Übungsblatt Nr. 5

Abgabe bis Freitag, 30.11.2012, 11:15 Uhr

Aufgabe 5.1: Randwertprobleme in der Ebene

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist jede komplexe differenzierbare Funktion $f(z)$ mit $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) eine Lösung der Laplacegleichung in zwei Dimensionen,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Erfüllt der Imaginärteil der Funktion, $\Phi(x, y) = \mathrm{Im} f(x, y)$ die Bedingung $\Phi = 0$ auf einer gegebenen Fläche A, beschreibt dieser also das elektrostatische Potential in einer ladungsfreien Ebene mit der Randbedingung $\Phi|_A = 0$. Die Linien $\mathrm{Re} f(x, y)$ =const. beschreiben die Feldlinien des elektrischen Feldes.

a) Betrachten Sie jetzt die komplexe Funktion

$$f(z) = a\, z^2\,, \quad z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}.$$

Für welches physikalische Problem ergibt der Imaginärteil dieser Funktion das elektrostatische Potential? Skizzieren Sie die Äquipotentialflächen und die Feldlinien.

b) **(Hausaufgabe)** Betrachten Sie die komplexe Funktion (2 Punkte)

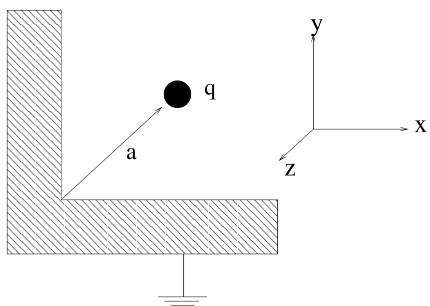
$$f(z) = a\, z^\alpha, \quad z \in \mathbb{C}, a, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für welches physikalische Problem ergibt der Imaginärteil dieser Funktion das elektrostatische Potential?

Aufgabe 5.2: Punktladung vor Metallplatten

Eine Punktladung q befinde sich an einem beliebigen Ort $\vec{a}$ vor zwei metallischen, geerdeten Platten, die sich in einem Winkel von $90°$ schneiden . Die Platten werden als ins Unendliche ausgedehnte Halbebenen behandelt. (siehe Skizze).

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der Bildladungen das Potential $\Phi(\vec{r})$ in dem Quadranten, in dem sich die Punktladung befindet. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass die Punktladung in der x-y-Ebene liegt und der Koordinatenursprung in der Schnittgerade der Halbebenen.



b) **(Hausaufgabe)** Berechnen Sie den ersten nichtverschwindenden Beitrag zum Potential und dem elektrischen Feld in der Nähe der Metallplatten, das heisst für Abstände, die viel kleiner sind als der Abstand der Punktladung von den Platten. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabe 5.1 a). (6 Punkte)

c) (Hausaufgabe) Geben Sie die Greensche Funktion des Problems aus Aufgabe 5.2 a) an, d.h. eine Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$, die das Potential einer Punktladung $q = 1$ bei $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ im Quadranten $x > 0, y > 0$ beschreibt und die auf den Metallplatten verschwindet: (2 Punkte)

$$\vec{\nabla}^2 G(\vec{r} - \vec{r}_0) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad \text{mit} \quad G(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad \text{für } x = 0, y > 0 \text{ und } y = 0, x > 0.$$

Es befinde sich nun eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ im Quadranten $x > 0, y > 0$. Bestimmen Sie das Potential in diesem Quadranten mit Hilfe der Greenschen Funktion.