Prof. Dr. Thomas Filk
Dr. Christian Schwinn
Dr. Frank Siegert

Übungsblatt Nr. 10

Abgabe bis Freitag, 18.01.2013, 11:15 Uhr

Aufgabe 10.1: Infinitesimale Lorentz-Transformationen

a) **(Präsenzaufgabe)** Entwickeln Sie die Lorentztransformationen in x_i-Richtung, $\Lambda(\vec{v}_i)$ mit $\vec{v}_i = v_i\vec{e}_i$, für kleine Geschwindigkeiten v_i bis einschließlich zur Ordnung $(v_i/c)^2$. Zeigen Sie, dass sich das Ergebnis in folgender Form schreiben lässt:

$$\Lambda(\vec{v}_i) = \mathbf{1} - \frac{v_i}{c}K_i + \frac{1}{2}\left(\frac{v_i}{c}\right)^2 K_i^2 + \mathcal{O}\left(\frac{v_i}{c}\right)^3$$

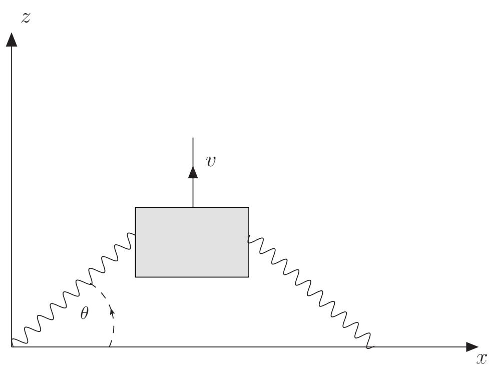
und geben Sie die Matrizen K_i an (dies sind die sogenannten „infinitesimalen Erzeugenden“ oder „Generatoren“ der Lorentztransformationen).

b) **(Hausaufgabe)** Betrachten Sie nun folgendes Produkt von Lorentztransformationen in die x bzw. y Richtung: $W = \Lambda(-\vec{v}_2)\Lambda_1(-\vec{v}_1)\Lambda_2(\vec{v}_2)\Lambda_1(\vec{v}_1)$. Berechnen Sie W für kleine Geschwindigkeiten inklusive aller Terme der Ordnung $\mathcal{O}(1/c^2)$. (4 Punkte)
Hinweis: Hier sollte das Matrixprodukt $K_1K_2 - K_2K_1$ auftreten.

Welche Koordinatentransformation beschreibt W? Welches Ergebnis würden Sie bei Galilei-Transformationen erhalten?

Aufgabe 10.2: $E = mc^2$ (Präsenzaufgabe)

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Äquivalenz von Masse und Energie eine Konsquenz der Impulserhaltung ist (nach einem Argument von A.Einstein, 1946.).
Gegeben sei ein Körper mit Masse M, der in seinem Ruhesystem zur gleichen Zeit aus positiver und negativer x-Richtung eintreffende Lichtpakete mit Energie $\Delta E/2$ absorbiert, d.h. die Energie des Körpers wächst um ΔE an. Wir betrachten dieses System nun in einem Bezugssystem, in dem sich der Körper mit der Geschwindigkeit $v \ll c$ in z-Richtung bewegt (siehe Skizze). Verwenden Sie die Erhaltung der z-Komponente des Impulses, um zu zeigen, dass sich die Masse des Körpers durch die Absorption der Lichtimpulse um $\Delta M = \Delta E/c^2$ erhöht.



Hinweise:
Terme der Ordnung $(v/c)^2$ können vernachlässigt werden. In dieser Näherung gilt $\theta \approx v/c$ für den Winkel zwischen der Richtung der Lichtpakete und der x-Achse.
Der Betrag des Impulses der Lichtpakete ist jeweils durch $|\Delta\vec{p}| = (\Delta E)/(2c)$ gegeben.

Aufgabe 10.3: Wirkungsprinzip (Hausaufgabe)

Eine Lagrangefunktion für ein freies, relativistisches Punktteilchen ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = -m\,c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\right)^2}$$

a) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für $\vec{x}(t)$ auf. (2 Punkte)

b) Stellen Sie die Hamilton-Funktion (3 Punkte)

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - L(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$$

mit den kanonischen Impulsen $p^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}$ auf und leiten Sie daraus die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für $\vec{x}(t)$ und $\vec{p}(t)$ her. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus a).

c) Geben Sie die allgemeine Lösung für die Bahnkurve $\vec{x}(t)$ an. (1 Punkt)