Übungsblatt Nr. 13

Aufgabe 13.1: Energie-Impuls-Tensor (Präsenzaufgabe)

Der Energie-Impuls-Tensor ist der erhaltene Strom, der zur Invarianz unter Raumzeit-Translation gehört. Wie in der Vorlesung gezeigt, ist er im Falle eines Skalarfeldes Φ gegeben durch:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial^\nu \Phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Betrachten Sie nun die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - V(\Phi)$$

für ein beliebiges Potential $V(\Phi)$ und bestimmen Sie den Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$. Lesen Sie aus der ersten Zeile $T^{0\mu}$ die Dichte des Feldimpulses ($\mu = 1 \dots 3$) und der Energie ($\mu = 0$) ab. Vergleichen Sie die Energiedichte T^{00} mit der Hamiltondichte.

Aufgabe 13.2: Goldstone-Modell (Präsenzaufgabe)

Betrachten Sie folgende Lagrangedichte für zwei skalare Felder Φ_1 und Φ_2 :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - V(\Phi) \quad \text{mit} \quad V(\Phi) = -\frac{\mu^2}{2} |\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\Phi|^4, \quad \mu, \lambda > 0$$

$$|\Phi|^2 \equiv \Phi_1^2 + \Phi_2^2$$

a) Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte unter der Transformation $\Phi_i \rightarrow \Phi'_i$ mit

$$\begin{pmatrix} \Phi'_1 \\ \Phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

invariant ist. Nach dem *Noethertheorem* impliziert die Invarianz der Lagrangedichte unter einer infinitesimalen ($\varepsilon \ll 1$) Transformation $\Phi_i \rightarrow \Phi'_i = \Phi_i + \varepsilon \Delta \Phi_i$ die Existenz einer erhaltenen Stromdichte

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} \Delta \Phi_i$$

mit $\partial_\mu j^\mu = 0$. Berechnen Sie die Stromdichte, die aus der Symmetrie (1) für infinitesimale Transformationen $\alpha = \varepsilon$ folgt.

b) Skizzieren Sie das Potential $V(\Phi)$ als Funktion von $|\Phi|$ und leiten Sie die Bedingungen für Extrema des Potentials her. Diskutieren Sie, dass sich das Minimum des Potentials ohne Einschränkung der Allgemeinheit als

$$\Phi_{0,1} = \sqrt{\mu^2/\lambda} := v, \quad \Phi_{0,2} = 0$$

parameterisieren lässt.

c) Entwickeln Sie das Potential bis zur quadratischen Ordnung um das Minimum, indem Sie die Felder als $\Phi_i = \Phi_{0,i} + \phi_i$ schreiben:

$$\mathcal{L} = -V(\Phi_0) + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} \Big|_{\Phi_0} \phi_i \phi_j + \mathcal{O}(\phi_i^3)$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Lagrangedichte für skalare Felder ϕ_i mit Massen m_i ,

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{m_i^2}{2} \phi_i^2 + \dots \right]$$

und bestimmen Sie beide Massenparameter.

Bemerkung: Das in dieser Aufgabe diskutierte Modell ist ein Beispiel für das Phänomen der sogenannten „Spontanen Symmetriebrechung“: Die Lagrangefunktion ist invariant unter einer Symmetrie, aber der Grundzustand des Systems (das Minimum des Potentials) ist dies nicht. Allgemein lässt sich zeigen, dass bei spontan gebrochenen kontinuierlichen Symmetrien masselose Skalarfelder auftreten, sogenannte „Goldstone-Bosonen“. Das hier diskutierte Modell lässt sich weiterhin an das elektromagnetische Feld koppeln, dies führt dazu, dass das elektromagnetische Feld massiv wird. Eine Verallgemeinerung dieses Mechanismus wird verwendet, um die Massen der W- und Z-Bosonen der schwachen Wechselwirkung zu beschreiben. In diesem Zusammenhang wird das auftretende massive Skalarfeld „Higgs-Boson“ genannt.