P}(x). \tag{1.183}$$

$\overline{P}(x)$ soll regulär sein in $[-1, 1] \to$ DGL für $\overline{P}(x)$:

$$\frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{d}{dx}\overline{P} - 2|m|x\overline{P}' + \big(\ell(\ell+1) - |m|(|m|+1)\big)\,\overline{P} = 0. \tag{1.184}$$

<u>3. Schritt: PR-Ansatz für $\overline{P}$:</u>

$$\overline{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1.185}$$

$\to$ analog zu P_ℓ:

$$a_{n+2} = a_n \cdot \frac{(|m|+n)(|m|+n+1) - \ell(\ell+1)}{(n+2)(n+1)}. \tag{1.186}$$

$\to$ Reihe muss abbrechen, sonst keine reguläre Lösung!
$\Rightarrow \ell = |m| + n, ...n = 0, 1, 2, 3, ...$ für festes $|m| = 0, 1, 2, ...$
bzw. $m = -\ell, ..., \ell$ für festes $\ell = 0, 1, 2....$

<u>4. Schritt</u>

$$P_\ell^m(x) := \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}(1 - x^2)^{m/2}\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2 - 1)^\ell. \tag{1.187}$$

(*zugeordnete Legendre-Funktionen*)
$\to$ Nachweis der DGL durch explizites Einsetzen analog zu $P_\ell(x)$; Nachweis der Eindeutigkeit (bis auf Normierung) ebenfalls analog:

- Ansatz ähnlich wie oben:

$$P(x) =: (1 - x^2)^{\frac{m}{2}}\hat{P}(x) \cdot (-1)^m 2^\ell \cdot \ell!. \tag{1.188}$$

  $\to$ Einsetzen in DGL liefert:

$$\frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{d}{dx}\hat{P}(x) - 2mx\hat{P}'(x) + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1)\big]\,\hat{P}(x) = 0. \tag{1.189}$$

- Lösung von Gl. (1.189) für $m = -\ell$ durch $\hat{P}_\ell^{-\ell} = (x^2 - 1)^\ell$.
  Verifikation:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{d}{dx}(x^2 - 1)^\ell + 2\ell x\frac{d}{dx}(x^2 - 1)^\ell + \big[(\ell(\cancel{\ell} + 1) + \ell(\cancel{-\ell} + 1)\big]\,(x^2 - 1)^\ell \\ &= \frac{d}{dx}(-2\ell x)(x^2 - 1)^\ell + 4\ell^2 x^2 (x^2 - 1)^{\ell-1} + 2\ell(x^2 - 1)^\ell \\ &= \cancel{-2\ell(x^2 - 1)^\ell} - \cancel{(2\ell x)^2 (x^2 - 1)^{\ell-1}} + \cancel{4\ell^2 x^2 (x^2 - 1)^{\ell-1}} + \cancel{2\ell(x^2 - 1)^\ell} = 0 \end{aligned} \tag{1.190}$$

- Beweis von Gl. (1.189) durch Induktion $m \to m+1$:

  Sei $\hat{P}_\ell^m(x) = \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell$ eine Lösung von Gl. (1.189).
  $\to$ Nachweis von $\hat{P}_\ell^{m+1}(x)$:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dx}\left[(1.189)\right], \quad \text{beachte:} \hat{P}_\ell^{m+1}(x) = \frac{d}{dx}\hat{P}_\ell^m(x).\\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(1-x^2)\right]\frac{d}{dx}\hat{P}_\ell^m(x) + \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\hat{P}_\ell^m(x)\\
&\quad - 2m\hat{P}_\ell^{m\prime}(x) - 2mx\frac{d}{dx}\hat{P}_\ell^{m\prime}(x) + \left[\ell(\ell+1) - m(m+1)\right]\frac{d}{dx}\hat{P}_\ell^m(x)\\
&= -2\frac{d}{dx}x\hat{P}_\ell^{m+1}(x) + \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}\hat{P}_\ell^{m+1}(x) - 2m\hat{P}_\ell^{m+1}(x)\\
&\quad - 2mx\hat{P}_\ell^{m+1\prime}(x) + \left[\ell(\ell+1) - m(m+1)\right]\hat{P}_\ell^{m+1}(x)\\
&= \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}\hat{P}_\ell^{m+1}(x) - 2(m+1)\hat{P}_\ell^{m+1}(x) - 2(m+1)x\hat{P}_\ell^{m+1\prime}(x)\\
&\quad + \left[\ell(\ell+1) - m(m+1)\right]\hat{P}_\ell^{m+1}(x)\\
&= \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}\hat{P}_\ell^{m+1}(x) - 2(m+1)x\hat{P}_\ell^{m+1\prime}(x)\\
&\quad + \left[\ell(\ell+1) - (m+1)(m+2)\right]\hat{P}_\ell^{m+1}(x).\\
&= (1.189) \text{ für } \hat{P}_\ell^{m+1}(x)!
\end{aligned} \tag{1.191}$$

  $\square$

Eigenschaften der $P_\ell^m(x)$:

- $P_\ell^0(x) = P_\ell(x)$, $P_\ell^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x), m \geq 0.$
- $P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(x)$

$$\Rightarrow P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{|m|/2} \cdot \begin{pmatrix}\text{Polynom in } x\\ \text{vom Grad } \ell - |m|\end{pmatrix}. \tag{1.192}$$

- Orthogonalität:

$$\int_{-1}^{+1} dx\, P_\ell^m(x)P_{\ell'}^m(x) = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'}. \tag{1.193}$$

Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$

$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi) := \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\cdot\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\varphi}, \quad \ell = 0,1,2,..., \quad m = -\ell, -\ell+1, ..., +\ell. \tag{1.194}$$

Eigenschaften:

- Explizit:

$$
\begin{aligned}
Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\
Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \underbrace{\sin\theta e^{i\varphi}}_{=\frac{x_1+ix_2}{r}}, \\
Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \underbrace{\cos\theta}_{=x_3/r}, \\
Y_{22} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \underbrace{\sin^2\theta e^{2i\varphi}}_{=\frac{x_1^2-x_2^2+2ix_1x_2}{r^2}}, \\
Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \underbrace{\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}}_{=\frac{(x_1+ix_2)x_3}{r^2}}, \\
Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{1}{2} \underbrace{(3\cos^2\theta - 1)}_{=\frac{3x_3^2-1}{r^2}}, \quad \ldots
\end{aligned}
\tag{1.195}
$$

- $$Y_{\ell,-m}(\theta,\varphi) = (-1)^m Y_{\ell m}(\theta,\varphi)^*, \tag{1.196}$$

- $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d\cos\theta\, Y_{\ell' m'}(\theta,\varphi)^* Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}, \tag{1.197}$$

- $$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta',\varphi')^* Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \delta(\varphi-\varphi')\delta(\cos\theta - \cos\theta'), \tag{1.198}$$

- Additionstheorem (Beweis siehe Literatur):

$$P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}\underbrace{(\theta',\varphi')^*}_{\text{Richtung } \vec{x}'} Y_{\ell m}\underbrace{(\theta,\varphi)}_{\vec{x}}, \quad \gamma = \sphericalangle(\vec{x},\vec{x}'). \tag{1.199}$$

<u>Allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung</u>

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left[A_{\ell m} r^\ell + B_{\ell m} r^{-\ell-1}\right] Y_{\ell m}(\theta,\varphi). \tag{1.200}$$

Die Konstanten $A_{\ell m}$ und $B_{\ell m}$ sind aus den Randbedingungen zu bestimmen.

1.9 Multipolentwicklung

<u>Aufgabe:</u>
Löse Poisson-/Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$ für vorgegebenes $\rho(\vec{x})$, wobei $\vec{x} \in V$ =beschränkt mit RB $\Phi \underset{r\to\infty}{\to} 0$.

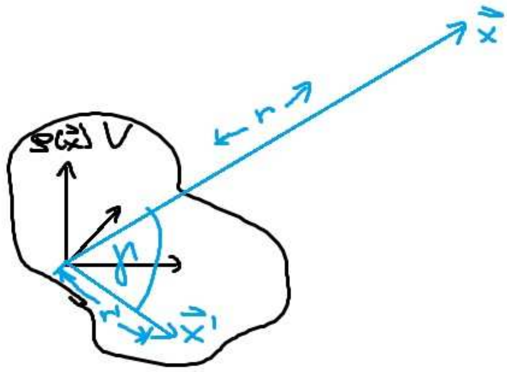

Abbildung 1.21:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}, \quad r = |\vec{x}|, \; r' = |\vec{x}'| \tag{1.201}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} &= (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r}\underbrace{\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma\right]^{-1/2}}_{\text{Erzeugende Funktion der } P_\ell(\cos\gamma)}, \quad \text{wobei } t = r'/r < 1 \text{ für hinreichend große } r! \\ &= \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^\ell P_\ell(\cos\gamma), \quad \text{verwende Additionstheorem!} \end{aligned} \tag{1.202}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3\vec{x}'\ \rho(\vec{x}')\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell}\cdot\frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_{\ell m}(\theta',\varphi')^*Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\\ &= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r^{-\ell-1}}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}q_{\ell m}Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\end{aligned} \tag{1.203}$$

mit

$$q_{\ell m} := \int_V d^3\vec{x}'\ \rho(\vec{x}')r'^{\ell}Y_{\ell m}(\theta',\varphi')^*, \tag{1.204}$$

(*sphärische Multipolmomente*)

$$q_{\ell,-m} = (-1)^m q^*_{\ell m}. \tag{1.205}$$

Zusammenhang mit kart. Koordinaten

Taylor-Entwicklung:

$$f(\vec{x}') = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\vec{x}'\cdot\vec{\nabla}\right)^n f(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=0} = f(\vec{0}) + \vec{x}'\cdot\vec{\nabla}f(\vec{0}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}x'_i x'_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\vec{0}) + \mathcal{O}({x'_i}^3), \tag{1.206}$$

$$\begin{aligned}f(\vec{x}') &= \frac{1}{|\vec{a}-\vec{x}'|} = \left(\vec{a}^2+\vec{x}'^2-2\vec{a}\vec{x}'\right)^{-1/2}\\ &= \frac{1}{|\vec{a}|} + \vec{x}'\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}x'_i x'_j\cdot\frac{3a_ia_j-|\vec{a}|^2\delta_{ij}}{|\vec{a}|^5} + \mathcal{O}(|\vec{a}|^{-4}).\end{aligned} \tag{1.207}$$

Anwendung auf $|\vec{x}-\vec{x}'|^{-1}$, d.h. $\vec{a}=\vec{x},\ |\vec{a}|=r$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Phi(\vec{x}) &= \int_V d^3\vec{x}'\ \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\\ &= \int d^3\vec{x}'\ \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} + \vec{x}'\cdot\frac{\vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i,j=1}^{3}x'_i x'_j}_{\to\sum_{i,j}\left(x'_ix'_j-(1/3)r^2\delta_{ij}\right)}\frac{3x_ix_j+r^2\delta_{ij}}{r^5} + \ldots\right]\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{r^3} + \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}Q_{ij}\frac{3x_ix_j-r^2\delta_{ij}}{r^5} + \ldots\right],\end{aligned} \tag{1.208}$$

wobei

$$
\begin{aligned}
q &= \int\limits_V d^3\vec{x}'\rho(\vec{x}') && = \text{Gesamtladung}, \\
\vec{p} &= \int\limits_V d^3\vec{x}'\rho(\vec{x}')\vec{x}' && = \text{el. Dipolmoment}, \\
Q_{ij} &= \int\limits_V d^3\vec{x}'\rho(\vec{x}')\left(3x_ix_i - r'^2\delta_{ij}\right) && = \text{el. Quadrupolmoment},
\end{aligned}
\tag{1.209}
$$

$$
Q_{ij} = Q_{ji}, \quad \mathrm{Tr}\{Q\} = \sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = 0. \tag{1.210}
$$

