Aufgabe 11.1 *Infinitesimale Lorentz-Transformation* (1 Punkt)

Die 4×4-Matrix $L_i(v)$ beschreibe die Lorentz-Transformation in ein System, das gegenüber dem ursprünglichen um die Geschwindigkeit v in Richtung $\boldsymbol{e}_i$ „geboosted" ist. Berechnen Sie $W = L_2(-v_2)L_1(-v_1)L_2(v_2)L_1(v_1)$ für kleine Geschwindigkeiten v_i inklusive aller Terme der Ordnung $\mathcal{O}(1/c^2)$. Welche Koordinatentransformation beschreibt W? Welches Ergebnis würden Sie bei Galilei-Transformationen erhalten?

Aufgabe 11.2 *Doppler-Effekt* (2 Punkte)

Betrachtet wird ein Sender, der Wellen mit einer Frequenz f_s aussendet, und ein Empfänger, der diese Wellen mit einer verschobenen Frequenz f_e empfängt. Die Wellen breiten sich mit der Geschwindigkeit c aus. Berechnen Sie f_e/f_s für folgende Situationen (alle Geschwindigkeiten seien kleiner als c).

a) (i) Der Empfänger ist ein Passant, der am Straßenrand steht (Windstille), der Sender ist ein hupendes Auto, das sich vom Passanten mit der Geschwindigkeit v_s entfernt.

(ii) Das Auto bleibt stehen (immer noch Windstille), der Passant entfernt sich aber nun vom hupenden Auto mit der Geschwindigkeit v_e.

(iii) Sowohl das hupende Auto, als auch der Passant bleiben stehen, aber nun weht ein Wind mit Geschwindigkeit v_w vom Passanten in Richtung Auto.

b) An Stelle der akustischen Signale nehmen Sie nun monochromatische Lichtstrahlen (z. B. durch einen Laser) an und bestimmen Sie wieder f_e/f_s für die zu (i), (ii), (iii) analogen Fälle. (Ignorieren Sie Effekte von Materie auf die Lichtausbreitung.)

Bitte wenden!

Aufgabe 11.3 *Relativistische Kinematik zum* $1 \to 2$ *Teilchenzerfall* (2 Punkte)

Ein Teilchen mit der Masse M und dem Viererimpuls k^μ zerfalle in zwei Teilchen mit den Massen m_i und den Viererimpulsen p_i^μ ($i = 1, 2$). Die Impulse genügen den „Massenschalenbedingungen“ $k^2 = M^2c^2$ und $p_i^2 = m_i^2c^2$ und sind im Massenmittelpunktsystem Σ gegeben durch

$$k^\mu = (Mc, \mathbf{0}), \qquad p_i^\mu = (E_i/c, |\mathbf{p}_i| \cos\phi_i \sin\theta_i, |\mathbf{p}_i| \sin\phi_i \sin\theta_i, |\mathbf{p}_i| \cos\theta_i).$$

a) Welche Konsequenzen hat die Viererimpulserhaltung $k = p_1 + p_2$ für die Energien E_i, Impulsbeträge $|\mathbf{p}_i|$ und Winkel θ_i, ϕ_i?

b) Berechnen Sie die E_i und $|\mathbf{p}_i|$ als Funktion der Massen M und m_i.

c) Das zerfallende Teilchen wird nun in einem System Σ' betrachtet, in dem es die Geschwindigkeit v entlang der x^3-Achse hat. Wie hängen Energien und Winkel in Σ' mit den Größen in Σ zusammen?

d) Bestimmen Sie für den Spezialfall $m_1 = m_2 = 0$ (z. B. Zerfall in zwei Photonen) den Zwischenwinkel θ' der Flugbahnen der Zerfallsprodukte in Σ' (d. h. den Winkel zwischen $\mathbf{p}'_1$ und $\mathbf{p}'_2$). Welche Extremwerte nimmt θ' an? Diskutieren Sie insbesondere die Fälle $v = 0$ und $v \to c$.

   Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung von θ' die Lorentz-Invarianz von $(p_1 + p_2)^2$ und werten Sie diesen Ausdruck in Σ und Σ' aus.