Übungen zur Speziellen Relativitätstheorie SS 2014

Aufgabe 19 *Relativistisches Punktteilchen im elektrischen Feld* (3 Punkte)

Ein relativistisches Teilchen mit Masse m und und Ladung q trete bei $\vec{x} = \vec{0}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_2$ in ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = E\vec{e}_1$ ein. Stellen Sie die relativistische Bewegungsgleichung für den Viererimpuls auf und berechnen Sie die Bahnkurve $\vec{x}(t)$.
Skizze eines möglichen Lösungswegs:

i) Lösen Sie zunächst die Gleichung für den räumlichen Impuls $\vec{p}(t)$.

ii) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $p^0(t) = mc\gamma(t)$ und bestimmen Sie daraus die Funktion $\gamma(t)$.

iii) Bestimmen Sie nun die Bahnkurve $\vec{x}(t)$ aus der Definition von $\vec{p}(t)$.

Aufgabe 20 *Kontinuitätsgleichung* (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Ladungs- und Stromdichte einer Punktladung

$$\rho(t,\vec{z}) = q\delta^3(\vec{z} - \vec{x}(t)) \, , \qquad \vec{j}(t,\vec{z}) = q\dot{\vec{x}}(t)\delta^3(\vec{z} - \vec{x}(t)) \, ,$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho(t,\vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(t,\vec{x}) = 0$$

erfüllen.

Aufgabe 21 *Invariante des Elektromagnetischen Feldes* (3 Punkte)

a) Drücken Sie die Lorentz-Invarianten

$$I_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \, , \quad I_2 = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \, , \quad I_3 = \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$$

durch die elektrischen und magnetischen Felder $E^i = F^{i0}$ und $B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F^{jk}$ aus.

b) Zeigen Sie, dass sich I_2 als totale Ableitung einer Funktion des Vektorpotentials A^μ schreiben lässt.

c) Welche Eigenschaft kennzeichnet I_1 für ein reines elektrisches bzw. magnetisches Feld? Ist es möglich ein reines elektrisches Feld durch eine Lorentztransformation in ein reines Magnetfeld zu transformieren?

Aufgabe 22 *Elektromagnetische Feldgleichungen* (4 Punkte + 2 Bonuspunkte)

a) Leiten Sie aus der Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + A_\mu j^\mu$$

mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen für das Vektorpotential A_μ die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form her.

b) Drücken Sie die Komponenten des Viererimpulses des elektromagnetischen Feldes,

$$P^\mu \equiv \int d^3x\, T^{0\mu},$$

mit dem Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu \right]$$

durch die elektrischen und magnetischen Felder aus.

c) **Bonusaufgabe** Zeigen Sie mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen, dass der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes die Gleichung $\partial_\mu T^{\mu\nu} = j_\rho F^{\rho\nu}$ erfüllt.

Aufgabe 23 *Energie-Impuls-Tensor* (2 Bonuspunkte)

Der Energie-Impuls-Tensor eines Punktteilchens mit Masse m und Bahnkurve $x^\mu(\tau)$ mit der Eigenzeit $d\tau = \gamma^{-1} dt$ lässt sich in der Form

$$T^{\mu\nu}(z) = m \int d\tau\, \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} \delta^{(4)}(z^\rho - x^\rho(\tau))$$

schreiben. Zeigen Sie durch Ausführen der τ Integration, dass die Energiedichte und Impulsdichte sich in die Form

$$T^{00}(z) = m\gamma c\, \delta^3(\vec{z} - \vec{x}(t)) \quad , \qquad T^{i0}(z) = m\gamma\, \frac{dx^i}{dt}\, \delta^3(\vec{z} - \vec{x}(t))$$

bringen lassen.