Zusammenhang mit $q_{\ell m}$:

$$
\begin{aligned}
q_{00} &= \frac{q}{\sqrt{4\pi}}, \\
q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_1 - ip_2), \\
q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_3, \ldots. \\
q_{22} &= \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(Q_{11} - Q_{22} - 2iQ_{12}), \\
q_{21} &= -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(Q_{13} - iQ_{23}), \\
q_{20} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}Q_{33}, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{1.211}
$$

Eigenschaften von Multipolmomenten:

- $q_{\ell m}$ hängen von Koordinatenursprung ab für $\ell > 0$.
- $q_{\ell m}$ ist translationsinvariant, falls $q_{\ell' m'} = 0$ für alle $\ell' < \ell$.
- $q_{\ell m}$ ist Tensor vom Rang ℓ (in sphärischer Darstellung),
  z.B.: Koordinatendrehung:

$$
\underline{\hat{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = D\underline{x} \tag{1.212}
$$

($\underline{x}$: Schreibweise für Koordinatentupel, D: Drehmatrix , d.h. $D^{-1} = D^T$)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \hat{q} = q, \\
\hat{p}_i &= \sum_{j=1}^{3} D_{ij} p_j, \quad \underline{\hat{p}} = D\underline{p}, \\
\hat{Q}_{ij} &= \sum_{k,\ell=1}^{3} D_{ik} D_{j\ell} Q_{k\ell}, \quad \hat{Q} = DQD^T.
\end{aligned} \tag{1.213}$$

<u>Beispiele: Anordnungen von Punktladungen</u>

(1) 1 Ladung q am Ort $\vec{a}$:

$$\vec{p} = q\vec{a}, \tag{1.214}$$

$$Q_{ij} = q\left(3a_i a_j - a^2 \delta_{ij}\right). \tag{1.215}$$

(2) 2 Ladungen: $+q$ und $-q$ mit Verbindungsvektor $\vec{a}$:

$$q_{\text{ges}} = 0, \tag{1.216}$$

$$\vec{p} = q\vec{a}, \tag{1.217}$$

$$Q_{ij} \neq 0, \ \text{ falls } \vec{p} = 0. \tag{1.218}$$

(3) 4 Ladungen: Angeordnet im Quadrat, mit jew Abstand a, gleichnamige Ladungen liegen auf einer Diagonalen, $x_1 x_2$-Ebene liege in der Ebene des Quadrates:

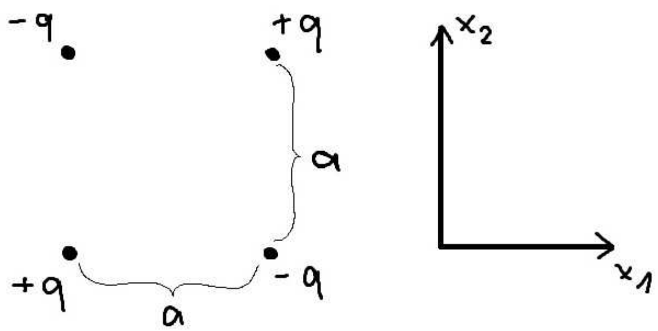

Abbildung 1.22: Illustration zu Beispiel Nr. 3: Vier Punktladungen, angeordnet als Quadrat in der x_1-x_2-Ebene mit Kantenlänge a.

$$q_{\text{ges}} = 0, \tag{1.219}$$

$$\vec{p} = \vec{0}, \tag{1.220}$$

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \text{translationsinvariant} = \sum_{n=1}^{4} q_n \left(3x_i^{(n)}x_j^{(n)} - r^{(n)\,2}\delta_{ij}\right), \\ Q_{11} &= Q_{22} = Q_{33} = 0, \quad Q_{12} = 3qa^2, \quad Q_{13} = Q_{23} = 0. \\ \Rightarrow Q &= 3qa^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.221}$$

(4) 4 Ladungen aus (3) gedreht: Anordnung wie zuvor, jedoch um $45°$ gedreht:

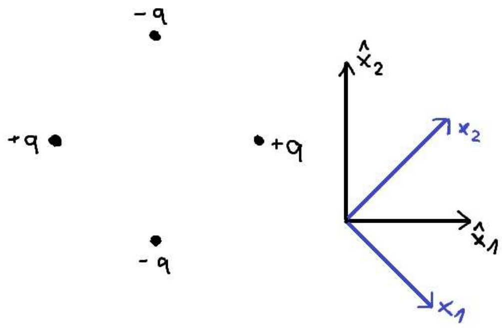

Abbildung 1.23: Illustration zu Beispiel (4): Vier Punkladungen wie in Abb. 1.22, jedoch um $45°$ gegen die Koordinatenachsen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ gedreht.

$$\begin{aligned} \underline{\hat{x}} &= D\underline{x}, \; D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \\ \Rightarrow \hat{Q} &= DQD^T = 3qa^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.222}$$

Test:

$$\hat{Q}_{11} = +q \cdot 2(\sqrt{2}a)^2 - q\left(2(a/\sqrt{2})^2 - (a/\sqrt{2})^2\right) \cdot 2 = 3qa^2, \; \hat{Q}_{22} = -\hat{Q}_{11}, ... \tag{1.223}$$

Anwendung: Energie einer Ladungsverteilung im externen elektrischen Feld

Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}), V$ im externen Feld $\vec{E}(\vec{x})$, wobei $\vec{E}$ im Bereich V nur wenig variiert. $\Rightarrow$ Energie W von $\rho(\vec{x})$ im Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$:

$$W = \int_V d^3\vec{x}\rho(\vec{x})\phi(\vec{x}) \tag{1.224}$$

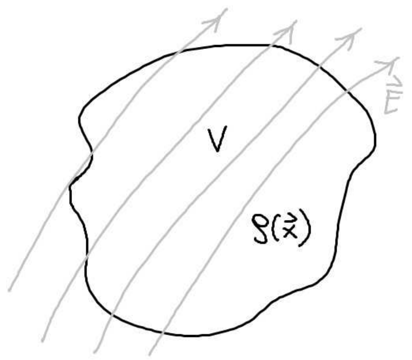

Abbildung 1.24: Ladungsverteilung im Volumen V, welches von einem externen $\vec{E}$-Feld durchsetzt wird.

Ursprung $\vec{0}$ in V, Entwicklung:

$$W = \int_V d^3\vec{x}\,\rho(\vec{x}) \left[\Phi(\vec{0}) + \vec{x}\vec{\nabla}\Phi(\vec{0}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \underbrace{x_i x_j}_{x_i x_j - \frac{1}{3}r^2\delta_{ij}} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{0}) + \ldots \right]$$

Der Term mit δ_{ij} liefert keinen Betrag, da $\sum_i \partial_i^2\Phi = -\vec{\nabla}\vec{E} = 0$

$$\begin{aligned}
&= \int_V d^3\vec{x}\,\rho(\vec{x}) \left[\Phi(\vec{0}) - \vec{x}\vec{E}(\vec{0}) - \frac{1}{2}\sum_{i,j}(x_i x_j - \frac{1}{3}r^2\delta_{ij})\frac{\partial E_i}{\partial x_j}(\vec{0}) + \ldots \right] \\
&= \underbrace{q\Phi(\vec{0})}_{\text{Beitrag der Gesamtladung}} - \underbrace{\vec{p}\vec{E}(\vec{0})}_{\text{Beitrag der Orientierung des Dipols bzgl. des } \vec{E}\text{-Feldes}} - \underbrace{\frac{1}{6}\sum_{i,j} Q_{ij}\frac{\partial E_i}{\partial x_j}(\vec{0})}_{\text{Orientierung des Quadrupols bzgl. der Inhomogenität des } \vec{E}\text{-Feldes}} + \ldots
\end{aligned} \tag{1.225}$$

<u>Beispiel: Wechselwirkungsenergie zweier Punktdipole</u>

$$\begin{aligned}
\vec{E}_2 &= -\frac{\vec{p}_2 - 3\vec{e}(\vec{p}_2 \cdot \vec{e})}{r^3} = -\frac{r^2\vec{p}_2 - 3\vec{x}(\vec{p}_2\vec{x})}{r^5} \\
&= \text{ Feld, das von } \vec{p}_2 \text{ bei } \vec{x} \text{ erzeugt wird (} \vec{p}_2 \text{ im Ursprung!).}
\end{aligned} \tag{1.226}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W_{12} = -\vec{p}_1 \vec{E}_2 = \frac{r^2(\vec{p}_1\vec{p}_2) - 3(\vec{p}_1\vec{x})(\vec{p}_2\vec{x})}{r^5} \\ = \text{Wechselwirkungsenergie von } \vec{p}_1 \text{ und } \vec{p}_2 \\ = W_{21} \text{ (Symmetrie!)}. \end{aligned} \tag{1.227}$$

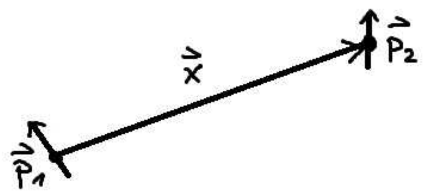

Abbildung 1.25: Zwei Punktdipole $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ mit Verbindungsvektor $\vec{x}$.

1.10 Makroskopische Elektrostatik

Mikroskopische und makroskopische Felder

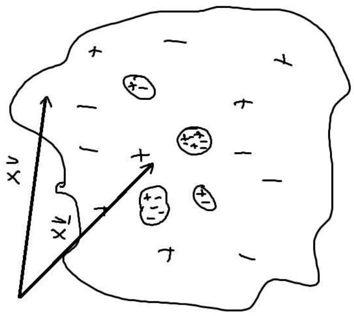

Abbildung 1.26: Einzelne mikroskopische Ladungsverbände j (Atome, Cluster, Moleküle, ...) bei $\vec{x}_j$ erzeugen „mikroskopisches Feld “. Das Fernfeld eines Verbandes ist charakterisiert durch die Ladung q_j und das Dipolmoment $\vec{p}_j$.

- Mikroskopisch:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{mikro}}(\vec{x}) &= \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_j}{|\vec{x}-\vec{x}_j|} + \vec{p}_j \vec{\nabla}_j \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_j|} \right] \\ &= \int d^3\vec{x}' \ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\rho_{\text{mikro}}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \vec{\pi}_{\text{mikro}}(\vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right], \end{aligned} \tag{1.228}$$

wobei $\rho_{\text{mikro}}(\vec{x}') = \sum_j q_j \delta(\vec{x}' - \vec{x}_j)$ (eff. Ladungsdichte) und
$\vec{\pi}_{\text{mikro}}(\vec{x}') = \sum\limits_j \vec{p}_j \delta(\vec{x}' - \vec{x}_j)$ (eff. Dipoldichte)

Aber: ϕ_{mikro} = uninteressant für makroskopische Phänomene (und in der Praxis meist nicht berechenbar!)

