Übungsblatt Nr. 4

Abgabe bis Donnerstag, 22.11.2012, 11:15 Uhr

Aufgabe 4.1: Ladungsdichte und Stromdichte

Die Ladungsdichte und Stromdichte einer Ansammlung von n Punktteilchen mit Ladungen q_i mit den Bahnkurven $\vec{x}_i(t)$ und Geschwindigkeiten $\vec{v}_i(t)$ sind durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\rho_{\text{Teilchen}}(\vec{x},t) = \sum_i q_i \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i(t)) \;, \qquad \vec{j}_{\text{Teilchen}}(\vec{x},t) = \sum_i q_i \vec{v}_i(t)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i(t)).$$

a) Betrachten Sie ein kleines Volumen ΔV in dem sich ΔN Punktteilchen mit gleicher Ladung q befinden. Die mittlere Stromdichte $\vec{j}$, die mittleren Ladungsdichte ρ und die mittleren Geschwindigkeit $\vec{v}$ sind definiert als

$$\vec{j}(\Delta V) := \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3x \vec{j}_{\text{Teilchen}}(\vec{x},t) \;, \qquad \rho(\Delta V) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3x \rho_{\text{Teilchen}}(\vec{x},t)$$
$$\vec{v}(\Delta v) = \frac{1}{\Delta N}\sum_{\Delta V} \vec{v}_i(t) \;,$$

wobei die Summe in der Definition von $\vec{v}(\Delta v)$ über alle Teilchen im Volumen ΔV läuft.

Zeigen Sie, dass die mittlere Stromdichte durch

$$\vec{j}(\Delta V) = \rho(\Delta V)\vec{v}(\Delta V)$$

gegeben ist.

b) *Stationäre* Ströme sind dadurch definiert, dass die Ladungsdichte und die Stromdichte zeitlich konstant sind. Welche Konsistenzbedingung muss die Stromdichte im stationären Fall erfüllen?

c) **(Hausaufgabe)** Geben Sie die Ladungs- und Stromdichte einer homogen geladenen Leiterschleife mit Gesamtladung Q und Radius R an, in der ein konstanter Strom I fließt. Ist der Strom stationär? (2 Punkte)

d) **(Hausaufgabe)** Eine Kugel vom Radius R, auf deren Oberfläche die Ladung Q gleichmäßig verteilt ist, rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine Achse durch den Kugelmittelpunkt. Geben Sie die Ladungsdichte und die Stromdichte an. (2 Punkte)

Aufgabe 4.2: Rotationssymmetrische Ladungsverteilung

Betrachten Sie eine rotationssymmetrische Ladungsverteilung, d.h. eine Ladungsdichte $\rho(r)$, die nur von $r = |\vec{x}|$ abhängt.

a) Zeigen Sie unter Verwendung des Gauss'schen Satzes, dass das Elektrische Feld im Abstand r vom Zentrum der Ladungsverteilung durch folgenden Ausdruck gegeben ist (siehe Vorlesung):

$$\vec{E}(r) = \frac{4\pi}{r^2}\vec{e}_r \int_0^r dr' {r'}^2 \rho(r')$$

b) **(Hausaufgabe)** Die rotationssymmtrische Ladungsverteilung habe nun ein Loch mit Radius r_0 um den Ursprung, d.h. $\rho(r) = 0$ für $r < r_0$. Geben Sie das Elektrische Feld im Inneren des Loches an. (2 Punkte)

c) **(Hausaufgabe)** Betrachten Sie eine rotationssymmetrische Ladungsverteilung, die für $r > r_0$ verschwindet. Geben Sie das Elektrische Feld außerhalb der Ladungsverteilung an. (2 Punkte)

d) **(Hausaufgabe)** Berechnen Sie das Elektrische Feld innerhalb einer homogen geladenen Kugel ($\rho(r) = \rho_0$ für $r < r_0$). (2 Punkte)