Übungsblatt Nr. 9

Abgabe bis Freitag, 11.01.2013, 11:15 Uhr

Aufgabe 9.1: Elektromagnetische Wellen

a) (Präsenzaufgabe) Die elektrischen und magnetischen Felder einer *ebenen Welle* seien durch

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\ , \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta)$$

gegeben. Welcher Zusammenhang muss zwischen $\vec{k}$ und ω bestehen, damit $\vec{E}$ und $\vec{B}$ jeweils die freie Wellengleichung erfüllen?

b) (Präsenzaufgabe) Die elektrischen und magnetischen Felder einer *Kugelwelle* seien durch

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 \frac{\sin(kr - \omega t)}{r}\ , \qquad \vec{B}(r,t) = \vec{B}_0 \frac{\sin(kr - \omega t + \delta)}{r}$$

gegeben, wobei $r = |\vec{r}|$. Welcher Zusammenhang muss zwischen k und ω bestehen, damit $\vec{E}$ und $\vec{B}$ jeweils die freie Wellengleichung erfüllen?

(*Bemerkung:* Die Kugelwelle beschreibt die von einem oszillierenden elektrischen Dipol erzeugten Felder im Fernfeld, d.h. für Abstände r die viel größer sind als die Ausdehnung des Dipols und die Wellenlänge der Strahlung.)

c) (Hausaufgabe) Welche Relationen müssen die Konstanten $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$, $\vec{k}$, und δ erfüllen, so dass die elektrischen und magnetischen Felder der ebenen Welle aus 9.1 a) Lösungen der Maxwell-Gleichungen im Vakuum sind (d.h. für $\rho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$). Welche Bedeutung haben diese Konstanten? (4 Punkte)

d) (Hausaufgabe) Bestimmen Sie analog zu Aufgabe 9.1 c) die Bedingungen an die Größen $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$, und δ, für die die Kugelwelle aus 9.1 b) die Maxwell-Gleichungen im Vakuum löst. Betrachten Sie dabei nur $r \neq 0$ und den Grenzfall $k \gg \frac{1}{r}$, d.h. das Fernfeld einer Quelle bei $r = 0$. (4 Punkte)

Hinweis: Die Rechnung vereinfacht sich in kartesischen Koordinaten durch Verwendung der Relation $\frac{\partial f(r)}{\partial r_i} = \frac{r_i}{r} f'(r)$.

Aufgabe 9.2: Relativistische Addition von Geschwindigkeiten (Hausaufgabe) (2 Punkte)

Eine Lorentztransformation von einem Inertialsystem Σ in ein Inertialsystem Σ_1, welches sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = v_1 \vec{e}_x$ gegenüber Σ bewegt, hat die Form

$$\Lambda(v_1\vec{e}_x) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1 \frac{v_1}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma_1 \frac{v_1}{c} & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - v_1^2/c^2}$. Betrachten Sie eine Lorentztransformationen von Σ_1 in ein Inertialsystem Σ_2, welches sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2 = v_2\vec{e}_x$ relativ zu Σ_1 bewegt. Mit welcher Geschwindigkeit $\vec{V}$ bewegt sich Σ_2 relativ zu Σ?