- Makroskopische Felder:
  Relevante Größen: Mittelungen $\langle ... \rangle$ über kleine Bereiche, die
  - sehr viele mikroskopische Ladungsträger umfassen, und
  - klein sind gegenüber makroskopischen Ausdehnungen.

$$\Phi(\vec{x}) = \langle \Phi_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V(\vec{x})} d^3\vec{y}\, \phi_{\text{mikro}}(\vec{x} + \vec{y}), \quad \Delta V(\vec{x}) = \text{kleines Volumen um } \vec{x}$$
$$= \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V(\vec{x})} d^3\vec{y} \int d^3\vec{x}'\, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\rho_{\text{mikro}}(\vec{x}')}{|\vec{x} + \vec{y} - \vec{x}'|} + \vec{\pi}_{\text{mikro}}(\vec{x}')\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} + \vec{y} + \vec{x}'|} \right]$$

Substitution: $\vec{x}' = \vec{x}'' + \vec{y}$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}'' \frac{1}{\Delta V(\vec{x})} \int d^3\vec{y} \left[\frac{\rho_{\text{mikro}}(\vec{x}'' + \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{x}''|} + \vec{\pi}_{\text{mikro}}(\vec{x}'' + \vec{y}) \cdot \vec{\nabla}'' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}''|} \right]$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}'' \left[\frac{\rho(\vec{x}'')}{|\vec{x} - \vec{x}''|} + \vec{P}(\vec{x}'')\vec{\nabla}'' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}''|} \right], \tag{1.229}$$

wobei: $\rho(\vec{x}) = \langle \rho_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle$ =mittlere Dichte der „freien Überschussladungen “, die nicht aus makroskopischen Verschiebungen stammen.
$\vec{p}(\vec{x}) = \langle \vec{\pi}_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle$ =mittlere Dipoldichte = „makroskpische Polarisation “

Beachte:
Mittelung $\langle \Phi_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle$ über Potential bei $\vec{x}$ wurde umgeschrieben in Mittelung über felderzeugende Ladungen und Dipoldichte ρ und $\vec{P}$ bei $\vec{x}''$

Betrachtung von $\vec{E}$:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) :&= -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) \\ &= -\vec{\nabla}\langle \Phi_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle \\ &= -\langle \vec{\nabla}\Phi_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{E}_{\text{mikro}}(\vec{x}) \rangle \end{aligned} \tag{1.230}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \langle \vec{E}_{\text{mikro}} \rangle = \langle \vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{mikro}} \rangle = \vec{0}. \tag{1.231}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= -\Delta\Phi \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\vec{x}''\left[\rho(\vec{x}'')+\vec{P}(\vec{x}'')\cdot\vec{\nabla}''\right]\underbrace{\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}''|}}_{=-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}'')} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{x})+\frac{1}{\epsilon_0}\int d^3\vec{x}''\vec{P}(\vec{x}'')\underbrace{\vec{\nabla}''\delta(\vec{x}-\vec{x}'')}_{=-\vec{\nabla}\delta(\vec{x}-\vec{x}'')} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{x})-\frac{1}{\epsilon_0}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\vec{P}(\vec{x})}_{\substack{=:\,-\rho_{\mathrm{pol}}(\vec{x}),\\ \text{Polarisations-}\\ \text{ladungsdichte}}}\quad.\end{aligned} \tag{1.232}$$

Also:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\rho(\vec{x})+\rho_{\mathrm{pol}}(\vec{x})\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_{\mathrm{ges}}(\vec{x}), \tag{1.233}$$

ρ_{ges} =gesamte (tatsächliche) Ladungsdichte.

Definition: Dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} := \epsilon_0\vec{E}+\vec{P} \tag{1.234}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\vec{D} = \rho(\vec{x}) = \text{Dichte der freien Überschussladung.} \tag{1.235}$$

Randbedingungen an Grenzflächen

$\rightarrow$ Ableitung aus $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ und $\vec{\nabla}\vec{D}=\rho$ wie früher (siehe 2.)

$$\Rightarrow (\vec{D}_I-\vec{D}_{II})\cdot\vec{n} = \sigma = \text{Flächenladungsdichte der freien Überschussladungen,} \tag{1.236}$$

$$E_I^{\parallel} = E_{II}^{\parallel}. \tag{1.237}$$

Phänomenologische Parametrisierung von $\vec{P}$:

$\vec{P}$ = materialabhängige Funktion von $\vec{E}$:

a) *Eigentliche Dielektrika*:

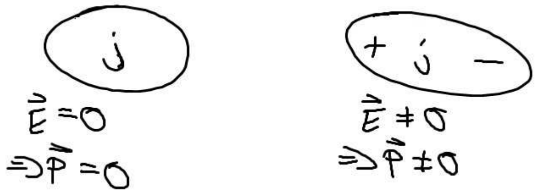

Abbildung 1.27: Verschiebungspolarisation in mikroskopischen Ladungsverbänden

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} + ... \tag{1.238}$$

wobei man χ_e als *elektrische Suszeptibilität* bezeichnet. Die nicht-linearen Terme (...) sind bei nicht allzugroßen $\vec{E}$ vernachlässigbar $\Rightarrow$ *lineare Medien*:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (1 + \chi_e)\epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \tag{1.239}$$

(ϵ_r: *relative Dielektrizitätskonstante*, typisch $\epsilon_r \sim 1 - 10$)

Isotrope Dielektrika $\chi_e =$ Zahl.

Anisotrope Dielektrika $\chi_e =$ Tensor 2. Stufe.

b) *Paraelektrika:*
Polarisation durch Ausrichtung von permanenten Dipolen:

$$\chi_e = \chi_e(T) \sim 10 - 100. \tag{1.240}$$

(T: Temperatur) χ_e fällt typischerweise mit steigendem T!

c) *Ferroelektrika:*
Spontane Polarisation ($\chi_e \geq 100$) möglich bei $\vec{E} = 0$, falls $T < T_C =$ kritische Temperatur $\rightarrow$ Hysterese-Effekte, etc....

Im Folgenden werden wir nur lineare Medien nach a) und b) betrachten!

Beispiele:

(1) Punktladung im polarisierten Medium:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{D} &= \rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x}) \\ &= \vec{\nabla}(\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}) = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{\nabla}\vec{E} \\ \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{q\delta(\vec{x})}{\epsilon_0 \epsilon_r}. \end{aligned} \tag{1.241}$$

$\Rightarrow$ Punktladung wird abgeschirmt, $q_{\text{ges}} = \frac{q}{\epsilon_r}$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{1}{|\vec{x}|}, \;\; \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi, ... \tag{1.242}$$

(2) Polarisierbare Halbräume mit Punktladung:

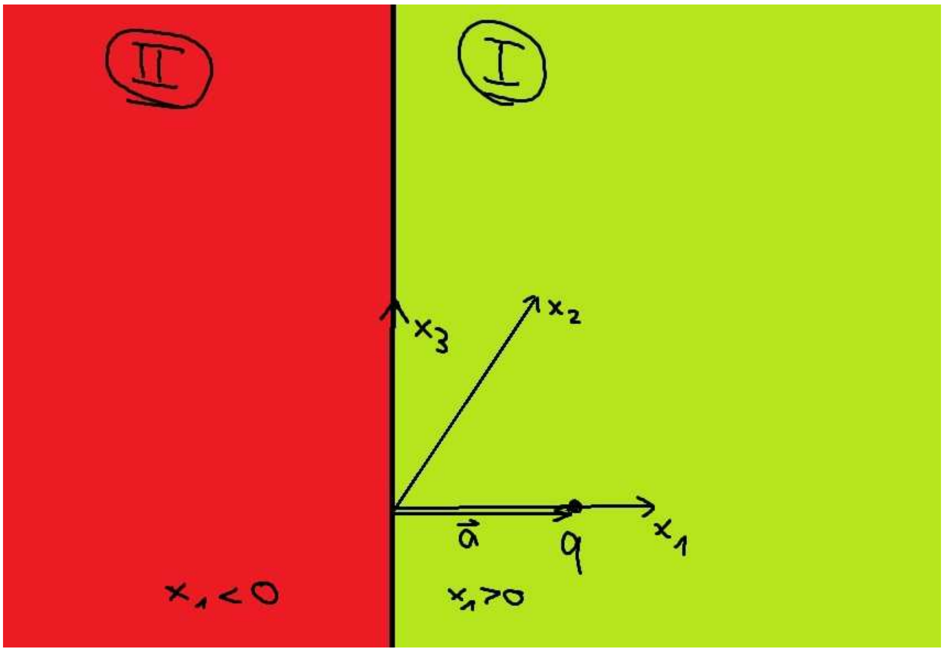

Abbildung 1.28: Zwei Halbräume mit unterschiedlicher Polarisierbarkeit.

- Punktladung bei $\vec{a}$: $\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{a})$.
- Ansatz für Bildladungen: q' bei $-\vec{a}$ und q'' bei $\vec{a}$.

$\rightarrow$ Ansatz für Φ:

$$\Phi(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_r^I\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{x}-\vec{a}|} + \frac{q'}{|\vec{x}+\vec{a}|}\right), & x_1 > 0, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_r^{II}\epsilon_0}\frac{q''}{|\vec{x}-\vec{a}|}, & x_1 < 0. \end{cases} \tag{1.243}$$

$\rightarrow$ Poisson-Gleichung erfüllt:

$$\Delta\Phi = \begin{cases} -\frac{1}{\epsilon_r^I\epsilon_0}q\delta(\vec{x}-\vec{a}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_r^I\epsilon_0}, & x_1 > 0, \\ 0 = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_r^{II}\epsilon_0}, & x_1 < 0, \end{cases} \tag{1.244}$$

d.h.

$$\vec{\nabla}\vec{D} = \epsilon_r\epsilon_0\vec{\nabla}\vec{E} = \rho(\vec{x}) \tag{1.245}$$

RB:

- $D^{\perp}$:

$$\begin{aligned}
D_1^I &= -\epsilon_r^I \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0^+} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{qa - q'a}{(x_2^2 + x_3^2 + a^2)^{3/2}}, \\
D_1^{II} &= -\epsilon_r^{II} \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0^-} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q''a}{(x_2^2 + x_3^2 + a^2)^{3/2}}. \\
&\Rightarrow 0 = D_1^I - D_2^{II} = (-q + q' + q'')\frac{1}{4\pi}\frac{a}{(...)^{3/2}} \\
&\Rightarrow q'' = q - q'.
\end{aligned} \tag{1.246}$$

