Aufgabe 7 *Aberration* (3 Punkte)

Ein Sender von elektromagnetischen Wellen mit der Kreisfrequenz ω' und Wellenvektor $\vec{k}'$ ruht in einem Inertialsystem I'. Ein Empfänger befindet sich in einem Inertialsystem I, welches sich relativ zu I' mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = c\vec{\beta}$ bewegt. Der Winkel θ zwischen dem Wellenvektor $\vec{k}$ und der Geschwindigkeit in I hängt mit dem entsprechenden Winkel θ' in I' über die Ausdrücke

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}, \qquad \sin\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma(1 + \beta\cos\theta')} \tag{1}$$

zusammen.

a) Zeigen Sie, dass aus (1) der Zusammenhang

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\tan\frac{\theta'}{2} \tag{2}$$

folgt.

b) Entwickeln Sie die Formel (2) für kleine Boost-Geschwindigkeiten $\beta \ll 1$ und Aberrationswinkel $\delta\theta = \theta' - \theta$ bis zur ersten Ordnung in β und $\delta\theta$.

c) Schätzen Sie die Änderung des Winkels, unter dem ein Stern auf der Erde im Laufe eines Jahres gesehen wird in Bogensekunden ab. (Die Umlaufgeschwindigkeit der Erde um die Sonne ist $v \sim 30\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$. Eine Bogensekunde ist $2\pi/360 \times 1/3600$. Dieser Effekt ist 1728 entdeckt worden.)

Aufgabe 8 *Rapidität* (3 Punkte)

Die Lorentz-Boosts lassen sich auch durch die sogenannte Rapidität ν parametrisieren. Für einen Lorentz-Boost in x-Richtung gilt

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \cosh\nu\, x^0 - \sinh\nu\, x \\ x' &= \cosh\nu\, x - \sinh\nu\, x^0 \\ y' &= y\,, \quad z' = z \end{aligned} \tag{3}$$

a) Zeigen Sie, dass die Minkowski-Norm des Vierervektors $x^\mu = (x^0, x, y, z)$ invariant unter der Transformation (3) ist, d.h. dass es sich tatsächlich um eine Lorentz-Transformation handelt.

b) Geben Sie den Zusammenhang von ν und dem Parameter β in der üblichen Form der Lorentztransformation an.

c) Betrachten Sie die Hintereinanderausführung von Lorentz-Boosts mit Rapiditäten ν_1 und ν_2. Zeigen Sie, dass sich das Ergebnis wieder in die Form (3) mit einer Rapidität ν_3 bringen lässt und geben Sie ν_3 als Funktion von ν_1 und ν_2 an.

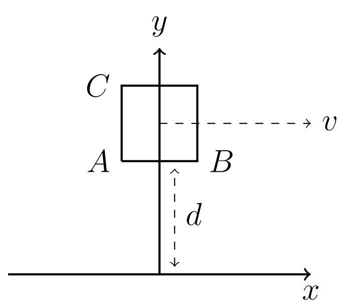
Aufgabe 9 *Optische Erscheinung bewegter Körper* (3 Punkte)

Ein Würfel, der in seinem Ruhesystem die Kantenlänge L hat, fliege mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung an einem Beobachter vorbei. Zum Zeitpunkt T macht der Beobachter eine Aufnahme von dem Würfel auf einem auf der x-Achse angebrachten Film. Der Abstand des Mittelpunkts der Kante A-B vom Beobachter zum Zeitpunkt T sei d in y-Richtung. Es sei $d \gg L$, so sie annehmen können, dass vom Würfel ausgehende Lichtstrahlen senkrecht auf dem Film auftreffen.

a) Zu welchen Zeiten wurde Licht von den Ecken A, B, C der Bodenplatte des Würfels ausgesandt, das zum Zeitpunkt T auf dem Film auftrifft?

b) An welchen Punkten auf dem Film kommt das Licht von den Ecken A, B und C an? Wie groß sind die Abstände der Bilder von B und A sowie der Bilder von B und C?

c) Argumentieren Sie, dass der Würfel auf der zum Zeitpunkt T erstellten Photographie nicht Lorentz-kontrahiert sondern verdreht erscheint.



Aufgabe 10 *Zwillingsparadoxon* (3 Punkte)

Eine Rakete startet zur Zeit $t = 0$ in Ursprung des Koordinatensystems und beschleunigt in x-Richtung, wendet zur Zeit $\bar{t}$ und kehrt zur Zeit $t = 2\bar{t}$ zum Ursprung zurück. Die Bahnkurve der Rakete sei durch einen Parameter λ wie folgt parametrisiert

$$t(\lambda) = \bar{t} + \frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a}{c}(\lambda - \bar{\lambda})\right) \ , \quad x(\lambda) = \bar{x} - \frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a}{c}(\lambda - \bar{\lambda})\right) \ , \quad y(\lambda) = 0 \ , \quad z(\lambda) = 0$$

Hier sind $\bar{t} = \frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a}{c}\bar{\lambda}\right)$ sowie $\bar{x} = \frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a}{c}\bar{\lambda}\right)$. Berechnen Sie die Eigenzeit τ,

$$\tau = \int d\tau = \int d\lambda \sqrt{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{x}}{d\lambda}\right)^2},$$

die auf der Rakete auf dem Flug von $x_1^\mu = (0, \vec{0})$ nach $x_2^\mu = (2\bar{t}, \vec{0})$ vergeht und zeigen Sie $\tau < 2\bar{t}$. Wie groß ist τ für $a = 9.81\text{m/s}^2$ und $\bar{t} =$ ein Jahr?