Übungsblatt Nr. 13

Aufgabe 13.1: Energie-Impuls-Tensor (Präsenzaufgabe)

Der Energie-Impuls-Tensor ist der erhaltene Strom, der zur Invarianz unter Raumzeit-Translation gehört. Wie in der Vorlesung gezeigt, ist er im Falle eines Skalarfeldes Φ gegeben durch:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial^\nu \Phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \; .$$

Betrachten Sie nun die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \, \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - V(\Phi)$$

für ein beliebiges Potential $V(\Phi)$ und bestimmen Sie den Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$. Lesen Sie aus der ersten Zeile $T^{0\mu}$ die Dichte des Feldimpulses ($\mu = 1 \ldots 3$) und der Energie ($\mu = 0$) ab. Vergleichen Sie die Energiedichte T^{00} mit der Hamiltondichte.

Solution:

- $T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi + \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi) - \eta^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial_\rho \Phi \, \partial^\rho \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - V(\Phi) \right]$
- $T^{0\mu} = \dot{\Phi} \, \partial^\mu \Phi - \eta^{0\mu} \left[\frac{1}{2} \partial_\rho \Phi \, \partial^\rho \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - V(\Phi) \right] \Rightarrow$
  $T^{0i} = -\dot{\Phi} \, (\vec{\nabla} \Phi)_i$
  $T^{00} = \dot{\Phi}^2 - \left[\frac{1}{2} \partial_\rho \Phi \, \partial^\rho \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - V(\Phi) \right]$
- $\mathcal{H} = \Pi \dot{\Phi} - \mathcal{L} = \dot{\Phi}^2 - \left[\frac{1}{2} \partial_\rho \Phi \, \partial^\rho \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - V(\Phi) \right] = T^{00}$
  with canonical momentum $\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \frac{1}{2}(\partial_0 \Phi + \partial_0 \Phi) = \dot{\Phi}$

Aufgabe 13.2: Goldstone-Modell (Präsenzaufgabe)

Betrachten Sie folgende Lagrangedichte für zwei skalare Felder Φ_1 und Φ_2:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - V(\Phi) \quad \text{mit} \qquad V(\Phi) = -\frac{\mu^2}{2}|\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4}|\Phi|^4 \ , \quad \mu, \lambda > 0$$

$$|\Phi|^2 \equiv \Phi_1^2 + \Phi_2^2$$

a) Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte unter der Transformation $\Phi_i \to \Phi_i'$ mit

$$\begin{pmatrix} \Phi_1' \\ \Phi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

invariant ist. Nach dem *Noethertheorem* impliziert die Invarianz der Lagrangedichte unter einer infinitesimalen ($\varepsilon \ll 1$) Transformation $\Phi_i \to \Phi_i' = \Phi_i + \varepsilon \Delta\Phi_i$ die Existenz einer erhaltenen Stromdichte

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} \Delta\Phi_i$$

mit $\partial_\mu j^\mu = 0$. Berechnen Sie die Stromdichte, die aus der Symmetrie (1) für infinitesimale Transformationen $\alpha = \varepsilon$ folgt.

Solution:
Since (1) is just a two-dimensional rotation it is clear that $|\Phi'| = \Phi$ and similarly for the kinetic term. The infinitesimal transformation is

$$\begin{pmatrix} \Phi_1' \\ \Phi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \left[\mathbb{I} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$$

Therefore the infinitesimal transformation is given by

$$\Delta\Phi_i = \epsilon_{ij}\Phi_j$$

with $\epsilon_{12} = 1 = -\epsilon_{21}$, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$. The conserved current is given by

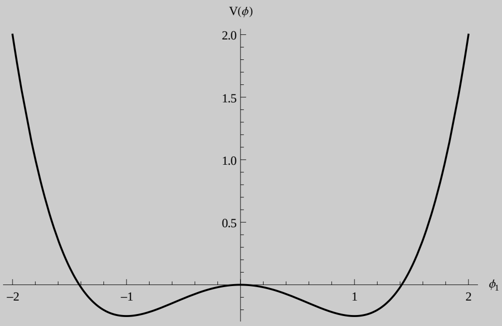
$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} \Delta\Phi_i = \epsilon_{ij}(\partial^\mu \Phi_i)\Phi_j = (\partial_\mu \Phi_1)\Phi_2 - \Phi_1 \partial_\mu \Phi_2,$$

b) Skizzieren Sie das Potential $V(\Phi)$ als Funktion von $|\Phi|$ und leiten Sie die Bedingungen für Extrema des Potentials her. Diskutieren Sie, dass sich das Minimum des Potentials ohne Einschränkung der Allgemeinheit als

$$\Phi_{0,1} = \sqrt{\mu^2/\lambda} := v \ , \qquad \Phi_{0,2} = 0$$

parameterisieren lässt.