- $E^{\parallel}$:

$$\begin{aligned}
E_2^I &= -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\Big|_{x_1=0^+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_r^I \epsilon_0} \cdot \frac{qx_2 + q'x_2}{(x_2^2 + x_3^2 + a^2)^{3/2}}, \\
E_2^{II} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\Big|_{x_1=0^-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_r^{II}\epsilon_0} \cdot \frac{q''x_2}{(...)^{3/2}}. \\
&\Rightarrow 0 = E_2^I - E_2^{II} = \left(\frac{q+q'}{\epsilon_r^I} - \frac{q''}{\epsilon_r^{II}}\right) \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x_2}{(...)^{3/2}} \to \frac{q+q'}{q''} = \frac{\epsilon_r^I}{\epsilon_r^{II}}
\end{aligned} \tag{1.247}$$

$$\Rightarrow q' = \frac{\epsilon_r^I - \epsilon_r^{II}}{\epsilon_r^I + \epsilon_r^{II}} q, \; q'' = \frac{2\epsilon_r^{II}}{\epsilon_r^I + \epsilon_r^{II}} \cdot q. \tag{1.248}$$

$$\Phi(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_r^I\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|} + \left(\frac{\epsilon_r^I - \epsilon_r^{II}}{\epsilon_r^I + \epsilon_r^{II}}\right) \cdot \frac{1}{|\vec{x}+\vec{a}|}\right], & x_1 > 0, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_r^{II}\epsilon_0} \cdot \frac{2\epsilon_r^{II}}{\epsilon_r^I + \epsilon_r^{II}} \cdot \frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|}, & x_1 < a. \end{cases} \tag{1.249}$$

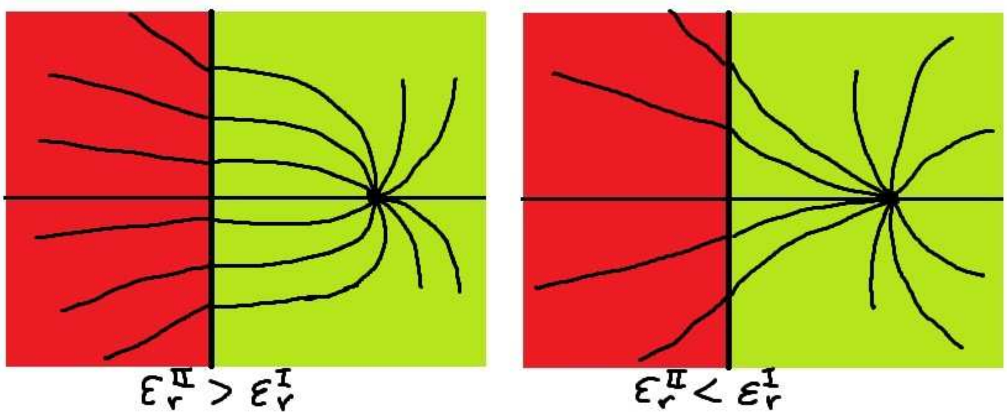

Abbildung 1.29: Qualitative Darstellung der Feldlinien des $\vec{E}$-Feldes einer Punktladung in einem von zwei Halbräumen unterschiedlicher Polarisierbarkeit. Der linke Fall ($\epsilon_r^{\mathrm{II}} > \epsilon_r^{\mathrm{I}}$) entspricht für $\epsilon_r^{II} \to \infty$ dem der Punktladung über einer Leiterplatte!

1.11 Feldenergiedichte in Medien

Erinnerung: „Vakuum “

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\ \rho(\vec{x})\Phi(\vec{x}) \\
&= \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3\vec{x}\ \vec{E}^2
\end{aligned}
\tag{1.250}
$$

Jetzt: im polarisierbaren Medium ⇒ Energieaufnahme im Medium durch Polarisation
Wir betrachten dazu eine Ladungserhöhung im System $\rho \to \rho + \delta q$
⇒ Energieerhöhung $W \to W + \delta W$

$$
\delta W = \int d^3\vec{x}\ \Phi(\vec{x})\delta\rho(\vec{x})
$$

Nutzen wir nun, dass $\delta\rho = \delta(\vec{\nabla}\vec{D}) = \vec{\nabla}(\delta\vec{D})$, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\delta W &= \int d^3\vec{x}\ \Phi(\vec{x})\vec{\nabla}(\delta\vec{D}(\vec{x})) \\
&= -\int d^3\vec{x}\ (\vec{\nabla}\Phi)\delta\vec{D}\ \ \text{für endlich ausgedehntes } \rho\text{; nach Gauß} \\
&= \int d^3\vec{x}\ \vec{E}\cdot\delta\vec{D}.
\end{aligned}
$$

Für ein lineares Medium: $\vec{D} = \epsilon_r\epsilon_0\vec{E}$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{E}\delta\vec{D} &= \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}\cdot\delta\vec{E} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r\delta(\vec{E}^2) \\
&= \frac{1}{2}\delta(\vec{E}\cdot\vec{D}).
\end{aligned}
\tag{1.251}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow W &= \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\ \vec{E}\cdot\vec{D} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r\int d^3\vec{x}\ \vec{E}^2 \quad = \int d^3\vec{x}\ w_{\mathrm{el}}(\vec{x})
\end{aligned}
\tag{1.252}
$$

Also ist die elektrische Energiedichte:

$$
w_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}.
\tag{1.253}
$$

2. Magnetostatik

2.1 Elektrischer Strom

$\rightarrow$ Beschreibung von Ladungsbewegungen

$$\vec{j}\, d\vec{A} := \text{Ladung, die pro Zeit durch die Fläche } d\vec{A} \text{ tritt.} \tag{2.1}$$

$\vec{j}$: Elektrische Stromdichte

Ladungserhaltung:
Elektrische Stromstärke / Strom:

$$I = \int_A d\vec{A}\,\vec{j} \tag{2.2}$$

I = Ladung, die pro Zeit durch die Oberfläche A tritt. Für eine geschlossene Oberfläche ist:

$$I = \oint_{A(V)} d\vec{A} \cdot \vec{j} = -\frac{d}{dt}\int_V d^3\vec{x}\,\rho(\vec{x}) = -\int_V d^3\vec{x}\,\frac{\partial\rho(\vec{x})}{\partial t} \tag{2.3}$$

für ein konstantes Volumen.

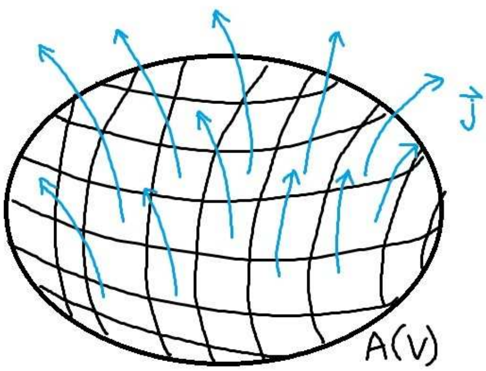

Abbildung 2.1: Die Stromdichte $\vec{j}$ trit durch die Fläche $A(V)$.

$$\Rightarrow 0 = \oint\limits_{A(V)} d\vec{A} \cdot \vec{j} + \int\limits_V d^3\vec{x}\, \frac{\partial \rho}{\partial t}$$
$$\text{Gauss:} \ = \int\limits_V d^3\vec{x} \left(\vec{\nabla}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \tag{2.4}$$

Da V = beliebig:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \ \text{(Kontinuitätsgleichung)} \tag{2.5}$$

<u>Stromfaden</u>
$\rightarrow$ beliebig dünner Leiterfaden $\leftrightarrow$ Gegenstück zur Punktladung der E-Statik.

$$d\vec{\ell} = \vec{t}\, d\ell, \tag{2.6}$$

wobei $\vec{t}$ der normierte Tangentenvektor ist und $d\ell$ das Längenelement.

$$\Delta\vec{A} = \int\limits_{\Delta A} d\vec{A} \approx \vec{t}\,\Delta A, \quad d^3\vec{x} \ \ = dAd\ell \tag{2.7}$$

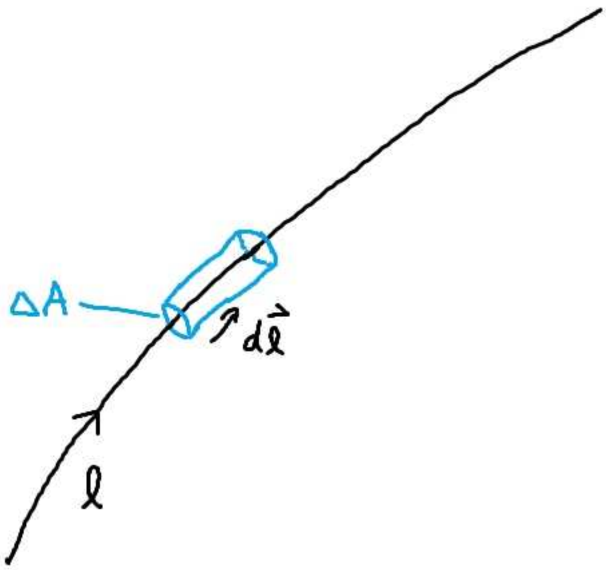

Abbildung 2.2: Faden $\vec{\ell}$ mit Längenelement $d\vec{\ell}$ welches durch eine kleine, ebene Querschnittsfläche ΔA tritt.

Somit ist der Strom durch die Fläche ΔA:

$$I = \int\limits_{\Delta A} \vec{j} \cdot \vec{A} = \int\limits_{\Delta A}\int |\vec{j}| dA = |\vec{j}| \cdot \Delta A, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \int_\ell I\, d\vec{\ell} &= \int_\ell \vec{t}\, d\ell \int_{\Delta A} dA\, |\vec{j}| \\ &= \int_{\Delta V(\ell)} d^3\vec{x}\, \vec{j}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ohm'sches Gesetz:
In vielen Materialien gilt:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{2.10}$$

mit σ als *Leitfähigkeit*

$$\sigma = const. \tag{2.11}$$

d.h. σ hängt nicht vom Feld ab!

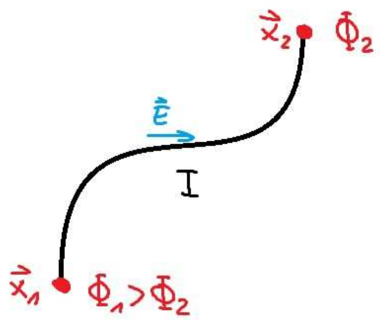

Abbildung 2.3: Vom Ort $\vec{x}_1$ mit Potential ϕ_1 zum Ort $\vec{x}_2$ fließt ein Strom I, hervorgerufen durch das elektrische Feld $\vec{E}$.

Für Leiterfaden: An den Orten $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sei jeweils ein Potential ϕ_1 bzw. ϕ_2, dazwischen ein $\vec{E}$-Feld. Dann ist die Spannung:

$$\begin{aligned} U := \phi_1 - \phi_2 &= -\int_{\vec{x}_2}^{\vec{x}_1} d\vec{\ell}\, \vec{E} = + \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{\ell}\, \vec{E} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{\ell}\, \frac{\vec{j}}{\sigma} \\ &= \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\ell\, \frac{I}{\Delta A \sigma} = I \underbrace{\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\ell\, \frac{1}{\Delta A \sigma}}_{=:R \quad \text{Widerstand}} . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Stationäre Ströme / Ladungsverteilungen
$\rightarrow$ keine zeitliche Änderung von $\vec{j}$ und ρ trotz Ladungsfluss, d.h.

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2.13}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{2.14}$$

Beachte: eine bewegte Punktladung liefert keinen statischen Strom:

$$\begin{aligned} &\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{r}(t)), \quad \vec{r}(t) = \text{ Bahnkurve der Punktladung,} \\ &\vec{j}(\vec{x}) = q\dot{\vec{r}}\delta(\vec{x} - \vec{r}(t)). \end{aligned} \tag{2.15}$$

2.2 Gesetze von Ampère und Biot-Savart

Experimentelle Grundlagen:

- Es gibt keine magnetischen Ladungen, d.h. keine magnetischen Monopole.
- Magnetische Felder werden von mg. Dipolen bzw. elektrischen Strömen erzeugt.
- Magnetische Felder gehorchen dem Superpositionsprinzip.

