Übungsblatt Nr. 3

Abgabe bis Donnerstag, 15.11.2012, 11:15 Uhr

Aufgabe 3.1: DIRACsche δ-Distribution

Die DIRACsche δ-Distribution ist definiert durch:

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}x\, f(x)\delta(x-x_0) := f(x_0)\,, \quad \alpha < x_0 < \beta\,.$$

a) **(Präsenzaufgabe)** Konstruieren Sie unter Verwendung der δ-Distribution eine Distribution $\Delta(r)$ (hier nicht der Laplace-Operator!), die folgendermaßen definiert sei:

$$\int_\mathcal{V} \mathrm{d}V\, f(r)\Delta(r) := f(0)\,, \quad \vec{0} \in \mathcal{V}$$

Hierbei hängt die rotationssymmetrische Funktion $f(r)$ nur vom Radialabstand $r = |\vec{r}|$ ab.

b) **(Hausaufgabe)** Eine dreidimensionale δ-Distribution lässt sich analog über das Volumenintegral wie folgt definieren: (4 Punkte)

$$\int_\mathcal{V} \mathrm{d}V\, f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) := f(\vec{r}_0)\,, \quad \vec{r}_0 \in \mathcal{V}$$

Diese Definition lässt sich auch für krummlinige Orthogonalkoordinaten (q_1, q_2, q_3) anwenden.

Zeigen Sie, dass die δ-Distribution sich dann allgemein in der Form $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \gamma(q_1,q_2,q_3)\delta(q_1-q_{1,0})\delta(q_2-q_{2,0})\delta(q_3-q_{3,0})$ durch drei eindimensionale δ-Distributionen ausdrücken lässt und bestimmen Sie $\gamma(q_1,q_2,q_3)$ aus den Koeffizienten h_i vom ersten Übungsblatt.

Wie lautet $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ dann speziell in Zylinder- und Kugelkoordinaten?

Aufgabe 3.2: δ-Distribution und GREENsche Funktion in 1D (Präsenzaufgabe)

Gegeben sei der lineare Differentialoperator $\mathrm{L} := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$. Man betrachte die zugehörige lineare Differentialgleichung mit einer δ-Distribution als Inhomogenität:

$$\mathrm{L}\, G(t-t_0) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} G(t-t_0) = \delta(t-t_0) \tag{1}$$

Eine Lösung $G(t-t_0)$ dieser Gleichung nennt man GREEN*sche Funktion von* L.

a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung erfüllt wird von

$$G_1(t-t_0) = \begin{cases} 0, & \text{für } t-t_0 < 0 \\ t-t_0, & \text{für } t-t_0 > 0 \end{cases}\,.$$

b) Veranschaulichen Sie für sich, dass sich $\delta(t-t_0)$ in diesem Fall als Kraftstoß zum Zeitpunkt $t = t_0$ interpretieren lässt, der ein ruhendes Teilchen in ein mit der Geschwindigkeit $v = 1$ bewegtes Teilchen versetzt.

Hinweis: Das Problem sei hier geeigneterweise in dimensionslosen Größen betrachtet.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f(t)$ der homogenen Differentialgleichung $\mathrm{L}\, f(t) = 0$. Zeigen Sie damit, dass $G_1(t - t_0)$ als Lösung von (1) nicht eindeutig ist.

d) Finden Sie die spezielle Lösung $G_2(t - t_0)$ von (1), bei der der Kraftstoß das Teilchen für $t > t_0$ zur Ruhe bringt.

e) Zeigen Sie, dass die Lösung der DGL für eine beliebige Inhomogenität $\mathrm{L}\, g(t) = F(t)$ aus einer GREENschen Funktion einfach durch Integrieren gewonnen werden kann:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_0 G(t - t_0) F(t_0) \tag{2}$$

Aufgabe 3.3: GREENsche Funktion des harmonischen Oszillators (Hausaufgabe) Betrachten Sie nun in Analogie zu Aufgabe 3.2 den linearen Differentialoperator des harmonischen Oszillators:

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2$$

a) Zeigen Sie, dass $G(t - t_0) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t - t_0))\theta(t - t_0)$ eine GREENsche Funktion von L ist, also folgende Gleichung erfüllt:

$$\mathrm{L}G(t - t_0) = \delta(t - t_0). \tag{3}$$

(2 Punkte)

b) Stellen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems $\mathrm{L}\, f(t) = 0$ auf. Konstruieren Sie eine Lösung von (3), bei der der Kraftstoß den Oszillator für $t > t_0$ zur Ruhe bringt. (2 Punkte)

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von (2) und der in 3.3 a) gegebenen GREENschen Funktion die Lösung $g(t)$ der Bewegungsgleichung für einen mit einer Kraft $F(t) = \sin(\omega_0 t)\theta(t)$ getriebenen Oszillator. (2 Punkte)