Übungsblatt Nr. 12

Abgabe bis Freitag, 1.02.2013, 11:15 Uhr

Aufgabe 12.1: Relativistisches Teilchen im magnetischen und elektrischen Feld (Hausaufgabe)

Die Bewegung eines relativistischen Punktteilchens in magnetischen und elektrischen Feldern ist durch die relativistische Form der Lorentz-Kraft gegeben:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} = qF^{\mu\nu}u_\nu \qquad \text{mit} \quad p^\mu = mu^\mu = m\gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \quad F^{i0} = -F^{0i} = E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk}B^k.$$

a) Ein relativistisches Teilchen mit Masse m und und Ladung q trete zur Zeit $t = 0$ bei $\vec{x} = \vec{0}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_1$ in ein homogenes magnetisches Feld $\vec{B} = B\vec{e}_2$ ein. Berechnen Sie die Energie $E = cp^0$ des Teilchens und die Bahnkurve $\vec{x}(t)$. (4 Punkte)

b) Zusätzlich zum Magnetfeld aus 12.1 a) sei nun ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = E\vec{e}_3$ vorhanden, für das $|E| < |B|$ erfüllt ist. Zeigen Sie, dass sich das Problem durch eine Lorentztransformation in x_1-Richtung auf den in 12.1 a) betrachteten Fall zurückführen lässt. (3 Punkte)

Aufgabe 12.2: Übergang zur Feldtheorie

Betrachten Sie eine Kette von Massepunkten der Masse m an den Orten x_i, $i = 1, \dots N$, welche mit Federn (mit Federkonstante k) verbunden sind. In der Ruhelage ist der Abstand der Massenpunkte durch a gegeben. Die Lagrangefunktion des Systems ist

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(m\dot{x}_i^2 - k(x_{i+1} - x_i)^2\right) \tag{1}$$

Es seien periodische Randbedingungen gegeben, d.h. $x_{N+1} = x_1$.

a) Bilden Sie in der Lagrangefunktion (1) den Grenzübergang $N \to \infty$ wobei

$$a \to 0\,, \quad m/a \to \varrho = \text{const.}\,, \qquad ak \to \eta = \text{const.}$$

Definieren Sie dazu die Größen $\varphi(x, t)$ mit $\varphi(x_i, t) = x_i(t)$ und benutzen Sie

$$\lim_{a\to 0} \frac{x_{i+1} - x_i}{a} = \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_i}\,, \qquad \sum_i a \to \int d\,x.$$

Drücken Sie die Lagrangefunktion durch eine *Lagrangedichte* $\mathcal{L}$ aus, so dass $L = \int d\,x\mathcal{L}(\dot{\varphi}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \varphi)$. Leiten Sie die Feldgleichung für φ mit Hilfe der Euler-Lagrangegleichung der Feldtheorie her:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0.$$

b) **(Hausaufgabe)** Leiten Sie aus der Lagrangefunktion des endlichen Systems (1) die Bewegungsgleichungen für die $x_i(t)$ her. Bilden Sie für diese Bewegungsgleichungen wie in 12.2 a) den Grenzübergang $N \to \infty$ und vergleichen Sie mit der dort erhaltenen Feldgleichung. (3 Punkte)