Quantitativ: Ampère'sches Gesetz ($\hat{=}$ Coulomb-Gesetz der E-Statik)
Betrachte zwei Leiterschleifen in denen die Ströme I_1 bzw. I_2 fließen.

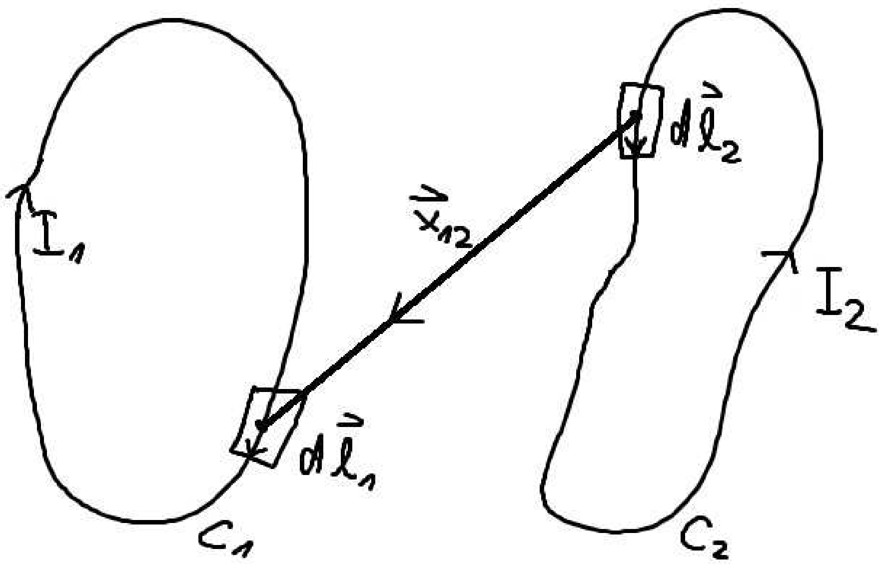

Abbildung 2.4: Zwei Leisterschleifen in denen die Ströme I_1 bzw. I_2 fließen.

Die Kraft F_{12} von Leiterschleife 2 auf 1 ist gegeben durch:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\vec{\ell}_1 \times \frac{(d\vec{\ell}_2 \times \vec{x}_{12})}{|\vec{x}_{12}|^3} \tag{2.16}$$

wobei $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$.

Zwei parallel hängende Fäden mit gleichgerichteten Strömen ziehen sich also an.

Überprüfung von Actio=Reactio

$$d\vec{\ell}_1 \times (d\vec{\ell}_2 \times \vec{x}_{12}) = (d\vec{\ell}_1 \cdot \vec{x}_{12}) d\vec{\ell}_2 - (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2)\vec{x}_{12}, \tag{2.17}$$

$$\frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} = -\vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \tag{2.18}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[- \oint\limits_{C_1} \oint\limits_{C_2} (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) \frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} - \oint\limits_{C_2} d\vec{\ell}_2 \underbrace{\oint\limits_{C_1} d\vec{\ell}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}}_{\substack{= 0 \text{ nach Stokes und} \\ \vec{\nabla}_1 \times \vec{\nabla}_1 = 0.}} \right] \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint\limits_{C_1} \oint\limits_{C_2} (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) \frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} \\ &= -\vec{F}_{21}, \quad \text{da } \vec{x}_{21} = -\vec{x}_{12}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Bemerkung: Die Kraft zwischen zwei geraden Leitern wird zur Einheitendefinition $[I] = 1\mathrm{A}$ herangezogen und somit indirekt für $[q] = 1\mathrm{C}$.

Magnetische Flussdichte/ Induktion

Def:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint\limits_{C} \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \text{magnetische Flussdichte, die vom Strom } I \text{ durch die Schleife } C \text{ erzeugt wird } (d\vec{x}' = \text{Stromrichtung}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{V} d^3\vec{x}' \, \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \text{Verallgemeinerung auf allgemeine Stromverteilung in } V \text{ durch Superposition} \end{aligned} \tag{2.21}$$

„Biot-Savart'sches Gesetz"

$\Rightarrow$ Kraft auf Leiterschleife C_1 bzw. Stromverteilung $\vec{j}_1$ in V_1 die von einem externen Feld $\vec{B}_2(\vec{x}_1)$ ausgeübt wird (aus $\vec{F}_{12}$ oben!)

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= I_1 \oint\limits_{c_1} d\vec{\ell}_1 \times \vec{B}_2(\vec{x}_1) \\ &= \int\limits_{V_1} d^3\vec{x}_1 \, \vec{j}_1(\vec{x}_1) \times \vec{B}_2(\vec{x}_1). \end{aligned} \tag{2.22}$$

<u>Lorentz-Kraft:</u>
Kraft, die auf eine bewegte Punktladung bei $\vec{r}(t)$:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\left[\vec{E}(\vec{r}) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r})\right] \\ &= \int_V d^3\vec{x}\left[\rho(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}) + \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})\right]. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Beachte: Magnetischer Anteil hat analoge Form zum Ampère'schen Gesetz, obwohl Strom der Punktladung nicht stationär. $\rightarrow$ Experimentelle Bestätigung!

2.3 Feldgleichungen

Verwende

$$\begin{aligned} \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = -\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \Rightarrow \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{x}'\;\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}\frac{-1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\ &= \vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}'\;\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)}_{=:\vec{A}(\vec{x})} \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \vec{\nabla}\vec{B} = 0, \quad \text{denn:} \\ &\vec{\nabla}\vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \;\text{ (Quellfreiheit des } \vec{B}\text{-Feldes)} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \Delta\vec{A} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\vec{\nabla}\int_V d^3\vec{x}'\left(\vec{j}(\vec{x}')\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{=-\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}\right) - \int_V d^3\vec{x}'\;\vec{j}(\vec{x}')\underbrace{\Delta\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)}_{=-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')}\right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\vec{\nabla}\int d^3\vec{x}'\left(\vec{j}(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) + 4\pi\vec{j}(\vec{x})\right]. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Nun ist jedoch:

$$\vec{j}(\vec{x}')\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \vec{\nabla}'\left(\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) - \underbrace{\left(\vec{\nabla}'\vec{j}(\vec{x})\right)}_{=0,\ \text{Stationarität von } \vec{j}}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}, \tag{2.27}$$

und somit

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla} \underbrace{\int_V d^3\vec{x}'\, \vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)}_{\substack{\underset{\text{Gauß}}{=} \oint_{A(V)} d\vec{A}'\, \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\ = 0, \text{ wenn Oberflächenströme } = 0 \\ (V \text{ groß genug wählen!})}} + \mu_0\vec{j}(\vec{x}) \tag{2.28}$$

also

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} \quad \text{„Ampère'sches Durchflutungsgesetz“} \tag{2.29}$$

$\rightarrow$ Integrale Form:

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} \underset{\text{Stokes}}{=} \oint_{C(A)} \vec{B} \cdot d\vec{x} = \int_A d\vec{A}\, \mu_0\vec{j} = \mu_0 I_A, \tag{2.30}$$

wobei I_A = Strom durch A ist.

Feldgleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0\vec{j} \end{aligned}} \tag{2.31}$$

Frage: Ist $\vec{B}$ damit vollständig und allgemein charakterisiert?

Mathematischer Exkurs: Helmholz-Zerlegung von Vektorfeldern

Ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$, das für $|\vec{x}| \to \infty$ „hinreichend schnell “gegen Null strebt, kann in divergenz- und rotationsfreie Anteile zerlegt werden:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}_\ell(\vec{x}) + \vec{F}_t(\vec{x}), \quad \vec{\nabla} \times \vec{F}_\ell = 0,\ \vec{\nabla}\vec{F}_t = 0 \tag{2.32}$$

Umgekehrt ist $\vec{F}(\vec{x})$ durch $\vec{\nabla}\vec{F} = \vec{\nabla}\vec{F}_\ell$ und $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}_t$ eindeutig bestimt.

Beweis:

1) Existenz:
   Def.:

$$\vec{F}_t(\vec{x}) := \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \int d^3\vec{x}'\, \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{F}_t = 0. \tag{2.33}$$

Auswertung analog zu $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ oben:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\right) &= \vec{\nabla}\left(\vec{F}(\vec{x}')\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) - \vec{F}(\vec{x}')\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
&= -\vec{\nabla}\left(\vec{F}(\vec{x}')\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) + 4\pi\vec{F}(\vec{x}')\cdot\delta(\vec{x}-\vec{x}') \\
&= -\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}'\left(\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\right) + \vec{\nabla}\left(\frac{(\vec{\nabla}'\vec{F}(\vec{x}'))}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) \\
&\quad + 4\pi\vec{F}(\vec{x}')\delta(\vec{x}-\vec{x}')
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Integration über $\frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{x}'$ liefert:

$$
\vec{F}_t(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\underbrace{\int d^3\vec{x}'\ \vec{\nabla}'\left(\frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)}_{\substack{\text{=Oberflächenintegral im Unendlichen nach Gauß'schem}\\ \text{Satz} \to 0 \text{ nach Vorraussetzung}}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3\vec{x}'\ \frac{(\vec{\nabla}'\vec{F}(\vec{x}'))}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{=:-\vec{F}_\ell(\vec{x}),\text{wobei } \vec{\nabla}\times\vec{F}_\ell=0} + \vec{F}(\vec{x})
\tag{2.35}
$$

$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_\ell + \vec{F}_t$ per Konstruktion.

2) Eindeutigkeit bei gegeb. $\vec{\nabla}\vec{F}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.
Annahme: Sei $\vec{\nabla}\vec{F}_1 = \vec{\nabla}\vec{F}_2$ und $\vec{\nabla} \times \vec{F}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{F}_2$
$\rightarrow$ zu zeigen: $\vec{F}_1 \equiv \vec{F}_2$ bzw. $\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \equiv 0$
Aus $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ folgt $\vec{F} = \vec{\nabla} g$ mit $\Delta g = \vec{\nabla}\vec{F} = 0$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \int_V d^3\vec{x}\ (\vec{\nabla} g)^2 &= \int_V d^3\vec{x}'\ (\vec{\nabla} g)\cdot(\vec{\nabla} g) \\
&= \int_V d^3\vec{x}\left[\vec{\nabla}\cdot(g\cdot\vec{\nabla} g) - g\underbrace{(\Delta g)}_{=0}\right] \\
&\underset{\text{Gauß}}{=} \oint_{A(V)} d\vec{A}\cdot g(\vec{\nabla}\vec{g}) \\
&= \oint_{A(V)} d\vec{A}\cdot g\cdot\vec{F} \rightarrow 0,
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

wenn $V \to \mathbb{R}^3$, da Oberfläche selbst $A(V) \to \infty$ und $\vec{F}(x) \to 0$ hinreichend schnell.

$$\Rightarrow \vec{\nabla} g \equiv \vec{F} \equiv 0. \tag{2.37}$$

Folgerung:
$\vec{\nabla}\vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ zusammen mit RB $\vec{B} \underset{|\vec{x}|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (hinreichend schnell) bestimmen $\vec{B}(\vec{x})$ eindeutig!

