# Übungsblatt Nr. 1

## Abgabe bis Freitag, 2.11.2012, 11:15 Uhr

### Aufgabe 1.1: Levi-Civita-Symbol

Das Levi-Civita-Symbol $\epsilon_{ijk}$ mit $i, j, k = 1, 2, 3$ ist definiert durch

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (ijk) = (123), (231), (312), \\ -1 & \text{für } (ijk) = (213), (132), (321), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols lassen sich die Komponenten eines Vektorproduktes gemäß $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k$ schreiben.

**a) (Präsenzaufgabe)** Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl},$$
$$\sum_{k,l} \epsilon_{ikl}\epsilon_{jkl} = 2\delta_{ij}.$$

**b) (Präsenzaufgabe)** Beweisen Sie folgende Relationen mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}),$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \left(\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{d})\right) \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{d})\right) \vec{a}.$$

**c) (Hausaufgabe)** Zeigen Sie, dass sich die Determinante einer $3 \times 3$ Matrix $A$ als (2 Punkte)

$$\det A = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\, A_{1i}\, A_{2j}\, A_{3k}$$

schreiben lässt.

---

### Aufgabe 1.2: Identitäten für den $\vec{\nabla}$-Operator (Hausaufgabe) (3 Punkte)

Leiten Sie folgende Identitäten her:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}),$$
$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot F) + (G \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G}.$$

Verwenden Sie dazu die Produktregel der Differentiation sowie geeignete Rechenregeln für Vektoren mit Hilfe des oben eingeführten Levi-Civita-Symbols.

*(bitte wenden ...)*

**Aufgabe 1.3: Gradient und Volumen in krummlinigen Orthogonalkoordinaten**

Der *Gradient* einer skalaren Funktion Funktion $F$ ist durch das Differential definiert:

$$dF(\vec{r}) = \vec{\nabla}F(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \tag{1}$$

In dieser Aufgabe sollen die Komponenten des Gradienten sowie das Volumenmaß in krummlinigen Koordinatensystemen $(q_1, q_2, q_3)$, wie z.B. Kugelkoordinaten $(r, \varphi, \theta)$ oder Zylinderkoordinaten $(\rho, \varphi, z)$, berechnet werden. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

**a) (Präsenzaufgabe)** Die *Einheitsvektoren* der krummlinigen Koordinaten sind durch

$$\vec{f}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\,, \quad h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|$$

definiert. Für Orthogonalkoordinaten gilt $\vec{f}_i \cdot \vec{f}_j = \delta_{ij}$. Zeigen Sie, dass die durch $(\vec{\nabla}F)_i = \vec{f}_i \cdot \vec{\nabla}F$ definierten Komponenten des Gradienten bezüglich der Einheitsvektoren $\vec{f}_i$ durch

$$(\vec{\nabla}F)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial F}{\partial q_i}$$

gegeben sind. Verwenden Sie dazu die Definition (1) sowie die Kettenregel.

**b) (Präsenzaufgabe)** Berechnen Sie die Komponenten des Gradienten in Zylinderkoordinaten, $\vec{r} = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$, und Kugelkoordinaten, $\vec{r} = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$.

**c) (Hausaufgabe)** Das infinitesimale Volumenelement $\mathrm{d}V$ lässt sich für beliebige Koordinaten als Spatprodukt der Differentiale $\mathrm{d}\vec{r}_{q_i}$ in Richtung der Koordinatenlinien aufstellen. Bestimmen Sie davon ausgehend das Transformationsverhalten $\mu(q_1, q_2, q_3)$ des Volumenelements (3 Punkte)

$$\mathrm{d}V = \mu(q_1, q_2, q_3)\; \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3\ .$$

**d) (Hausaufgabe)** Berechnen Sie $\mu(q_1, q_2, q_3)$ in Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten. (2 Punkte)