Aufgabe 4 *Elektromagnetischer Doppler-Effekt* (2 Punkte)

Betrachtet wird analog zu Aufgabe 1) ein Auto, das diesmal monochromatische elektromagnetische Wellen mit einer Frequenz f_s aussendet und ein Empfänger, der diese Wellen mit einer verschobenen Frequenz f_e empfängt. Die Wellen breiten sich mit der Lichtgeschwindigkeit c aus (der Brechungsindex der Luft werde vernachlässigt). Berechnen Sie f_e/f_s für folgende Situationen.

a) Der Empfänger ist ein Passant, der am Straßenrand steht, das Auto entfernt sich vom Passanten mit der Geschwindigkeit v_s.

b) Das Auto bleibt stehen, der Passant entfernt sich aber nun vom Auto mit der Geschwindigkeit v_e.

Aufgabe 5 *Invariantes Intervall und Vierervektoren* (4 Punkte)

a) Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass das Raum-Zeit Intervall

$$(x_1 - x_2)^2 \equiv (x_1^0 - x_2^0)^2 - (x_1^i - x_2^i)^2$$

invariant ist unter der Lorentz-Transformation der beiden Vierervektoren

$$x_{1/2}^{0'} = \gamma \left(x_{1/2}^0 - (\vec{\beta} \cdot \vec{x}_{1/2}) \right)$$
$$x_{1/2}^{i'} = x_{1/2}^i + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} (\vec{\beta} \cdot \vec{x}_{1/2})\, \beta^i - \gamma\, \beta^i\, x_{1/2}^0$$

b) Ein Vierervektor a^μ heisst nicht-raumartig und zukunftsgerichtet wenn $a^2 \geq 0$ und $a^0 > 0$. Zeigen Sie, dass ein solcher Vierervektor nach einem Lorentz-Boost weiterhin zukunftsgerichtet ist.

c) Zeigen Sie, dass die Summe von zwei nicht-raumartigen und zukunftsgerichteten Vierervektoren wieder nicht-raumartig und zukunftsgerichet ist.

Bitte wenden !

Aufgabe 6 *Galilei Invarianz und Maxwell-Gleichungen* (4 Punkte)

a) Gegeben sei eine elektrische Ladungsverteilung, die in einem Inertialsystem I durch die Ladungsdichte $\rho(t,\vec{x})$ und die Stromdichte $\vec{j}(t,\vec{x})$ beschrieben wird, die die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho(t,\vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t,\vec{x}) = 0$$

erfüllen. Betrachten Sie diese Anordnung nun in einem Inertialsystem I', dessen Koordinaten mit denen von I durch eine Galilei-Transformation verbunden sind:

$$t' = t\,, \qquad \vec{x}\,' = \vec{x} - \vec{v}\,t\,.$$

Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Stromdichte in I', $\vec{j}'(t,\vec{x}')$, so dass die Kontinuitätsgleichung in I' erfüllt ist. Gehen Sie dazu davon aus, dass sich die Ladungsdichte trivial transformiert, d.h. $\rho'(t',\vec{x}') = \rho(t',\vec{x}\,' + \vec{v}t')$

b) Betrachten Sie jetzt den Fall einer statischen Ladungsverteilung in I, d.h. eine zeitunabhängige Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ und verschwindende Stromdichte $\vec{j}(\vec{x}) = 0$, und das resultierende statische elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$. Zeigen Sie, dass im System I' das Amperesche Gesetz

$$\vec{\nabla}' \times \vec{B}' - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}'$$

erfüllt ist, wenn das elektrische und magnetische Feld in I' durch

$$\vec{E}'(\vec{x}\,',t') = \vec{E}(\vec{x}' + \vec{v}t')\,, \quad \vec{B}'(\vec{x}\,',t') = -\frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E}(\vec{x}\,' + \vec{v}t')$$

gegeben sind.

c) Für das statische elektrische Feld im System I gilt $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$. Zeigen Sie, dass daraus folgt

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' = 0.$$

d) Betrachten Sie nun den Fall, dass im System I eine zeitabhängige Ladungsverteilung vorliegt, d.h. sowohl die Ladungsdichte als auch die Stromdichte sind verschieden von Null und es existieren elektrische und magnetische Felder. Zeigen Sie, dass die Maxwell-Gleichungen im System I' nicht erfüllt sind, wenn dieselben Ausdrücke für ρ' und $\vec{j}'$ wie in a) verwendet werden sowie die in der Vorlesung motivierten Transformationen der Felder

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B} \qquad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E}$$