Solution:
Accordign to the problem only the potential as a function of $|\Phi|$ should be sketched but is useful to discuss this a bit more generally. As a function of Φ_1 for $\Phi_2 = 0$ the potential is given in the following figure:



The potential in the Φ_1-Φ_2 plane is obtained by rotating around the y-axis and the figure for potential as a function of $|\Phi|$ is obtained by restricting to the positive x-axis.

The condition for extrema is

$$\frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi_i}|_{\Phi_0} = \Phi_{0,i}\left(-\mu^2 + \lambda|\Phi_0|^2\right) \stackrel{!}{=} 0$$

Therefore $\Phi_{0,i} = 0$ (local maximum) or $|\Phi_0| = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv v$ (minimum). Therefore there is a continouuus set of minima related by rotations that can be parameterized e.g. as $\Phi_{0,1} = v\cos\beta$, $\Phi_{0,2} = v\sin\beta$. Since the theory is invariant under (1) we can always perform a rotation such that

$$\Phi_{0,1} = v\,, \quad \Phi_{0,2} = 0.$$

c) Entwickeln Sie das Potential bis zur quadratischen Ordung um das Minimum, indem Sie die Felder als $\Phi_i = \Phi_{0,i} + \phi_i$ schreiben:

$$\mathcal{L} = -V(\Phi_0) + \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i - \sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\Phi_i\,\partial\Phi_j}\bigg|_{\Phi_0} \phi_i\phi_j + \mathcal{O}(\phi_i^3)$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Lagrangedichte für skalare Felder ϕ_i mit Massen m_i,

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\,\partial^\mu\phi_i - \frac{m_i^2}{2}\phi_i^2 + \ldots\right]$$

und bestimmen Sie beide Massenparameter.

Solution:

$$\frac{\partial^2 V(\Phi)}{\partial\Phi_i\Phi_j} = \delta_{i,j}\left(-\mu^2 + \lambda|\Phi|^2\right) + 2\lambda\Phi_i\Phi_j \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 V(\Phi)}{\partial\Phi_i\Phi_j}|_{\Phi_0} = \delta_{i,j}\underbrace{\left(-\mu^2 + \lambda v^2\right)}_{=0} + 2\underbrace{\lambda v^2}_{=\mu^2}\delta_{i,1}\delta_{j,1}$$

Therefore

$$\mathcal{L} = -V(\Phi_0) + \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i - \mu^2\phi_1^2 + \ldots$$

The value of $V(\Phi_0) = -\frac{\mu^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{4}v^4 = -\frac{\mu^4}{4\lambda}$ is not relevant since the origin of the potential can always be shifted. Since the Lagrangian for a scalar field ϕ_i with mass m_i is

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i - \frac{m_i^2}{2}\phi_i^2$$

we see that $m_1 = \sqrt{2}\mu$ and $m_2 = 0$.

From the figure in part b) we see that for the choice $\Phi_{0,1} = v$, $\Phi_{0,2} = 0$ "moving" along the ϕ_1 direction corresponds to climbing up the potential out of the minimum (which corresponds to a massive excitation of the field) while moving (infinitesimally) along the ϕ_2 direction corresponds to moving along the minimum where the potential is flat (corresponding to a massless excitation of the field). Such a massless excitation always appears when the Lagrangian of a system is invariant under a global, continuous symmetry (here the rotations in the Φ_1-Φ_2 plane) but the ground state is not (here the value of the minimum chosen as $\Phi_{0,1} \neq 0$) and is called "Goldstone boson".

Bemerkung: Das in dieser Aufgabe diskutierte Modell ist ein Beispiel für das Phänomen der sogenannten „Spontanen Symmetriebrechung“: Die Lagrangefunktion ist invariant unter einer Symmetrie, aber der Grundzustand des Systems (das Minimum des Potentials) ist dies nicht. Allgemein lässt sich zeigen, dass bei spontan gebrochenen kontinuierlichen Symmetrien masselose Skalarfelder auftreten, sogenannte „Goldstone-Bosonen“. Das hier diskutierte Modell lässt sich weiterhin an das elektromagnetische Feld koppeln, dies führt dazu, dass das elektromagnetische Feld massiv wird. Eine Verallgemeinerung dieses Mechanismus wird verwendet, um die Massen der W- und Z-Bosonen der schwachen Wechselwirkung zu beschreiben. In diesem Zusammenhang wird das auftretende massive Skalarfeld „Higgs-Boson“ genannt.