2.4 Vektorpotential

Aus der Helmholtz-Zerlegung folgt, dass $\vec{B}$ darstellbar als

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\,,\ \vec{A} = \text{Vektorpotential.} \tag{2.38}$$

Aber: $\vec{A}$ ist nicht eindeutig, da weder $\vec{\nabla}\vec{A}$ noch RB an $\vec{A}$ festgelegt.
Sei $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{A} - \vec{A}') = 0$

$$\Rightarrow \vec{A}' - \vec{A} = \vec{\nabla}\psi. \tag{2.39}$$

$\vec{A}$ ist nur bis auf ein Gradientenfeld $\vec{\nabla}\psi$ (ψ =beliebig) eindeutig!
$\Rightarrow$ Eichtransformation: $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi,\ \ \phi \to \phi' + const$ ändern die statischen Felder $\vec{B}$ und $\vec{E}$ nicht.

Feldgleichung für $\vec{A}$:

- $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$ ist automatisch erfüllt: $\vec{\nabla}\vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$.
- Aus $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ folgt:

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0 \vec{j} \\ &\Rightarrow \Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j},\ \ \text{falls}\ \ \vec{\nabla}\vec{A} = 0\ (\textit{Coulomb-Eichung}). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Explizite Darstellung für $\vec{A}$:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\vec{x}'\, \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla}\psi(\vec{x}), \tag{2.41}$$

wobei der erste Teil in 2.3 explizit konstruiert wurde und die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$ erfüllt für stat. Ströme $\vec{\nabla}\vec{j} = 0$; der zweite Teil ist ein beliebiges Gradientenfeld, z.B. eine Konstante $\vec{A}_0$.

Beispiele:

1) Homogenes $\vec{B}$-Feld:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &= \vec{B}_0 = const \\ \Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{1}{2}\vec{B}_0 \times \vec{x} + \vec{\nabla}\psi. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Z.B. $\vec{B} = B_0 \vec{e}_3$:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2} B_0 \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{\nabla}\psi \tag{2.43}$$

also z.B.:

$$\vec{A}_1 = \frac{B_0}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_2 = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \psi_2 = \frac{1}{2} x_1 x_2 B_0. \tag{2.44}$$

2) Linearer Stromfaden:

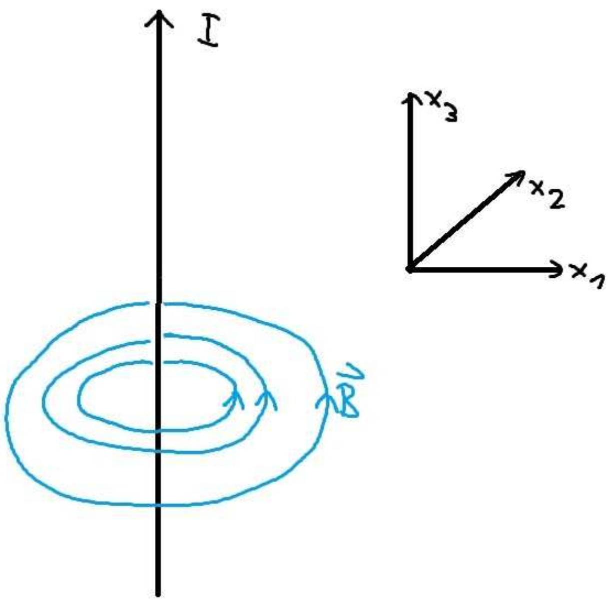

Abbildung 2.5: B-Feld eines linearen Stromfadens

$$\vec{j} = I \vec{e}_3 \delta(x_1) \delta(x_2) = I \vec{e}_3 \delta^{(2)}(\vec{x}). \tag{2.45}$$

Wir verwenden auf Grund der Symmetrie Zylinderkoordinaten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{x}'\ \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_3 \int_{-L}^{+L} dx_3'\ \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-x_3')^3}} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_z \int_{-L}^{+L} dz'\ \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}\Big|_{L\to\infty} \to \infty,\ \text{falls Leiterlänge } L\to\infty.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Problem: Stromverteilung reicht bis ins Unendliche.
$\to \vec{A}$ kann divergieren für $|\vec{x}'| \to \infty$.
Aber: Divergenter Anteil in $\vec{A}$ hängt nicht von $\vec{x}$ ab!
$\to$ Potentialdifferenz $\vec{A}(\vec{x}) - \vec{A}(\vec{x}_0)$, wobei $\vec{A}(\vec{x}_0)$ einen bel. Referenzpunkt angibt, ist wohldefiniert!

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) - \vec{A}(\vec{x}_0) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_z \underbrace{\int_{-L}^{+L} dz'\ \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+(z_0-z')^2}}\Big|_{L\to\infty}}_{=\left[\ln\left(z'-z+\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}\right)-\ln\left(z'-z_0+\sqrt{\rho_0^2+(z_0-z')^2}\right)\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty}} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_z \ln\left(\frac{z'-z+\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}{z'-z_0+\sqrt{\rho_0^2+(z_0-z')^2}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_z \left(\ln({}^{z}\!/\!_{z}) - \ln({}^{\rho^2}\!/\!_{\rho_0^2})\right) \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_z \cdot 2\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\vec{e}_z \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\vec{\nabla}\times(-\vec{e}_z\ln\rho) \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

wobei die Rotation in Zylinderkoordinaten in diesem Fall gegeben ist durch:

$$\vec{\nabla} \times (f_z \vec{e}_z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_z}{\partial \varphi} \vec{e}_\rho - \frac{\partial f_z}{\partial \rho} \vec{e}_\varphi. \tag{2.50}$$

Nebenprodukt:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A}(\vec{x}) &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \vec{e}_z \cdot \Delta \ln \rho \\ &= -\mu_0 \vec{j} = -\mu_0 I \vec{e}_z \cdot \delta^{(2)}(\vec{x}) \\ \Rightarrow \Delta_2 \ln |\vec{x}^{(2)}| &= 2\pi \delta^{(2)}(\vec{x}^{(2)}), \end{aligned} \tag{2.51}$$

wobei $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

2.5 Magnetisches Dipolmoment

Fernfeld einer stationären Stromverteilung

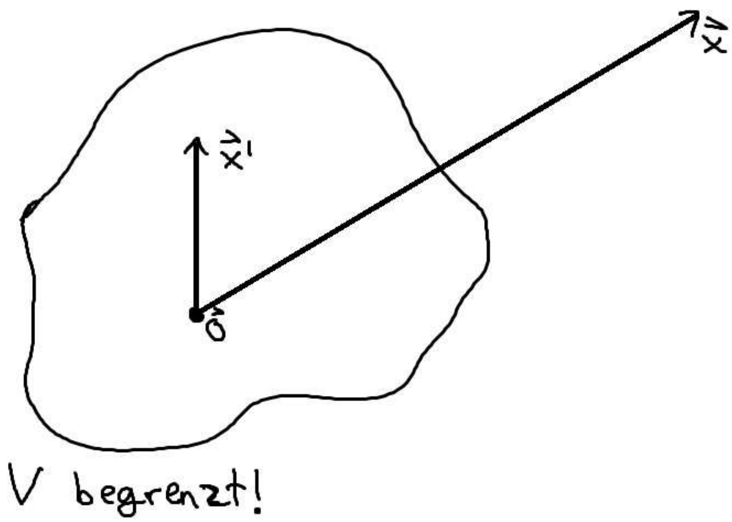

Abbildung 2.6: Begrenztes Volumen V mit $\vec{x}' \in V$.

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V d^3\vec{x}'\;\vec{j}(\vec{x}')\underbrace{\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{=1/r+\frac{\vec{x}\vec{x}'}{r^3}+\mathcal{O}(r^{-3})}\quad,\quad r=|\vec{x}|\gg|\vec{x}'|\\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r}\int\limits_V d^3\vec{x}'\;\vec{j}(\vec{x}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int\limits_V d^3\vec{x}'\;\vec{j}(\vec{x}')\cdot(\vec{x}\cdot\vec{x}')+\mathcal{O}(r^{-3}).\end{aligned} \tag{2.52}$$

Umformungen für $\vec{\nabla}\vec{j}=0$:

$$\int\limits_V d^3\vec{x}'\;\underbrace{f(\vec{x}')\cdot\vec{j}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'g(\vec{x}')}_{=\underbrace{\vec{\nabla}'(f\vec{j}g)}_{\to 0\text{ , da Oberflächenintegral verschwindet }(\vec{j}=\vec{0}\text{ außerhalb von }V)}-g\vec{j}(\vec{\nabla}'f)-\underbrace{fg(\vec{\nabla}'\vec{j})}_{=0}} = -\int\limits_V d^3\vec{x}'\;g(\vec{x}')\vec{j}(\vec{x}')\vec{\nabla}'f(\vec{x}') \tag{2.53}$$

- $f\equiv 1,\; g=x'_k$:

$$\begin{aligned}\vec{j}\cdot(\vec{\nabla}'x'_k) &= \vec{j}\vec{e}_k = j_k\\ \Rightarrow \int\limits_V d^3\vec{x}'\;j_k(\vec{x}') &= 0,\;\text{d.h.}\;\int\limits_V d^3\vec{x}'\;\vec{j}(\vec{x}')=\vec{0}.\end{aligned} \tag{2.54}$$

- $f=x'_k,\; g=x'_\ell$:

$$\int\limits_V d^3\vec{x}'\;x'_k j_\ell = -\int\limits_V d^3\vec{x}'\;x'_\ell j_k. \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int\limits_V d^3\vec{x}'\underbrace{\vec{j}(\vec{x}')\cdot(\vec{x}\cdot\vec{x}')}_{=\sum\limits_{k,\ell}\vec{e}_k j_k x'_\ell x_\ell \underset{(2.55)}{\to} -\sum\limits_{k,\ell}\vec{e}_k x'_k j_\ell x_\ell}\\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_V d^3\vec{x}'\underbrace{\left[\vec{j}(\vec{x}')\cdot(\vec{x}\vec{x}')-\vec{x}'\left(\vec{j}(\vec{x}')\cdot\vec{x}\right)\right]}_{=-\vec{x}\times(\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}'))}\\ &= -\vec{x}\times\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_V d^3\vec{x}'\;\vec{x}'\times\vec{j}\\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\vec{p}_m\times\vec{x}}{r^3},\\ \vec{p}_m &:= \frac{1}{2}\int\limits_V d^3\vec{x}'\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')\;\text{„magnetisches Dipolmoment“}.\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{x}(\vec{x}\vec{p}_m) - \vec{p}_m r^2}{r^3} \tag{2.57}$$

Beispiel: Ebene Leiterschleife mit Strom I

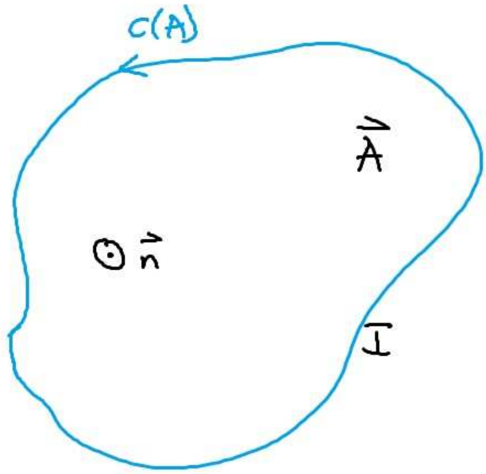

Abbildung 2.7: Ebener Stromfaden der eine Fläche A umschließt

$$\vec{j} d^3\vec{x} = I d\vec{\ell} \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_m &= \frac{1}{2} \oint\limits_{C(A)} \vec{x} \times d\vec{\ell} \cdot I \\ &= I \cdot \vec{A}, \quad \vec{A} = A \cdot \vec{n}, \quad \vec{n} = \text{Flächennormale}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Kraft auf Stromverteilung im äußeren B-Feld

