Übungen zur Speziellen Relativitätstheorie **SS 2014**

Aufgabe 15 *Total antisymmetrischer Tensor* (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Tensor

$$\epsilon(a,b,c,d) = \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} a^{\mu_1} b^{\mu_2} c^{\mu_3} d^{\mu_4}$$

mit dem total antisymmetrischen Symbol

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & (\mu\nu\rho\sigma) \text{ gerade Permutation von } (0123), \\ -1 & (\mu\nu\rho\sigma) \text{ ungerade Permutation von } (0123), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

unter Transformation der Vektoren unter speziellen Lorentz-Transformationen $a^\mu \to a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$ mit $\Lambda \in L_+^\uparrow$ invariant ist.

Aufgabe 16 $(2 \to 2)$-*Teilchen-Kinematik und Mandelstam-Variablen* (4 Punkte)

Man betrachte die Streureaktion $A(p_1) + B(p_2) \to C(p_3) + D(p_4)$ mit den Viererimpulsen p_i und $p_i^2 = m_i^2 c^2$, wobei m_i die Teilchenmassen sind. Die Mandelstam-Variablen s, t, u sind definiert durch $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2$.

a) Zeigen Sie, dass aus der Viererimpulserhaltung die Identität $s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2 c^2$ folgt.

b) Im Massenmittelpunktsystem Σ sind die Impulse gegeben durch

$$p_{1,2}^\mu = (E_{1,2}/c, 0, 0, \pm q), \qquad p_{3,4}^\mu = (E_{3,4}/c, \pm k \cos\phi \sin\theta, \pm k \sin\phi \sin\theta, \pm k \cos\theta).$$

Welche Bedeutung hat die Variable s im Massenmittelpunktsystem? Drücken Sie die Impulse q und k durch s sowie die Massen m_i aus.

(Hinweis: Sie können hier auf Resultate des $1 \to 2$ Teilchenzerfalls aus der Vorlesung zurückgreifen.)

c) Berechnen Sie die Variablen t und u im System Σ und drücken Sie diese durch s, die Winkel θ, ϕ und die Massen m_i aus.

d) Betrachten Sie als Spezialfall die Streureaktion $A(p_1) + B(p_2) \to A(p_3) + B(p_4)$ mit $m_1 = m_3 = 0$, $m_2 = m_4 = m$ im Ruhesystem Σ' von Teilchen B (z.B. Compton-Streuung am ruhenden Elektron). Berechnen Sie die Energie E_3' des auslaufenden Teilchens A als Funktion der Masse m, der Energie E_1' des einlaufenden Teilchens A sowie des Winkels $\theta' = \angle(\vec{p_1}', \vec{p_3}')$ zwischen ein-und auslaufendem Teilchen A.

Hinweis: Werten Sie dazu z.B. die Variable $t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$ auf zwei Arten unter Verwendung der Energieerhaltung aus.

Aufgabe 17 *Erhaltungsgrößen für relativistische Teilchen* (3 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N relativistischen Teilchen mit Raum-Zeitkoordinaten $x_n^\mu(\lambda)$ und verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{x}_n^\mu(\lambda) = \frac{dx_n^\mu(\lambda)}{d\lambda}$. Das System werde von einer Lagrangefunktion

$$L(x_n^\mu, \dot{x}_n^\mu, \lambda)$$

beschrieben, die unter einer infinitesimalen Lorentztransformation

$$x_n^\mu \to x_n^\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon\omega_{\alpha\beta}(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu\, x_n^\nu\,, \quad \text{mit} \quad (M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = \mathrm{i}(g^{\alpha\mu}\delta_\nu^\beta - g^{\beta\mu}\delta_\nu^\alpha)$$

invariant ist.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Noether Theorems, dass es Erhaltungsgrößen Q mit $\frac{dQ}{d\lambda} = 0$ gibt, die sich in der Form

$$Q = \omega_{\alpha\beta}\mathcal{M}^{\alpha\beta}$$

schreiben lassen.

b) Betrachten Sie den nichtrelativistischen Grenzfall der Komponenten $\mathcal{M}^{ij}$ und $\mathcal{M}^{0i}$ und vergleichen Sie diese mit den Erhaltungsgrößen die aus Galilei-Invarianz folgen.

Aufgabe 18 *Variationsprinzip* (3 Punkte)

Betrachten Sie die Wirkung für ein Teilchen der Masse m, das mit einem skalaren Potential $\phi(x)$ wechselwirkt:

$$S = \int d\tau(mc^2 + \kappa\phi(x)) = \frac{1}{c}\int d\lambda\sqrt{\dot{x}^\mu\dot{x}_\nu}(mc^2 + \kappa\phi(x(\lambda)))$$

wobei λ eine beliebige Parametrisierung der Bahnkurve ist und Punkte Ableitungen nach λ bedeuten. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für $x^\mu(\lambda)$ her. Wählen sie $\lambda = \tau$ und identifizieren Sie die Minkowski-Kraft.