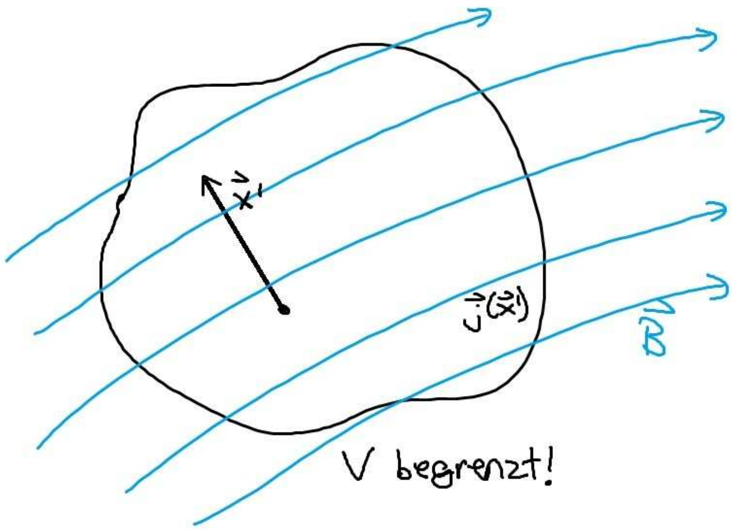

Abbildung 2.8: Das Volumen V wird vom Feld $\vec{B}$ durchsetzt.

$$B_k(\vec{x}) = B_k(\vec{0}) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} B_k(\vec{0}) + \mathcal{O}(\vec{x}^2), \tag{2.60}$$

dabei sei der Abstand $\vec{x}'$ in V klein gegen typische Abstände, in denen $\vec{B}$ variiert. Mit

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (i,j,k) \text{ zyklische Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ -1, & \text{falls } (i,j,k) \text{ anti-zyklische Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{2.61}$$

ist die Kraft auf V:

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \int_V d^3\vec{x}'\ \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}(\vec{x}') \\
&= \underbrace{\int_V d^3\vec{x}'\ \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}(0)}_{\int \to 0} + \int_V d^3\vec{x}'\ \vec{j}(\vec{x}') \times \underbrace{\Big((\vec{x}' \cdot \vec{\nabla})\vec{B}(\vec{x})\Big)}_{=\sum_{i,j} x_i' \partial_i B_j \vec{e}_j}\Big|_{\vec{x}=0} + \ldots \\
&= \int_V d^3\vec{x}' \sum_{k,\ell,j} \epsilon_{k\ell j}\vec{e}_k \qquad \underbrace{j_\ell \sum_i x_i' \partial_i}_{\substack{\displaystyle \underset{(2.55)}{\to} \tfrac{1}{2}\sum_i (j_\ell x_i' - j_i x_\ell')\partial_i \\ \displaystyle = \tfrac{1}{2}\left[j_\ell(\vec{x}'\vec{\nabla}) - x_\ell'(\vec{j}\vec{\nabla})\right] \\ \displaystyle = \tfrac{1}{2}\left[(\vec{x}' \times \vec{j}) \times \vec{\nabla}\right]_\ell}} \qquad B_j(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=0} \\
&= \sum_{k,\ell,j} \vec{e}_k \epsilon_{k\ell j} (\vec{p}_m \times \vec{\nabla})_\ell B_j(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=0} \\
&= (\vec{p}_m \times \nabla) \times \vec{B}(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=0} \\
&= \vec{\nabla}\left(\vec{p}_m \vec{B}(\vec{x})\right)\Big|_{\vec{x}=0} - \underbrace{\vec{p}_m \cdot \left(\vec{\nabla}\vec{B}(\vec{0})\right)}_{=0} \\
&= \vec{\nabla}\left(\vec{p}_m \cdot \vec{B}(\vec{x})\right)\Big|_{\vec{x}=0}.
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

Für stationäre Felder ($\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$):

$$
\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}_m \vec{B}) = \vec{p}_m \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + (\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = (\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla})\vec{B}(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=0} \tag{2.63}
$$

$\Rightarrow$ „Orientierungsenergie“im $\vec{B}$-Feld:

$$
W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}. \tag{2.64}
$$

Dies ist *nicht* die Energie, um einen Dipol ins Feld zu bringen!

Drehmoment auf Dipol im äußeren B-Feld:

$$
\begin{aligned}
\vec{N} &= \int_V \vec{x}' \times \underbrace{d\vec{F}'}_{\vec{j}(\vec{x}')\times\vec{B}(\vec{x}')d^3\vec{x}'} \\
&= \int_V d^3\vec{x}' \underbrace{\vec{x}' \times \left(\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}(\vec{0})\right)}_{=\vec{j}(\vec{x}')\cdot\left(\vec{x}'\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\cdot\left(\underbrace{\vec{x}'\cdot\vec{j}(\vec{x}')}_{\to 0}\right)} +\ldots \\
&= \frac{1}{2}\int_V d^3\vec{x}' \left[\vec{j}(\vec{x}')\left(\vec{x}'\vec{B}(\vec{0})\right) - \vec{x}'\left(\vec{j}(\vec{x}')\vec{B}(\vec{0})\right)\right] \\
&= \vec{B}_0 \times \frac{1}{2}\int_V d^3\vec{x}' \left(\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')\right) \\
&= \vec{p}_m \times \vec{B}(\vec{0}).
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

2.6 Makroskopische Magnetostatik

$\rightarrow$ Mittelungsprozess über mikroskopische Bereiche analog zur makroskopischen E-Statik.

- B-Feld:
$$\vec{B}(\vec{x}) = \langle \vec{B}_{\text{mikro}}(\vec{x})\rangle, \tag{2.66}$$
wobei $\vec{B}_{\text{mikro}}$ von mikroskopischen Strömen und permanenten Dipolen erzeugt wird. Eine quantitative Erfassung ist zu kompliziert und unnötig!
$$\langle \vec{B}_{\text{mikro}}(\vec{x})\rangle = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V(\vec{x})} d^3\vec{y}\, \vec{B}_{\text{mikro}}(\vec{x}+\vec{y}), \tag{2.67}$$
$$\vec{\nabla}\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\langle \vec{B}_{\text{mikro}}(\vec{x})\rangle \underset{\text{Linearität d. Mittelung}}{=} \langle \vec{\nabla}\vec{B}_{\text{mikro}}(\vec{x})\rangle = \langle 0\rangle = 0 \tag{2.68}$$
$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \tag{2.69}$$
d.h. $\vec{B}$ aus makroskopischem Vektorpotential $\vec{A}$ ableitbar.

- Strom:
$$\langle \vec{j}_{\text{mikro}}\rangle = \vec{j} + \vec{j}_m + \vec{j}_{\text{pol}} =: \vec{j}_{\text{ges}}, \tag{2.70}$$
wobei sich $\vec{j}$ aus der Bewegung freier Ladungsträger ergibt. $\vec{j}_m$ bezeichnet die Magnetisierungsstromdichte durch stationäre Bewegung atomar gebundener Ladungsträger. Stationarität $\rightarrow$ $\vec{\nabla}\vec{j}_m = 0$. $\vec{j}_{\text{pol}}$ wird hervorgerufen durch die Verschiebung der Ladung $\rho_{\text{pol}} d^3\vec{x}$, die zu $\vec{P} \neq 0$ führt:
$$\frac{\partial \rho_{\text{pol}}}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j}_{\text{pol}} = 0 \tag{2.71}$$

d.h. $\vec{j}_{\text{pol}} = \dot{\vec{P}} \to \vec{0}$ in der Magnetostatik. (Beitrag = 0 in diesem Kapitel!)

- „Magnetisierung“: $\vec{M}(\vec{x})$ = magnetische Dipoldichte, die durch $\vec{j}_m$ und Ausrichtung permanenter magnetischer Dipole effektiv erzeugt wird.

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V d^3\vec{x}' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V d^3\vec{x}' \underbrace{\frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}_{=\vec{M}(\vec{x}')\times\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -\vec{\nabla}'\times\left(\frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) + \frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V d^3\vec{x}' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}') + \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \tag{2.72}$$

wobei $\int d^3\vec{x}' \, \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) \to 0$ (als Oberflächenintegral).

$$\Rightarrow \vec{j}_m(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{x}) \tag{2.73}$$

<u>Feldgleichungen und mg. Feldstärke</u>
Definition:

$$\vec{H} := \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \tag{2.74}$$

bezeichnet man als *magnetische Feldstärke*

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{=\vec{j}_{\text{ges}}\cdot\mu_0} - \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_{\text{ges}} - \vec{j}_m = \vec{j}, \tag{2.75}$$

d.h. $\vec{H}$ wird durch die frei beweglichen Ladungen bestimmt. Somit sind die Feldgleichungen der Magnetostatik

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} \end{aligned}} \tag{2.76}$$

zum Vergleich die der E-Statik:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \end{aligned}} \tag{2.77}$$

Beachte: $\vec{B}$ und $\vec{E}$ sind die eigentlichen Messgrößen, da die von tatsächlich vorhandenen Ladungen und Strömen erzeugt werden.

<u>Verhalten von $\vec{B}$ und $\vec{H}$ and Grenzflächen:</u>
$\to$ Betrachtung von infinitesimalen Volumen / Wegen wie in der E-Statik!

a) Normalkomponenten:$(\vec{B}_I - \vec{B}_{II}) \cdot \vec{n}_I = 0$, da $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$.

b) Tangentialkomponenten: Es sei $\vec{k}$= Flächenstromdichte, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\vec{k}\cdot\Delta\vec{A}}{d} &= \text{ Strom } \Delta I \text{ durch } \Delta\vec{A} \\ &= \vec{k}\cdot\vec{t}\cdot\Delta x = \vec{j}\cdot\Delta\vec{A} \end{aligned} \tag{2.78}$$

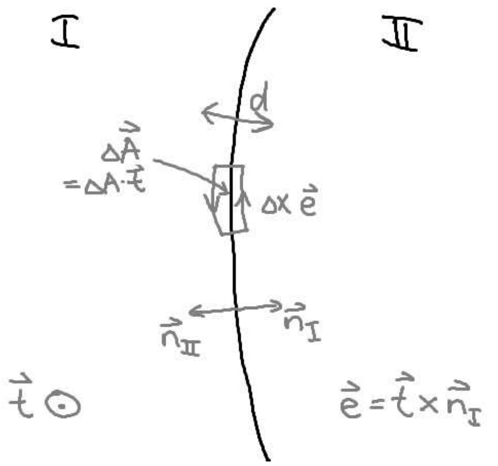

Abbildung 2.9: Zum Verhalten von $\vec{B}$ und $\vec{H}$ an Grenzflächen.

$$\begin{aligned} \rightarrow \int\limits_{\Delta A} d\vec{A}\,\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) &= \oint\limits_{C(A)} \vec{H}\,d\vec{x} = \left(\vec{H}_{II}-\vec{H}_{I}\right)\Delta x\vec{e}+ ... \\ &= \int\limits_{\Delta A} d\vec{A}\vec{j} = \Delta I = \vec{k}\cdot\vec{t}\cdot\Delta x + ... \\ \Rightarrow \left(\vec{H}_{II}-\vec{H}_{I}\right)\cdot\vec{e} = \vec{k}\cdot\vec{t}\ \ \forall\vec{e} &\Rightarrow \left(\vec{H}_{I}-\vec{H}_{II}\right)\times\vec{n}_I = \vec{k}. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Phänomenologische Klassifizierung von Medien:

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{B}),\ \ \vec{M} = \vec{M}(\vec{H}). \tag{2.80}$$

Für lineare Medien ist $\vec{M} = \chi_m\vec{H} + ...$, wobei die noch folgenden Terme für lineare Medien vernachlässigbar sind. χ_m bezeichnet man als „magnetische Suszeptibilität“.

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \underbrace{(1+\chi_m)}_{=:\mu_r}\mu_0\vec{H} = \mu_r\mu_0\vec{H}. \tag{2.81}$$

μ_r bezeichnet man als *relative Permeabilität.*

a) Diamagnetismus: keine permanenten magnetischen Dipole, d.h. reine Induktionseffekte an mikroskopischen Strömen.
$\chi_m < 0$, typisch $|\chi_m| \sim 10^{-5}$ (kaum temperaturabhängig). Für $\chi_m = -1$ erhält man einen perfekten Diamagneten, z.B. Supraleiter (Meißner-Ochsenfeld-Effekt).

b) Paramagnetismus: Ausrichtung permanenter Dipole (z.B. aus Spin und Bahndrehimpuls der e^-, Kernspin, ...).
$\chi_m = \chi_m(T) > 0,\ \chi_m \sim 10^{-6} - 10^{-2}$ (starke Temperaturabhängigkeit!)

c) Ferromagnetismus: Spontane Ausrichtung permanenter magnetischer Dipole, falls $T < T_C$ (Curie-Temperatur).
$\chi_m = \chi_m(T, H)$, typisch:

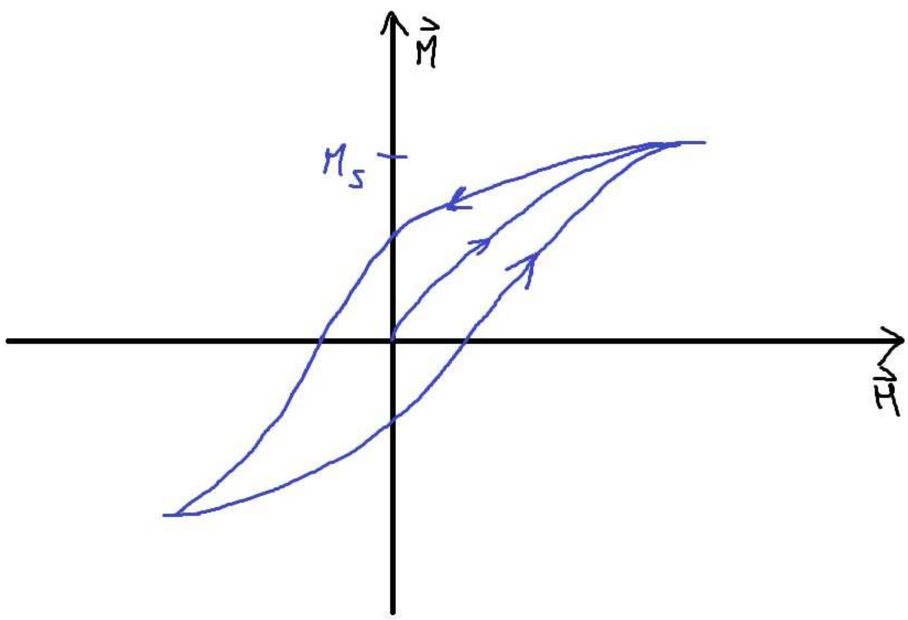

Abbildung 2.10: Typische Hysteresekurve von Ferromagnetika. Der Startwert bei $(0,0)$ gilt nur bei vollständiger Entmagnetisierung (z.B. durch Erwärmung), d.h. mikroskopischer Unordnung. Die Magnetisierungskurve weist eine starke Nicht-Linearität auf.

Zur RWA der Magnetostatik
$\rightarrow$ Methoden Analog zur E-Statik, z.T. komplizierter durch Vektorcharakter des Potentials $\vec{A}$.
Sonderfall $\vec{j} \equiv \vec{0}$:

- $\vec{\nabla}\vec{B} = 0,\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \rightarrow \vec{H}$ ist aus einem *magnetischen Skalarpotential* Φ_m ableitbar: $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_m$.

- Für lineare Medien ($\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$) folgt zusätzlich:

$$0 = \vec{\nabla}\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{\nabla}\vec{H}, \tag{2.82}$$

  d.h. $\Delta\Phi_m = 0$ (Laplace-Gleichung)

<u>Beispiel: Magnetisierbare Kugel im homogenen $\vec{B}$-Feld</u>
Problem:

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} = \vec{0} \tag{2.83}$$

d.h. $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_m$.
Randbedingungen:

- $B^\perp$ und $H^\parallel$ sind stetig bei $r = R$ (Kugel vom Radius R ist im Ursprung zentriert)
- $\vec{B} \underset{r\to\infty}{\to} B_0 \vec{e}_3$

Methode: Multipolentwicklung für Φ_m!
<u>Innen:</u>

$$\vec{B}^i = \mu_r \mu_0 \vec{H}^i, \quad \Phi_m^i = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta). \tag{2.84}$$

<u>Außen:</u>

$$\vec{B}^a = \mu_0 \vec{H}^a, \quad \Phi_m^a = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell r^{-\ell-1} P_\ell(\cos\theta)}_{\underset{r\to\infty}{\to} 0} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell^a r^\ell P_\ell(\cos\theta)}_{\underset{r\to\infty}{\overset{!}{\sim}} -x_3 \frac{B_0}{\mu_0} = -\frac{B_0}{\mu_0} r P_1(\cos\theta)} \tag{2.85}$$

$$\Rightarrow a_1^a = -\frac{B_0}{\mu_0}, \quad a_\ell^a = 0 \;\; \forall \ell \neq 1. \tag{2.86}$$

- Normalkomponente bei $r = R : B_r^i(r = R) \overset{!}{=} B_r^a(r = R)$.

$$\begin{aligned} B_r^i &= -\mu_r \mu_0 \frac{\partial}{\partial r}\Phi_m^i = -\mu_r \mu_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \ell r^{\ell-1} P_\ell(\cos\theta), \\ B_r^a &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial r}\Phi_m^a = +\mu_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell (\ell+1) r^{-\ell-2} P_\ell(\cos\theta) + B_0 P_1(\cos\theta). \end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\Rightarrow -\mu_r a_1 = 2 b_1 R^{-3} + {}^{B_0}/_{\mu_0}, \quad -\mu_r a_\ell \ell R^{\ell-1} = b_\ell (\ell+1) R^{-\ell-2}, \quad \ell \neq 1. \tag{2.88}$$

- Tangentialkomponente bei $r = R$: $H^i_\theta(r = R) = H^a_\theta(r = R)$.

$$\begin{aligned} H^i_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi^i_m = \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell r^\ell P'_\ell(\cos\theta)\sin\theta, \\ H^a_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi^a_m = \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell r^{-\ell-1} P'_\ell(\cos\theta)\sin\theta - \frac{B_0}{\mu_0}P'_1(\cos\theta)\sin\theta. \end{aligned} \tag{2.89}$$

$$\Rightarrow a_1 = b_1 R^{-3} - \frac{B_0}{\mu_0},\;\; a_\ell R^{\ell-1} = b_\ell R^{-\ell-2},\;\; \ell > 1. \tag{2.90}$$

Lösung von Gl. (2.88) und (2.90):

$$\begin{aligned} &a_1 = -\frac{3}{\mu_r + 2}\cdot\frac{B_0}{\mu_0},\;\; b_1 = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}R^3\frac{B_0}{\mu_0}, \\ &a_\ell = 0,\; b_\ell = 0,\;\; \ell \neq 1. \end{aligned} \tag{2.91}$$

a_0, a^a_0 sind irrelevante Konstanten.

$$\Rightarrow \Phi^a_m = -\frac{B_0}{\mu_0}x_3 + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}\frac{B_0}{\mu_0}R^3\cdot\frac{x_3}{r^3}, \tag{2.92}$$

wobei der erste Term das homogene äußere Feld wiederspiegelt und der zweite Term ein magnetisches Dipolfeld durch die Polarisation der Kugel.

$$\Phi^i_m = -\frac{3}{\mu_r + 2}\frac{B_0}{\mu_0}x_3,\;\; \vec{B} = -\mu_r\mu_0\vec{\nabla}\Phi^i_m = \frac{3\mu_r}{\mu_r + 2}B_0\vec{e}_3, \tag{2.93}$$

$$\vec{M}^i = \frac{\vec{B}^i - \mu_0\vec{H}^i}{\mu_0} = \ldots = \frac{3(\mu_r - 1)}{\mu_r + 2}B_0\vec{e}_3. \tag{2.94}$$

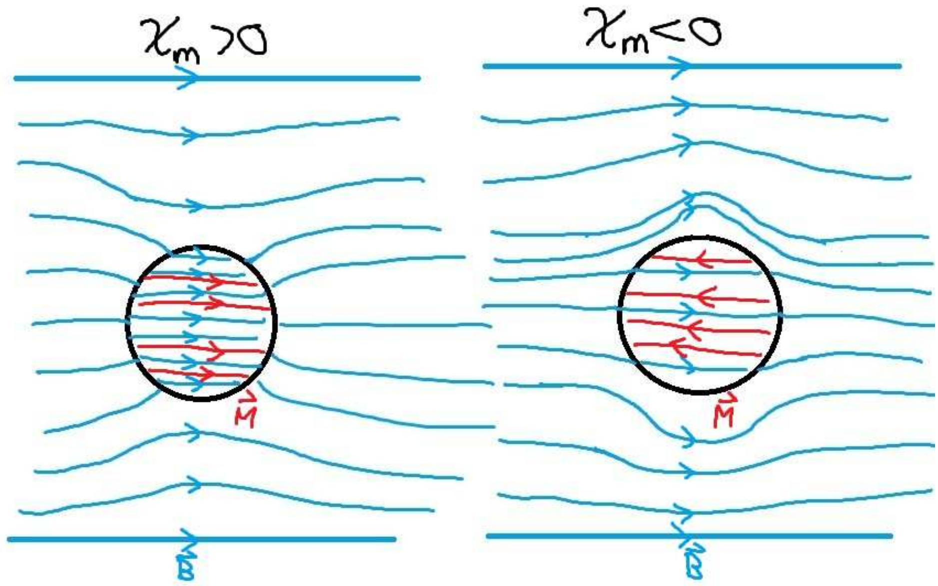

Abbildung 2.11: $\vec{B}$-Felder und Magnetisierung $\vec{M}$ für zwei Kugeln unterschiedlicher mg. Suszeptibilität.